锦囊妙解

创新导学专题

初中数学3

丛书主编　司马文　曹瑞彬
丛书副主编　冯小秋　钟志健
本册主编　肖亚东

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

锦囊妙解

创新导学专题

初中数学 3

丛书主编　司马文　曹瑞彬

丛书副主编　冯小秋　钟志健

执行主编　江　海

本册主编　肖亚东

编　　者　万强华　[illegible]　[illegible]　曾建峰　毛金才　李庆春　周志祥

朱燕卫　金尤国　胡志彬　丁锁勤　钱　勇　吴志山　何福林

沈桂彬　李小慧　朱时来　王春和　周拥军　王新祝　李家亮

丁　勇　肖亚东　吴淑群　张季锋　李金光

机械工业出版社

CHINA MACHINE PRESS

图书在版编目(CIP)数据

锦囊妙解创新导学专题．初中数学 3/司马文，曹瑞彬丛书主编；肖亚东本册主编．—北京：机械工业出版社，2010．10（2010.11重印）
ISBN 978-7-111-31961-0

Ⅰ．①锦… Ⅱ．①司… ②曹… ③肖… Ⅲ．①数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ．①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 182961 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037)
策划编辑：石晓芬
责任印制：杨　曦
北京双青印刷厂印刷
2010 年 11 月第 1 版·第 2 次印刷
169mm × 228mm·21.25 印张·530 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-31961-0
定价：27.00 元

电话服务
社服务中心：(010) 88361066
销 售 一 部：(010) 68326294
销 售 二 部：(010) 88379649
读者服务部：(010) 68993821

网络服务
门户网：http://www.cmpbook.com
教材网：http://www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版

前言

锦囊妙解丛书面世多年，备受广大读者厚爱，在此深表感谢。为了答谢广大读者，我们密切关注课程改革的新动向，在原有基础上，精益求精，反复修订，使得锦囊妙解丛书与时俱进、永葆青春。目前奉献给读者的《锦囊妙解创新导学专题》丛书力求凸显创新素质的培养，力求知识讲解创新、选择试题创新、剖析思路创新，从而让学生阅读后，能更透彻、迅速地明晰重点、难点，在掌握基本的解题思路和方法的基础上，举一反三、触类旁通，全面提升学生的创新素质，在学习、应试中得心应手、应付自如。

本丛书以每个知识点为讲解元素，结合“课标解读”、“知识清单”、“易错清单”、“点击中考”等栏目，突出教材中的重点和难点，并将中考例题的常考点、易错点进行横竖梳理，多侧面、多层次、全方位加以涵盖，使分散的知识点凝聚成团，形成纵横知识网络，有利于学生记忆、理解、掌握、类比、拓展和迁移，并转化为实际解题能力。

本丛书取材广泛，视野开阔，吸取了众多参考书的长处及全国各地教学科研的新思路、新经验和新成果，选例新颖典型，难度贴近中考实际。讲解完备，就某一专题进行集中、全面的剖析，对知识点的讲解更细致。一些问题及例题、习题后的点评，能使学生更好地掌握本专题的知识，从而达到举一反三、触类旁通的功效。

本丛书以“新课程标准”为纲，以“考试说明”与近年考卷中体现的中考命题思路为导向，起点低、落点准，重点难点诠释明了，中考热点突出，专题集中，能很好地培养学生思维的严谨性、解题的灵活性、表达的规范性。

古人云：授人以鱼，只供一饭之需；授人以渔，则一生受用无穷。让学生掌握“捕鱼之术”，其实就是创新教育的主要目标。本丛书的策划者、编写者以此为共识，精诚合作，千锤百炼，希望本丛书不但能帮助学生学到知识，掌握知识，而且能帮助掌握学习方法，培养创新意识，增强创新能力，令学生终身受益。

司马文

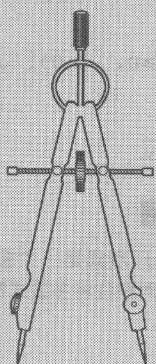
曹瑞彬

目录

第二十一章　二次根式

第1讲　二次根式

课标解读



【知识与技能】

(1)理解二次根式的概念.

(2)理解$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$是一个非负数，$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$，$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$.

【过程与方法】

通过让学生探讨、分析问题，师生共同归纳，得出概念.再对概念的内涵进行分析，得出几个重要结论，并运用这些重要结论进行二次根式的计算和化简.

【情感、态度与价值观】

利用准确计算和化简的严谨的科学精神，经过探索二次根式的重要结论，发展学生观察、分析、发现和解决问题的能力.

【教学重点】

二次根式$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$的内涵.$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$是一个非负数；$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$；

$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$及其运用.

【教学难点】

对$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$是一个非负数的理解；对等式$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$及$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$的理解及应用.

知识清单

知识点一：

二次根式的定义：

一般地，把形如$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$的式子叫做二次根式，“$\sqrt{\ }$”称为二次根号.

注意问题

1. 由于二次根式的被开方数只能取非负值，因此二次根式要有意义被开方数就必须大于或等于0.

从形式上看，二次根式必须具备以下两个条件：

(1) 必须有二次根号；

(2) 被开方数不能小于0.

2. 二次根式中，被开方数可以是一个数，也可以是一个式子.

例1 下列式子，哪些是二次根式，哪些不是二次根式：$\sqrt{2}$、$\sqrt[3]{3}$、$\frac{1}{x}$、$\sqrt{x}(x>0)$、$\sqrt{0}$、$\sqrt[4]{2}$、$-\sqrt{2}$、$\frac{1}{x+y}$、$\sqrt{x+y}(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$、$\sqrt{m^2+1}$、$\sqrt{-n^2}$、$\sqrt{a^2}$、$\sqrt{a-2}$、$\sqrt{x-y}$？

【解析】二次根式应满足两个条件：第一，有二次根号“$\sqrt{\ }$”；第二，被开方数是正数或0. 前面的九个很容易判别，在$\sqrt{m^2+1}$中 $\because m^2\geqslant 0$，$\therefore m^2+1>0$，$\therefore \sqrt{m^2+1}$是二次根式；在$\sqrt{a^2}$中，$\because a^2\geqslant 0$，$\therefore \sqrt{a^2}$是二次根式；在$\sqrt{-n^2}$中，$\because n^2\geqslant 0$，$\therefore -n^2\leqslant 0$，$\therefore$当$n=0$时，$\sqrt{-n^2}$才是二次根式；在$\sqrt{a-2}$中，当$a-2\geqslant 0$时是二次根式，当$a-2<0$时不是二次根式，即当$a\geqslant 2$时，是二次根式，当$a<2$时，不是二次根式；在$\sqrt{x-y}$中，当$x-y\geqslant 0$时是二次根式，当$x-y<0$时不是二次根式，即当$x\geqslant y$是二次根式，当$x<y$时不是二次根式.

【答案】是二次根式的有：$\sqrt{2}$、$\sqrt{x}(x>0)$、$\sqrt{0}$、$-\sqrt{2}$、$\sqrt{x+y}(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$、$\sqrt{m^2+1}$、$\sqrt{a^2}$；

不是二次根式的有：$\sqrt[3]{3}$、$\frac{1}{x}$、$\sqrt[4]{2}$、$\frac{1}{x+y}$、、$\sqrt{-n^2}$、$\sqrt{a-2}$、$\sqrt{x-y}$.

知识点二：

二次根式$\sqrt{a}$具有非负性：

二次根式$\sqrt{a}$的实质是一个非负数，即$\sqrt{a}\geqslant 0$，且$a\geqslant 0$.

注意问题

当遇到被开方式是一个多项式时，在考虑非负性时往往将多项式看作整体.

例2 当x是多少时，$\sqrt{3x-1}$在实数范围内有意义？

【解析】由二次根式的定义可知，被开方数一定要大于或等于0，所以$3x-1\geqslant 0$，$\sqrt{3x-1}$才能有意义.

【答案】由$3x-1\geqslant 0$，得$x\geqslant \frac{1}{3}$

$\therefore$当$x\geqslant \frac{1}{3}$时，$\sqrt{3x-1}$在实数范围内有意义.

【巩固练习】x是怎样的实数时，下列各式在实数范围内有意义？

(1) $\sqrt{(x+1)^2}$　(2) $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$　(3) $\sqrt{3-4x}$

(4) $\sqrt{3x-4}+\sqrt{4-3x}$　(5) $\sqrt{2x+3}+\frac{1}{x+1}$

注意分母不等于0哦！

【解析】应用二次根式的定义求解.

【答案】(1)由$(x+1)^2\geqslant 0$，解得：x取任意实数.

∴ 当x取任意实数时，二次根式$\sqrt{(x+1)^2}$在实数范围内有意义.

(2)由$x-1\geqslant 0$，且$x-1\neq 0$　解得：$x>1$

∴ 当$x>1$时，二次根式$\frac{1}{\sqrt{x-1}}$在实数范围内有意义.

(3)由$3-4x\geqslant 0$　解得：$x\leqslant \frac{3}{4}$

∴ 当$x\leqslant \frac{3}{4}$时，二次根式$\sqrt{3-4x}$在实数范围内有意义.

(4)由$3x-4\geqslant 0$且$4-3x\geqslant 0$　解得：$x\geqslant \frac{4}{3}$且$x\leqslant \frac{4}{3}$

∴ 当$x=\frac{4}{3}$时，二次根式$\sqrt{3x-4}+\sqrt{4-3x}$在实数范围内有意义.

(5)由题意，得$\begin{cases}2x+3\geqslant 0 & ① \\ x+1\neq 0 & ②\end{cases}$

由①得：$x\geqslant -\frac{3}{2}$

由②得：$x\neq -1$

当$x\geqslant -\frac{3}{2}$且$x\neq -1$时，$\sqrt{2x+3}+\frac{1}{x+1}$在实数范围内有意义.

例3 已知$y=\sqrt{2-x}+\sqrt{x-2}+5$，求$\frac{x}{y}$的值.

【解析】利用二次根式有意义，求出x、y的值，然后将x、y的值代入求出所求式子的值.

【答案】要使得$\sqrt{2-x}$、$\sqrt{x-2}$有意义，则$2-x\geqslant 0$且$x-2\geqslant 0$，

所以$x\leqslant 2$且$x\geqslant 2$，所以$x=2$，将$x=2$代入到原式，求得$y=5$，所以$\frac{x}{y}=\frac{2}{5}$.

知识点三：

$(\sqrt{a})^2$的化简：

$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$

文字语言：一个非负数的算术平方根的平方等于这个非负数.

注意问题

(1)$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$是一个非负数；

(2)$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$；反之，$a=(\pm\sqrt{a})^2(a\geqslant 0)$，主要运用于实数范围内的因式分解.

例4 计算

(1)$(3\sqrt{5})^2$　(2)$(\frac{\sqrt{7}}{2})^2$　(3)$(3\sqrt{5})^2-(5\sqrt{3})^2$

(4)$(\sqrt{a^2})^2$　　　　　　(5)$(\sqrt{a^2+2a+1})^2$　　　　　　(6)$(\sqrt{4x^2-12x+9})^2$

【解析】(1)－(3)题可以直接利用$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$的结论解题；而(4)－(6)题先要探究被开方式的非负性，然后再化简，(4)中$a^2\geqslant 0$；(5)中$a^2+2a+1=(a+1)^2\geqslant 0$；(6)中$4x^2-12x+9=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3+3^2=(2x-3)^2\geqslant 0$，所以这3个被开方式都可以运用$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$的重要结论解题.

【答案】(1)$(3\sqrt{5})^2=3^2\cdot(\sqrt{5})^2=3^2\cdot 5=45$，

(2)$(\frac{\sqrt{7}}{2})^2=\frac{(\sqrt{7})^2}{2^2}=\frac{7}{4}$，

(3)$(3\sqrt{5})^2-(5\sqrt{3})^2=3^2\cdot(\sqrt{5})^2-5^2\cdot(\sqrt{3})^2=45-75=-30$，

(4)$\because a^2\geqslant 0$，$\therefore(\sqrt{a^2})^2=a^2$

(5)$\because a^2+2a+1=(a+1)^2$，　又$\because(a+1)^2\geqslant 0$，

$\therefore a^2+2a+1\geqslant 0$，$\therefore(\sqrt{a^2+2a+1})^2=a^2+2a+1$

(6)$\because 4x^2-12x+9=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3+3^2=(2x-3)^2$，　又$\because(2x-3)^2\geqslant 0$

$\therefore 4x^2-12x+9\geqslant 0$，$\therefore(\sqrt{4x^2-12x+9})^2=4x^2-12x+9$

例5 在实数范围内分解下列因式：

(1)x^2-7　　　　　　(2)x^4-4　　　　　　(3)x^4-4x^2+4

【解析】本题因式分解的范围扩大到了实数范围内，对于常数不是完全平方数的，可以用$a=(\sqrt{a})^2(a\geqslant 0)$将它们转化为平方的形式.

这里分别使用了平方差公式和完全平方公式，注意要分解到不能再分解为止.

【答案】(1)$x^2-7=x^2-(\sqrt{7})^2=(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$；

(2)$x^4-4=(x^2+2)(x^2-2)=(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$；

(3)$x^4-4x^2+4=(x^2-2)^2=(x+\sqrt{2})^2(x-\sqrt{2})^2$.

知识点四：

$\sqrt{a^2}$的化简：

$\sqrt{a^2}=|a|$，当$a\geqslant 0$时，$\sqrt{a^2}=a$；当$a<0$时，$\sqrt{a^2}=-a$.

例6 填空：当$a\geqslant 0$时，$\sqrt{a^2}=$________；当$a<0$时，$\sqrt{a^2}=$________，并根据这一性质回答下列问题.

(1)若$\sqrt{a^2}=a$，则a可以是什么数？

(2)若$\sqrt{a^2}=-a$，则a可以是什么数？

(3)$\sqrt{a^2}>a$，则a可以是什么数？

【解析】(1)根据结论求条件，$\because\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$，$\therefore$要填第一个空格可以根据这个结论；

(2)根据第二个填空的分析，逆向思考，因为$\sqrt{a^2}\geqslant 0$，所以$-a\geqslant 0$；在(3)中根据(1)、(2)可知$\sqrt{a^2}=|a|$，而$|a|$要大于a，只有什么时候才能保证呢？$a<0$.

解：a；$-a$　(1)因为$\sqrt{a^2}=a$，所以$a\geqslant 0$；　(2)因为$\sqrt{a^2}=-a$，所以$a\leqslant 0$；

(3)因为$\sqrt{a^2}=|a|$，又$\sqrt{a^2}>a$，所以$|a|$要大于a，所以$a<0$.

例7 当$x>2$，化简$\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(1-2x)^2}$.

【解析】根据$x>2$，所以$x-2>0,1-2x<0$利用$\sqrt{a^2}=|a|$进行化简.

【答案】$\because x>2$，$\therefore x-2>0,1-2x<0$，

所以$\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(1-2x)^2}=|x-2|-|1-2x|$

$=x-2+1-2x$

$=-x-1$

【巩固练习】若$-3\leqslant x\leqslant 2$时，试化简$|x-2|+\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{x^2-10x+25}$.

【解析】根据x的取值范围，结合结论化简.

【答案】$\because -3\leqslant x\leqslant 2$，$\therefore x-2\leqslant 0$，$x+3\geqslant 0$，$x-5<0$，

所以$|x-2|+\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{x^2-10x+25}=|x-2|+|x+3|+|x-5|$

$=-(x-2)+(x+3)-(x-5)$

$=-x+2+x+3-x+5=10-x$

例8 若$|1995-a|+\sqrt{a-2000}=a$，求$a-1995^2$的值.

【解析】要使二次根式有意义，则$a-2000\geqslant 0$，确定出a的取值范围，进一步判断$1995-a$的值是正数还是负数，然后去掉绝对值求出a的值.

【答案】要使得$\sqrt{a-2000}$有意义，则$a-2000\geqslant 0$，所以$a\geqslant 2000$，

又$|1995-a|+\sqrt{a-2000}=a$，所以$a-1995+\sqrt{a-2000}=a$，

所以$\sqrt{a-2000}=1995$，所以$a=1995^2+2000$，

所以$a-1995^2=2000$.

例9 对于题目“化简求值：$\frac{1}{a}+\sqrt{\frac{1}{a^2}+a^2-2}$，其中$a=\frac{1}{5}$.”甲、乙两人的解答不同.

甲的解答是：$\frac{1}{a}+\sqrt{\frac{1}{a^2}+a^2-2}=\frac{1}{a}+\sqrt{\left(\frac{1}{a}-a\right)^2}$

$=\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-a=\frac{2}{a}-a=\frac{49}{5}$

乙的解答是：$\frac{1}{a}+\sqrt{\frac{1}{a^2}+a^2-2}=\frac{1}{a}+\sqrt{\left(\frac{1}{a}-a\right)^2}$

$=\frac{1}{a}+a-\frac{1}{a}=a=\frac{1}{5}$，

谁的解答是错误的？为什么？

【解析】由于$a=\frac{1}{5}$，所以在化简二次根式时，要受到a的取值的限制.

【答案】乙的解答是错误的.

原因：$\because$当$a=\frac{1}{5}$时，$\frac{1}{a}-a>0$，

$\therefore\sqrt{\left(\frac{1}{a}-a\right)^2}=\frac{1}{a}-a$.所以甲的解答是正确的.

例10 若3，m，5为三角形的三边，化简：$\sqrt{(2-m)^2}-\sqrt{(m-8)^2}$.

【解析】根据三角形的三边关系定理，确定 m 的取值范围，然后再利用结论 $\sqrt{a^2}=|a|$ 化简.

【答案】根据题意得：$2<m<8$.

$\therefore 2-m<0$，$m-8<0$，

$\therefore$ 原式 $=m-2+m-8$

$=2m-10$.

例11 实数 a、b 在数轴上的位置如图 21-1-1 所示.

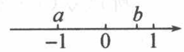


图 21-1-1

化简 $\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}+\sqrt{(a-b)^2}$.

【解析】利用数轴确定 a、b 的取值范围，然后再化简.

【答案】由数轴知，$a<0$，且 $b>0$.

$\therefore\quad a-b<0$.

$\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}+\sqrt{(a-b)^2}$

$=|a|-|b|+|a-b|$

$=(-a)-b+(b-a)$

$=-a-b+b-a$

$=-2a$.

易错清单

易错点一：

对二次根式的概念理解不清.

例12 下列式子中一定是二次根式的有______个.

(1) $\sqrt{-x-2}$　　(2) $\sqrt{x}$　　(3) $\sqrt{x^2+2}$　　(4) $\sqrt{x^2-2}$

【解析】很多学生在判断二次根式时，往往忽视了讨论被开方式的取值. 比如(1)中当 $x>-2$ 时，二次根式就无意义；(2)中当 $x<0$ 时，二次根式就无意义；(4)当 $x^2<2$ 时，二次根式也无意义. 而只有(3)中无论 x 取何值，x^2+2 都大于 0，二次根式都有意义.

【答案】1 个.

易错点二：

因式分解不完整.

例13 在实数范围内分解因式：x^4-4x^2+4.

【解析】许多学生在分解因式时，往往只在有理数范围内分解，得到结果为 $(x^2-2)^2$，其原因是，没有理解在实数范围内分解因式的含义，因此还可以继续分解.

【答案】$x^4-4x^2+4=(x^2-2)^2=(x+\sqrt{2})^2(x-\sqrt{2})^2$.

点击中考

【考点解读】本节主要考查用二次根式的化简解决问题，常见的题型有填空题、选择题、解答题等.

【考题回放】

1. (2009 山西)计算 $(\sqrt{2})^2$ 的结果等于________.

2. (2009 湖南)若使二次根式 $\sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是 ( )

A. $x\geqslant 2$　　B. $x>2$　　C. $x<2$　　D. $x\leqslant 2$

3. (2009 湖北)使代数式 $\dfrac{\sqrt{x-3}}{x-4}$ 有意义的 x 的取值范围是 ( )

A. $x>3$　　B. $x\geqslant 3$　　C. $x>4$　　D. $x\geqslant 3$ 且 $x\neq 4$

4. (2009 甘肃)使 $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 在实数范围内有意义的 x 应满足的条件是________.

5. (2009 广西)当 $x\leqslant 0$ 时，化简 $|1-x|-\sqrt{x^2}$ 的结果是________.

6. (2009 贵州) $\sqrt{x^2}=$________.

7. (2009 四川)计算：$\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}+\sqrt{3}=$________.

8. (2009 山东)已知 a 为实数，那么 $\sqrt{-a^2}$ 等于 ( )

A. a　　B. $-a$　　C. -1　　D. 0

9. (2009 贵州)方程 $|4x-8|+\sqrt{x-y-m}=0$，当 $y>0$ 时，m 的取值范围是 ( )

A. $0<m<1$　　B. $m\geqslant 2$　　C. $m<2$　　D. $m\leqslant 2$

10. (2009 湖北)若 $\sqrt{x-1}-\sqrt{1-x}=(x+y)^2$，则 $x-y$ 的值为 ( )

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. 3

11. (2009 湖南)若 $|a-2|+\sqrt{b-3}+(c-4)^2=0$，则 $a-b+c=$________.

12. (2009 浙江)当 $x=-2$ 时，代数式 $\sqrt{5x^2-3x-1}$ 的值是________.

13. (2009 湖南)对于任意不相等的两个数 a，b，定义一种运算※如下：$a※b=\dfrac{\sqrt{a+b}}{a-b}$，如 $3※2=\dfrac{\sqrt{3+2}}{3-2}=\sqrt{5}$. 那么 $12※4=$________.

14. (2009 贵州)先化简，再求值：$\dfrac{x^2-4x+4}{2x-4}\cdot(x+2)$，其中 $x=\sqrt{5}$.

答案

1. **【解析】**利用 $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$ 求解.

【答案】2

2. **【解析】**由二次根式的定义可知，$x-2\geqslant 0$，所以 $x\geqslant 2$.

【答案】A

3.【解析】本题中不但要考虑二次根式有意义，而且还要考虑分母不为 0.

【答案】D

4.【解析】由于二次根式在分母中，所以 $x-1>0$，所以 $x>1$.

【答案】$x>1$

5.【解析】因为 $x\leqslant 0$，所以 $1-x>0$，所以 $|1-x|-\sqrt{x^2}=1-x+x=1$.

【答案】1

6.【解析】在不知道 x 的取值的情况下，$\sqrt{x^2}=|x|$.

【答案】$|x|$

7.【解析】根据知识点可知 $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}+\sqrt{3}=2-\sqrt{3}+\sqrt{3}=2$.

【答案】2

8.【解析】根据 $-a^2\geqslant 0$，所以 $a^2\leqslant 0$，由非负数的性质可知，$a^2\geqslant 0$，所以 $a=0$.

所以 $\sqrt{-a^2}=0$.

【答案】D

9.【解析】根据非负数的性质可知，$\begin{cases}4x-8=0\\x-y-m=0\end{cases}$，解得 $x=2$，所以 $y=2-m$，

当 $y>0$ 时，$2-m>0$，所以 $m<2$.

【答案】C

10.【解析】要使 $\sqrt{x-1}$ 和 $\sqrt{1-x}$ 有意义，则 $x-1\geqslant 0$，$1-x\geqslant 0$，所以 $x\geqslant 1$，$x\leqslant 1$，所以 $x=1$，则 $(x+y)^2=0$，所以 $y=-1$，所以 $x-y=2$.

【答案】C

11.【解析】根据非负数的性质可知 $a-2=0$，$b-3=0$，$c-4=0$，所以 $a=2$，$b=3$，$c=4$，所以 $a-b+c=3$.

【答案】3

12.【解析】将 $x=-2$ 代入到 $\sqrt{5x^2-3x-1}$ 中，则 $\sqrt{5x^2-3x-1}=\sqrt{25}=5$.

【答案】5

13.【解析】根据题目中的公式可知，$12※4=\dfrac{\sqrt{12+4}}{12-4}=\dfrac{1}{2}$.

【答案】$\dfrac{1}{2}$

14.【解析】先将代数式化简，然后将 $x=\sqrt{5}$ 代入求解.

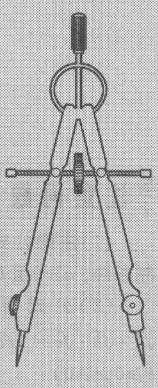
【答案】

$$\frac{x^2-4x+4}{2x-4}\cdot(x+2)=\frac{(x-2)^2}{2(x-2)}\cdot(x+2)=\frac{(x-2)(x+2)}{2}=\frac{x^2-4}{2}$$

$\because x=\sqrt{5}$ $\quad\therefore$ 原式 $=\dfrac{1}{2}$

第2讲 二次根式的乘除

课标解读



【知识与技能】

(1)掌握积的算术平方根公式、二次根式的乘法公式、商的算术平方根公式、二次根式的除法公式.

(2)了解最简二次根式的概念.

【过程与方法】

通过具体数据探究规律，得出二次根式的乘除法公式，并运用这些公式进行相关的计算；通过逆向思维得出二次根式的乘除法公式的逆向等式，并会运用它们进行二次根式的化简，达到对二次根式化简的目的.

【情感、态度与价值观】

通过对二次根式的乘除公式的探究引导学生发现问题、分析问题并解决问题的能力.

【教学重点】

掌握二次根式的乘除法公式及其运用和最简二次根式的概念.

【教学难点】

二次根式的乘除法的条件限制及化简最简二次根式.

知识清单

知识点一：
积的算术平方根：

积的算术平方根等于积中各个因式的算术平方根的积.

公式：$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant0,b\geqslant0)$

注意问题

(1)在运用公式时注意限制条件$a\geqslant0$且$b\geqslant0$.

(2)在二次根式化简的过程中，如果没有特别的说明，所有的字母都代表正数.

例1 使等式$\sqrt{(x+2)(-x+2)}=\sqrt{x+2}\times\sqrt{-x+2}$成立的条件是________.

【解析】根据积的算术平方根公式的限制条件可知$\begin{cases}x+2\geqslant0\\-x+2\geqslant0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x\geqslant-2\\x\leqslant2\end{cases}$

所以$-2\leqslant x\leqslant2$.

【答案】$-2\leqslant x\leqslant2$.

例2 化简

(1) $\sqrt{9\times16}$　(2) $\sqrt{16\times81}$　(3) $\sqrt{81\times100}$　(4) $\sqrt{9x^2y^2}$　(5) $\sqrt{54}$

【解析】利用$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant0,b\geqslant0)$直接化简即可.

【答案】(1) $\sqrt{9\times16}=\sqrt{9}\times\sqrt{16}=3\times4=12$

(2) $\sqrt{16\times81}=\sqrt{16}\times\sqrt{81}=4\times9=36$

(3) $\sqrt{81\times100}=\sqrt{81}\times\sqrt{100}=9\times10=90$

(4) $\sqrt{9x^2y^2}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{x^2y^2}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{x^2}\times\sqrt{y^2}=3xy$

(5) $\sqrt{54}=\sqrt{9\times6}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

知识点二：
二次根式的乘法公式：

几个二次根式相乘等于它们的被开方数(式)的乘积的算术平方根.

公式：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant0,b\geqslant0)$

注意问题

(1)注意公式成立的限制条件，$a\geqslant0$且$b\geqslant0$.

(2)公式可以推广到$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}=\sqrt{abc}(a\geqslant0,b\geqslant0,c\geqslant0)$.

例3 计算：

(1) $2\sqrt{\frac{5}{6}}\times4\sqrt{3\frac{3}{5}}$　(2) $5\sqrt{ab^3c}\cdot\sqrt{2ac^3}\cdot2\sqrt{3bc}$

【解析】计算时注意系数与系数相乘，被开方数(式)与被开方数(式)相乘，然后化简.

【答案】(1)原式$=2\times4\times\sqrt{\frac{5}{6}\times\frac{18}{5}}=8\sqrt{3}$；

(2)原式$=5\times2\times\sqrt{ab^3c\cdot2ac^3\cdot3bc}=10\sqrt{6a^2b^4c^5}=10ab^2c^2\sqrt{6c}$.

知识点三：

商的算术平方根公式：

商的算术平方根等于各个因式的算术平方根的商.

公式：$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0,b>0)$

注意问题

(1)注意公式的限制条件：$a\geqslant 0,b>0$；

(2)利用商的算术平方根的性质可以化简二次根式，使被开方数中不含分母.

例4 化简：

(1)$\sqrt{\frac{3}{64}}$　(2)$\sqrt{\frac{64b^2}{9a^2}}$　(3)$\sqrt{\frac{9x}{64y^2}}$　(4)$\sqrt{\frac{5x}{169y^2}}$

【解析】 直接利用$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0,b>0)$就可以达到化简的目的.

【答案】 (1)$\sqrt{\frac{3}{64}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{64}}=\frac{\sqrt{3}}{8}$　(2)$\sqrt{\frac{64b^2}{9a^2}}=\frac{\sqrt{64b^2}}{\sqrt{9a^2}}=\frac{8b}{3a}$

(3)$\sqrt{\frac{9x}{64y^2}}=\frac{\sqrt{9x}}{\sqrt{64y^2}}=\frac{3\sqrt{x}}{8y}$　(4)$\sqrt{\frac{5x}{169y^2}}=\frac{\sqrt{5x}}{\sqrt{169y^2}}=\frac{\sqrt{5x}}{13y}$

例5 已知$\sqrt{\frac{9-x}{x-6}}=\frac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{x-6}}$，且$x$为偶数，求$(1+x)\sqrt{\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}}$的值.

【解析】 先利用商的算术平方根公式的限制条件，求出x的值，然后将所求的式子化简，代入并求值.

【答案】 根据题意可知，$\begin{cases}9-x\geqslant 0\\x-6>0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x\leqslant 9\\x>6\end{cases}$，所以$6<x\leqslant 9$，

又x为偶数，所以$x=8$，

$(1+x)\sqrt{\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}}$

$=(1+x)\sqrt{\frac{(x-1)(x-4)}{(x+1)(x-1)}}=(1+x)\sqrt{\frac{x-4}{x+1}}=\sqrt{(x+1)^2\cdot\frac{x-4}{x+1}}=\sqrt{(x+1)(x-4)}$

当$x=8$时，原式的值$=\sqrt{9\times 4}=6$.

知识点四：

二次根式的除法：

二次根式相除等于被开方数的商的算术平方根.

公式：$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geqslant 0,b>0)$

注意问题

(1)运用公式时注意限制条件$a\geqslant 0,b>0$，特别注意的是当$b=0$时，分母等于0，无意义.

(2)在解决二次根式的除法运算时，结果应该化为最简，即被开方数中不能含有分母或小数，能开方的因数或因式都要开出来.

例6 计算：

(1) $\sqrt{90}\div\sqrt{3\frac{3}{5}}$　　(2) $\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{12ab}}$

【解析】在计算时注意系数与系数相除，被开方数与被开方数相除，结果中不应含有分母或分式.

【答案】(1) $\sqrt{90}\div\sqrt{3\frac{3}{5}}=\sqrt{90\times\frac{5}{18}}=\sqrt{25}=5$

(2) $\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{12ab}}=\sqrt{\frac{3a}{12ab}}=\sqrt{\frac{1}{4b}}=\frac{\sqrt{b}}{2b}$.

知识点五：

最简二次根式：

一个二次根式如果满足以下两个条件：(1)被开方数中不能含有分母；(2)被开方数中不含能开得尽方的因数或因式，这样的二次根式叫做最简二次根式.

注意问题

(1)要判断一个二次根式是否是最简二次根式，必须同时满足以上两个条件.

(2)所谓的最简二次根式不能单纯地理解为是最简单的二次根式. 如 $\sqrt{12}$ 就不是最简二次根式，化简为 $2\sqrt{3}$.

例7 下列根式中属于最简二次根式的是　　(　　)

A. $\sqrt{a^2+1}$　　B. $\sqrt{\frac{1}{2}}$　　C. $\sqrt{8}$　　D. $\sqrt{27x}$

【解析】依据最简二次根式的两个条件加以判别，B 中化简为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，C 中化简为 $2\sqrt{2}$，D 中化简为 $3\sqrt{3x}$，所以 B、C、D 都不是最简二次根式，只有 A 是最简二次根式.

【答案】A

例8 计算：

(1) $\frac{n}{m}\sqrt{\frac{n}{2m^2}}\cdot(-\frac{1}{m}\sqrt{\frac{n^3}{m^3}})\div\sqrt{\frac{n}{2m^3}}$　$(m>0, n>0)$

(2) $-3\sqrt{\frac{3m^2-3n^2}{2a^2}}\div(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{m+n}{a^2}})\times\sqrt{\frac{a^2}{m-n}}$　$(a>0)$

【解析】运用二次根式的乘除法公式进行计算，先将除法运算转化为乘法运算，然后遵循系数与系数相乘，被开方数与被开方数相乘的法则运算.

【答案】(1) 原式 $=-\frac{n}{m^2}\sqrt{\frac{n^4}{2m^5}}\div\sqrt{\frac{n}{2m^3}}=-\frac{n}{m^2}\sqrt{\frac{n^4}{2m^5}\times\frac{2m^3}{n}}$

$=-\frac{n}{m^2}\times\sqrt{\frac{n^3}{m^2}}=-\frac{n}{m^2}\times\frac{n}{m}\sqrt{n}=-\frac{n^2}{m^3}\sqrt{n}$

(2) 原式 $=-2\sqrt{\frac{3(m+n)(m-n)}{2a^2}\times\frac{a^2}{m+n}\times\frac{a^2}{m-n}}=-2\sqrt{\frac{3a^2}{2}}=-\sqrt{6}a$