◆人教版

学法大视野 XUEFA DASHIYE

考一本

KAOYIBEN

课程基础导练

数学

高中选修2-2

海豚出版社
DOLPHIN BOOKS
CIPG 中国国际出版集团

责任编辑：范劲松　潘　丽
责任校对：吴小燕　谭著名
装帧设计：张　维　蒋　慧

拥有《考一本》　圆你一本梦

考一本
KAOYIBEN
课程基础训练

长郡雅礼 联袂打造
一线名师 担纲编写

语文·高中必修 1，2，3，4，5(人教版)
数学·高中必修 1，2，3，4，5(人教版)
英语·高中模块 1，2，3，4，5(译林版)
物理·高中必修 1，2(人教版)
化学·高中必修 1，2(人教版)
历史·高中必修 1，2，3(人教版)
地理·高中必修 1，2，3(湘教版)
生物·高中必修 1，2，3(人教版)
思想政治·高中必修 1，2，3，4(人教版)

语文·高中选修·文章写作与修改（人教版）
语文·高中选修·中国古代诗歌散文欣赏（人教版）
语文·高中选修·新闻阅读与实践（人教版）
语文·高中选修·中国文化经典研读（人教版）
语文·高中选修·外国小说欣赏（人教版）
数学·高中选修 1－1，1－2，2－1，2－2，2－3(人教版)
数学·高中选修 4－1，4－4，4－5，4－7(人教版)
英语·高中模块 6，7，8，9，10，11(译林版)
物理·高中选修 1－1，3－1，3－2，3－4，3－5(人教版)
化学·高中选修 1，4，5(人教版)
生物·高中选修 1，3(人教版)
历史·高中选修 1，3(人教版)
地理·高中选修 3，5(湘教版)

百校联盟
BiSCHOOL

本丛书由 www.acpub.com(中国学术出版网)提供数字出版支持
欢迎访问 www.baishibaile.com，查询学科资讯，参与在线互动

ISBN 978-7-5110-0354-6

定价：11.00 元

考一本

课程基础导练

数学

高中选修 2-2（人教版）

组编单位：长沙市教育科学研究院

编写指导：王　旭　卢鸿鸣　刘维朝

（按姓氏笔画）陈来满　雷建军　黎　奇

本册主编：杨　科　陈　峰

本册编者：丁秋红　陈朝阳　张　鋆　陈炽喜　黄爱民

李武辉　唐丙乾　汤　芳　滕晓军　王志翔

彭启艳　何永红　郭丽君　马喜霞

本册审读：戴国良　邓奇志　龚德军

海豚出版社

DOLPHIN BOOKS

CIPG 中国国际出版集团

图书在版编目（CIP）数据

考一本·课程基础导练. 数学. 2-2：选修 / 杨科，陈峰主编. —北京：海豚出版社，2010.8
ISBN 978-7-5110-0354-6

Ⅰ.①考… Ⅱ.①杨… ②陈… Ⅲ.① 数学课—高中—习题 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 165853 号

书　　名：考一本·课程基础导练　数学(选修 2-2)
作　　者：杨　科　陈　峰

责任编辑：范劲松　潘　丽
责任校对：吴小燕　谭著名
装帧设计：张　维　蒋　慧

出　　版：海豚出版社
网　　址：http://www.dolphin-books.com.cn
地　　址：北京市百万庄大街 24 号　　邮　编：100037
客服电话：0731-84322947　84313942　82254875
传　　真：0731-84322947　82322805
印　　刷：湖南版艺印刷有限公司
开　　本：16 开(880 毫米×1230 毫米)
印　　张：5.5
字　　数：185 千字
版　　次：2010 年 8 月第 1 版　2010 年 8 月第 1 次印刷
标准书号：ISBN 978-7-5110-0354-6
定　　价：11.00 元

PREFACE

编者寄语

积经年之底蕴，凝教学之精华。全新呈现在您面前的《考一本·课程基础导练》是由湖南省四大名校之长郡中学、雅礼中学联手倾力打造，经校内众多长年奋战在教学一线上的特、高级教师潜心编写而成的。长郡、雅礼两校此番在教辅用书上的联袂合作，尚属首次，而由各学科带头人牵头的作者队伍，也都是教育界的精兵强将。作为编者，我们有足够的理由相信，《考一本·课程基础导练》这套新型教辅用书必将给广大师生带来福音。

本套丛书立足于学业水平考试，跟踪服务新高考，以最新教材为依托，彰显教育教学新理念，整体来说，具有权威、同步、联动、实用等几大特色。

权威 本套丛书的编写团队，不仅具有扎实的教学功底，丰富的教学经验，而且深谙高中教育教学的规律和特点，由学科带头人领队的编写更是有力地保证了该套丛书的权威性。

同步 教与学一体，知识与能力同步，将"怎么学"与"怎么教"放在一起同步设计，以方法为主线实施教学，使学生不仅能轻松地掌握基础知识，而且能尽快地提高综合应用能力。本套丛书以全新的视角向广大师生介绍这种符合教学规律的立体化学习方案。

联动 教与学联动，相互促进，涵盖全部知识点的教法学法设计，抓住重难点的讲练结合编排，使这个主体充满鲜活而翔实的内容。

实用 本套丛书注重基础，突出实用、好用，并充分照顾到不同层次、不同阶段的学生学习时的实际需要，在知识和能力的安排上循序渐进，难易有度。书中例题和习题的选取充分考虑最新命题趋势，既博采众长，又自成系统。各分册体例相对统一，但又根据模块特点和各年级教学实际有所不同，各具特色。

踏破铁鞋无觅处。但愿《考一本·课程基础导练》正是您苦苦寻觅中的教辅用书，并祈求它的上乘品质能带给您成功的好运。

本套丛书的编辑与出版，得益于教育界、出版界众多知名人士的热情帮助和大力支持，他们提出了诸多很好的建议，在此谨表衷心感谢。恳切希望广大师生和教育专家在这套丛书问世后，多提宝贵意见，以便我们进一步修订完善。

编　者

2010 年 7 月

目录

CONTENTS

目录
CONTENTS

第一章 导数及其应用

第1课时 变化率问题

发现问题

情景导思

在生产实践和科学实验中，常常需要研究函数相对于自变量的变化快慢程度. 例如，要预报人造地球卫星飞过各大城市的时间，就需要知道卫星的飞行速度；要研究轴和梁的弯曲变形问题，就必须会求曲线的切线斜率等等. 求速度和曲线的切线斜率问题，叫做求变化率问题，数学上称为求导数.

互动课堂

知识清单

知识点1:函数的平均变化率

对于函数 $y=f(x)$，x_1，x_2 是其定义域内不同的两点，那么函数的平均变化率可以用式子$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$来表示，习惯上用 $\Delta x=x_2-x_1$，这里 Δx 看作是对于 x_1 的一个"增量"，可用$x_1+\Delta x$代替 x_2，同样 $\Delta f=\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$，于是函数的平均变化率可以表示为$\frac{\Delta y}{\Delta x}$或$\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

知识点2:对平均变化率的理解

(1)本质:如果函数的自变量的"增量"为 Δx，且 $\Delta x=x_2-x_1$，相应的函数值的"增量"为 Δy，$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$，则函数 $y=f(x)$从 x_1 到 x_2 的平均变化率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

(2)几何意义:两点$(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$连线的斜率(割线的斜率)；

(3)平均变化率反映了函数在某个区间上平均变化的趋势(变化快慢)，或说在某个区间上曲线陡峭的程度.

知识点3:求平均变化率的步骤

(1)求函数值的增量 $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$；

(2)计算平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

学法指导

1. 求函数值的增量

【例1】设函数 $f(x)=x^2-1$，求：

(1)当自变量 x 由1变到1.1时，自变量的增量 Δx；

(2)当自变量 x 由1变到1.1时，函数值的增量 Δy.

【解析】(1)$\Delta x=x_2-x_1=0.1$；

(2)$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)=0.21$.

【点评】对自变量和函数值的"增量"的理解.

变式训练:将半径为 R 的球加热，若球的半径增加 ΔR，则球的体积增加 $\Delta V=$__________________.

2. 求函数的平均变化率

【例2】比较函数 $f(x)=2^x$ 与 $g(x)=3^x$，当 $x\in[1,2]$时，平均增长率的大小.

【解析】对于 $f(x)=2^x$，$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}=\frac{2^2-2^1}{2-1}=2$，

又对于 $g(x)=3^x$，$\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}=\frac{3^2-3^1}{2-1}=6$.

故当 $x\in[1,2]$时，$g(x)$的平均增长率大于 $f(x)$的平均增长率.

【点评】函数的平均变化率要紧扣函数平均变化率的定义，即$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

变式训练:(1)已知函数 $f(x)=-x^2+x$ 的图象上的一点 $A(-1,-2)$及邻近的一点 $B(-1+\Delta x,-2+\Delta y)$，则$\frac{\Delta y}{\Delta x}=$__________.

(2)求 $y=x^2$ 在 $x=x_0$ 附近的平均变化率.

3. 求非匀速直线运动的瞬时速度

【例3】 物体自由落体的运动方程是$s=s(t)=\frac{1}{2}gt^2$.其中位移单位是m,时间单位是s,$g=9.8\ m/s^2$,求物体在$t=3$ s这一时刻的速度.

【解析】 取一小段时间$[3,3+\Delta t]$,在这段时间Δt内,物体的位置改变量

$$\Delta s=\frac{1}{2}g(3+\Delta t)^2-\frac{1}{2}g\cdot 3^2=\frac{1}{2}g(6+\Delta t)\Delta t,$$

相应的平均速度$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{1}{2}g(6+\Delta t)$.

所以$t=3$ s这一时刻的速度为

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}g(6+\Delta t)=3g=29.4(\mathrm{m/s}).$$

【点评】 1. 求瞬时速度的步骤:

(1)求时间改变量Δt和位移改变量:

$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$;

(2)求平均速度:$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$;

(3)求瞬时速度:当Δt无限趋近于0,$\frac{\Delta s}{\Delta t}$无限趋近于一个常数,这个常数称为$t=t_0$时的瞬时速度,即$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=v_{瞬时}$.

2. 求瞬时加速度

(1)求时间改变量Δt和速度改变量:

$\Delta v=v(t_0+\Delta t)-v(t_0)$;

(2)求平均加速度:$\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}$;

(3)求瞬时加速度:当Δt无限趋近于0,$\frac{\Delta v}{\Delta t}$无限趋近于一个常数,这个常数称为$t=t_0$时的瞬时加速度,即$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}$.

注意:瞬时加速度是速度对于时间的瞬时变化率.

变式训练: 一球沿某一斜面自由滚下,测得滚下的垂直距离h(单位:m)与时间t(单位:s)之间的函数关系为$h=t^2$,求$t=4$ s时,此球在垂直方向的瞬时速度.

自主成长

夯实基础

1. 在函数的平均变化率的定义中,自变量的增量Δx满足 ( )

A. $\Delta x>0$　　B. $\Delta x<0$　　C. $\Delta x\neq 0$　　D. $\Delta x=0$

2. 物体的运动规律是$s=s(t)$,物体在t到$t+\Delta t$这段时间内的平均速度是 ( )

A. $\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$　　B. $\bar{v}=\frac{s(\Delta t)}{\Delta t}$

C. $\bar{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$　　D. $\bar{v}=\frac{s(t)}{t}$

3. 如果质点A按规律$s=3t^2$运动,则在$t=3$时的瞬时速度为 ( )

A. 6　　B. 18　　C. 54　　D. 81

4. 已知曲线$y=\frac{1}{x}-1$上两点$A(2,-\frac{1}{2})$,$B(2+\Delta x,-\frac{1}{2}+\Delta y)$,当$\Delta x=1$时,割线$AB$的斜率为________.

5. 物体自由落体的运动方程是$s(t)=\frac{1}{2}gt^2$,则1 s到2 s时的平均速度是________.($g=9.8\ m/s^2$)

6. 某质点的运动方程是$s=t-(2t-1)^2$,则在$t=1$ s时的瞬时速度为________.

7. 在曲线$y=2x^2-1$的图象上取一点$(1,1)$及邻近一点$(1+\Delta x,1+\Delta y)$,则$\frac{\Delta y}{\Delta x}=$________.

能力提升

8. 过曲线$y=f(x)=x^3$上的两点$P(1,1)$和$Q(1+\Delta x,1+\Delta y)$作曲线的割线,求当$\Delta x=0.1$时割线的斜率.

9. 求函数 $y=2\sin 2x+\tan x$ 从 0 到 $\frac{\pi}{3}$ 的平均变化率.

挑战自我

10. 求函数 $y=\sqrt{x^2+1}$ 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率和 x_0 处的瞬时变化率.

第2课时 导数的概念

发现问题

情景导思

导数是解决函数的最大值、最小值问题的有力工具. 导数的知识形成一门学科，就是我们通常所说的微积分. 微积分除了解决最大值、最小值问题，还能解决一些复杂曲线的切线问题. 那么我们如何求函数的导数呢？

互动课堂

知识清单

知识点1：函数在 $x=x_0$ 处导数的定义

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 附近有定义，当自变量在 $x=x_0$ 附近改变量为 Δx 时，函数值相应的改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果当 Δx 趋近于 0 时，平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 趋近于一个常数（也就是说平均变化率与某个常数的差的绝对值越来越小，可以小于任意小的正数），我们把这个常数叫做函数 $y=f(x)$ 在 $x\to x_0$ 处的导数，记作：$f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

说明：(1)导数即为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率；

(2) $\Delta x=x-x_0$，当 $\Delta x\to 0$ 时，$x\to x_0$，

所以 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

知识点2：求函数在 $x=x_0$ 处导数的步骤

(1)求函数改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

(2)求平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(3)取极限，得导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

知识点3：导数的物理意义

物体的运动方程 $s=f(t)$（也称位移公式，自变量 t 表示时间），则 $f'(t_0)$ 表示物体在时刻 $t=t_0$ 处的瞬时速度，即

$v_0=f'(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

学法指导

1. 利用定义求函数在 $x=x_0$ 处的导数

【例1】(1)求函数 $y=3x^2$ 在 $x=1$ 处的导数.

(2)求函数 $f(x)=-x^2+x$ 在 $x=-1$ 附近的平均变化率，并求出在该点处的导数.

【解析】(1)解法一：（定义法）

$\Delta f=\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=6\Delta x+(\Delta x)^2$，

$\therefore \frac{\Delta f}{\Delta x}=6+\Delta x$，

$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(6+\Delta x)=6$.

解法二：（利用 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$）

$$y'|_{x=1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3\cdot 1^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x^2-1^2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}3(x+1)=6.$$

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-(-1+\Delta x)^2+(-1+\Delta x)-2}{\Delta x}=3-\Delta x$，

$$f'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(-1+\Delta x)^2+(-1+\Delta x)+2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3-\Delta x)=3.$$

【点评】由定义求函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数的一般步骤是：

(1)求函数值的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

(2)求平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(3)取极限，得导数 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

在定义式中，设 $x=x_0+\Delta x$，则 $\Delta x=x-x_0$，当 Δx 趋近于 0 时，x 趋近于 x_0，因此，导数的定义式可写成 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

变式训练：求 $y=\sqrt{x}$ 在 $x=x_0$ 处的导数.

2. 利用导数概念表示极限

【例 2】 设 $f(0)=0$,证明:若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$,那么 $A=f'(0)$.

【解析】 $\because f(0)=0$,

$\therefore \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}$,

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$.

$\therefore A=f'(0)$.

【点评】 导数的常见形式还有:

$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$;

$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$.

变式训练: 已知 $f'(x_0)=A$,求$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$.

3. 导数的物理意义

【例 3】 在 F1 赛车中,赛车位移与比赛时间 t 存在函数关系式 $s=10t+5t^2$(s 的单位:m,t 的单位:s),求:

(1)$t=20$,$\Delta t=0.1$ 时的 Δs 与$\frac{\Delta s}{\Delta t}$;

(2)求 $t=20$ 时的瞬时速度.

【解析】 (1)$\Delta s=s(20+\Delta t)-s(20)$

$=10(20+0.1)+5(20+0.1)^2-10\times 20-5\times 20^2$

$=1+20+5\times 0.01=21.05(\text{m})$.

所以$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{21.05}{0.1}=210.5(\text{m/s})$.

(2)由导数的定义,在 $t=20$ 时的瞬时速度为

$s'(20)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{10(t+\Delta t)+5(t+\Delta t)^2-10t-5t^2}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta t^2+10t\Delta t+10\Delta t}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(\Delta t+10t+10)$

$=10\times 20+10=210(\text{m/s})$.

【点评】 平均速度和瞬时速度是两个完全不同的概念,平均速度是相对一段时间来说的,瞬时速度是相对某一时刻来说的,但是平均速度与瞬时速度又有着密切的联系,瞬时速度是在平均速度的时间接近于 0 时的值.

变式训练: 已知质点 M 按规律 $s=2t^2+3$ 做直线运动(位移单位:cm,时间单位:s).

求:(1)当 $t=2$,$\Delta t=0.01$ 时,求$\frac{\Delta s}{\Delta t}$;

(2)当 $t=2$,$\Delta t=0.001$ 时,求$\frac{\Delta s}{\Delta t}$;

(3)求质点 M 在 $t=2$ 时的瞬时速度.

自主成长

夯实基础

1. 一个沿直线运动的物体，从时间 t 到 $t+\Delta t$ 时，物体的位移为 Δs，那么 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 为 ( )

A. 从时间 t 到 $t+\Delta t$ 时，物体的瞬时速度

B. 在 t 时刻时，该物体的瞬时速度

C. 当时间为 Δt 时，物体的速度

D. 从时间 t 到 $t+\Delta t$ 时，物体的平均速度

2. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处导数可表示为 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$，即 ( )

A. $f'(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

B. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]$

C. $f'(x_0)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

D. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

3. 设函数 $y=f(x)$，当自变量 x 由 x_0 改变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数值的改变量是 ( )

A. $f(x_0+\Delta x)$　　B. $f(x_0)+\Delta x$

C. $f(x_0)\Delta x$　　D. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

4. 函数 $y=x^2$ 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率为 k_1，在 $x_0-\Delta x$ 到 x_0 之间的平均变化率为 k_2，则 ( )

A. $k_1>k_2$　　B. $k_1<k_2$

C. $k_1=k_2$　　D. k_1 与 k_2 的大小关系不确定

5. 函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 在 $x=1$ 处的导数是________.

6. 如果某物体做运动方程为 $s=2(1-t^2)$ 的直线运动（s 的单位：m，t 的单位：s），那么其在 1.2 s 末的瞬时速度为______.

7. 若 $f(x)=x^3$，$f'(x_0)=3$，则 x_0 的值是________.

能力提升

8. 求 $y=2x^2+4x$ 在 $x=3$ 处的导数.

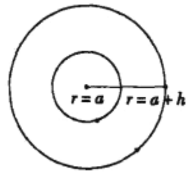
注释：书中带"*"的题为选做题.

挑战自我

9*. 投石入水，水面产生圆形波纹区. 圆的面积随着波纹的传播半径 r 的增大而增大（如图），计算：

(1)半径 r 从 a 增加到 $a+h$ 时，圆面积相对于 r 的平均变化率；

(2)半径 $r=a$ 时，圆面积相对于 r 的瞬时变化率.



第3课时 导数的几何意义

发现问题

情景导思

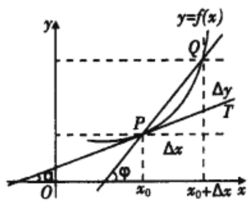
直线和圆有唯一公共点时，叫做直线和圆相切. 这时直线叫做圆的切线，唯一的公共点叫做切点. 能不能把圆的切线推广为一般曲线的切线呢？其他曲线的切线方程怎么求呢？

互动课堂

知识清单

知识点 1：曲线的切线

如图，设曲线 C 是函数 $y=f(x)$ 的图象，点 $P(x_0,y_0)$ 是曲线 C 上一点. 作割线 PQ，当点 Q 沿着曲线 C 无限地趋近于点 P，割线 PQ 无限地趋近于某一极限位置 PT，我们就把极限位置上的直线 PT，叫做曲线 C 在点 P 处的切线.



知识点 2：导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数等于在该点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=k.$$

说明：求曲线在某点处的切线方程的基本步骤：

(1)求出 P 点的坐标；

(2)求出函数在 $x=x_0$ 处的变化率：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=k,$$

得到曲线在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率；

(3)利用点斜式求切线方程 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

知识点 3：导函数(导数)的概念

如果 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点 x 都是可导的，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 可导. 这样，对开区间 (a,b) 内每个值 x，都对应一个确定的导数 $f'(x)$. 于是，在区间 (a,b) 内，$f'(x)$ 构成一个新的函数，我们把这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的导函数. 记为 $f'(x)$ 或 y'（或 y'_x），即 $f'(x)=y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

在不致发生混淆时，导函数也简称导数.

说明：函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$、导函数 $f'(x)$、导数之间的区别与联系：

(1)函数在一点处的导数 $f'(x_0)$，就是在该点的函数值的改变量与自变量的改变量之比的极限，它是一个常数，不是变数. 导数 $f'(x_0)$ 即为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率；

(2)函数的导数，是对某一区间内任意点 x 而言的，就是函数 $f(x)$ 的导函数；

(3)函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值，这也是求函数在 $x=x_0$ 处的导数的方法之一.

学法指导

1. 求函数的导函数

【例 1】 求 $y=4x+1$ 的导数(导函数).

【解析】 $\Delta y=4(x+\Delta x)+1-(4x+1)=4\Delta x$,

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{4\Delta x}{\Delta x}=4$,

$\therefore y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}4=4$.

$\therefore y'=4$.

【点评】 求 $y=f(x)$ 的导函数的步骤和求在 $x=x_0$ 处的导数相似，只是将 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 改为 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$. 再求极限得函数的导数 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

变式训练： 求函数 $y=9-x^2$ 的导数(导函数).

2. 利用导数求切线方程

【例 2】 (1)求曲线 $y=f(x)=x^2+1$ 在点 $P(1,2)$ 处的切线方程；

(2)求函数 $y=3x^2$ 在点 $(1,3)$ 处的切线方程.

【解析】 (1)解法一：$y'|_{x=1}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[(1+\Delta x)^2+1]-(1^2+1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=2$.

$\therefore$ 所求切线的斜率为 2，

$\therefore$ 所求的切线方程为 $y-2=2(x-1)$，即 $2x-y=0$.

解法二：先求函数的导函数：

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[(x+\Delta x)^2+1]-(x^2+1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=2x$,

$\therefore f'(x)|_{x=1}=2$.

故所求切线方程为 $2x-y=0$.

(2)$\because y'|_{x=1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-3\cdot1^2}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3(x^2-1^2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}3(x+1)=6.$

$\therefore$所求切线的斜率为 6,

因此,所求的切线方程为 $y-3=6(x-1)$,即 $6x-y-3=0$.

【点评】利用导数求曲线上一点的切线方程有如下两种思路:

思路一:利用导数的几何意义求曲线在此点处的切线方程,步骤为:

(1)求出函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$;

(2)求得切线方程 $y-f(x_0)=f'(x)(x-x_0)$.

注意:点$(x_0,f(x_0))$必须是曲线上的点.

思路二:先求函数的导函数,利用导函数求对应点处切线的斜率,然后由直线的点斜式写出其切线方程.

变式训练:求抛物线 $y=x^2$过点$(\dfrac{5}{2},6)$的切线方程.

3. 求切点坐标

【例 3】在曲线 $y=2x^2$ 上找一点 M,使过 M 的切线与直线 $y=4x-1$ 平行.

【解析】设所求点为 $M(x_0,2x_0^2)$,过这点的切线的斜率是这点的导数 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2(x_0+\Delta x)^2-2x_0^2}{\Delta x}=4x_0$.

而直线 $y=4x-1$ 的斜率为 4,

$\therefore 4x_0=4$,即 $x_0=1$,

$\therefore M(1,2)$.

【点评】在曲线 $y=f(x)$上求满足条件的切点 $M(x_0,f(x_0))$时,应从切点满足 $y_0=f(x_0)$和 $k=f'(x_0)$(k 存在时)两个方面考虑,即联立方程$\begin{cases}y_0=f(x_0),\\k=f'(x_0)\end{cases}$求解.

变式训练:在曲线 $y=x^2$ 上过哪一点的切线,

(1)平行于直线 $y=4x-5$?

(2)垂直于直线 $2x-6y+5=0$?

自主成长

夯实基础

1. 函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是 ( )

A. 在 $x=x_0$ 处的函数值

B. 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与 x 轴所夹锐角的正切值

C. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率

D. 点 $(x_0, f(x_0))$ 与点 $(0,0)$ 连线的斜率

2. 抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 在点 $Q(2,1)$ 处的切线方程为 ( )

A. $-x+y+1=0$　　B. $x+y-3=0$

C. $x-y+1=0$　　D. $x+y-1=0$

3. 已知曲线 $y=\frac{1}{2}x^2-2$ 上一点 $P(1,-\frac{3}{2})$，过点 P 的切线的倾斜角为 ( )

A. 30°　　B. 45°　　C. 135°　　D. 165°

4. 已知曲线 $y=\frac{1}{x}-1$ 上两点 $A(2,-\frac{1}{2})$，$B(2+\Delta x,-\frac{1}{2}+\Delta y)$，当 $\Delta x=1$ 时，割线 AB 的斜率为________.

5. 函数 $y=(x-1)^2$ 的导数是__________.

6. 曲线 $y=x^2+1$ 在点 $P(1,2)$ 处的切线的斜率 $k=$________.

7. 若曲线 $y=2x^3$ 上某点处切线的斜率等于 6，则此点的坐标为________.

能力提升

8. 已知曲线 $y=\frac{1}{3}x^3$ 上一点 $P(2,\frac{8}{3})$，求点 P 处的切线的斜率，并写出切线方程.

挑战自我

9. 抛物线 $y=2x^2+1$ 在哪一点的切线平行于直线 $y=4x-2$？在哪一点的切线垂直于直线 $x+8y-3=0$？

第4课时 几个常用函数和基本初等函数的导数

发现问题

情景导思

我们知道,导数的几何意义是曲线在某一点处的切线的斜率,物理意义是运动物体在某一时刻的瞬时速度.那么,对于函数 $y=f(x)$,如何求它的导数呢?

由导数定义本身,给出了求导数的最基本的方法,但由于导数是用极限来定义的,所以求导数总是归结到求极限,这在运算上很麻烦,有时甚至很困难,我们怎么能够较快地求出某些函数的导数呢?

互动课堂

知识清单

知识点1:几个常用函数的导数

(1)函数 $y=f(x)=c$ 的导数为0,表示函数 $y=c$ 图象上每一点处的切线的斜率都为0;

(2)函数 $y=f(x)=x$ 的导数为1,表示函数 $y=x$ 图象上每一点处的切线的斜率都为1;

(3)函数 $y=f(x)=x^2$ 的导数为 $2x$,表示函数 $y=x^2$ 图象上点 (x,y) 处的切线的斜率都为 $2x$;

(4)函数 $y=f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数为 $-\frac{1}{x^2}$;

(5)函数 $y=f(x)=\sqrt{x}$ 的导数为 $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

知识点2:基本初等函数的导数公式

(1) $(c)'=0$ (c 为常数);

(2) $(x^n)'=nx^{n-1}(n\in\mathbf{Q}^*)$;

(3) $(\sin x)'=\cos x$;

(4) $(\cos x)'=-\sin x$;

(5) $(a^x)'=a^x\ln a(a>0$,且 $a\neq1)$;

(6) $(e^x)'=e^x$;

(7) $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}(a>0$,且 $a\neq1)$;

(8) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

学法指导

1.利用导数公式求常用函数的导数

【例1】 求:(1) $(x^3)'$;(2) $\left(\frac{1}{x^2}\right)'$;(3) $(\sqrt{x})'$;(4) $y=4^x$;(5) $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

【解析】 (1) $(x^3)'=3x^2$;

(2) $\left(\frac{1}{x^2}\right)'=(x^{-2})'=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}$;

(3) $(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

(4) $(4^x)'=4^x\ln 4$;

(5) $\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]'=(\cos x)'=-\sin x$.

【点评】 从上面这一组公式来看,我们只要掌握幂函数、指数函数、对数函数、正余弦函数的求导就可以了.

变式训练: 求下列函数的导数:

(1) $y=x^9$; (2) $y=3^x$

(3) $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$; (4) $y=\cos(2\pi-x)$.

2.利用导数公式求瞬时变化率

【例2】 假设某国家在20年期间的年均通货膨胀率为5%,物价 p(单位:元)与时间 t(单位:年)有如下函数关系 $p(t)=p_0(1+5\%)^t$,其中 p_0 为 $t=0$ 时的物价.假定某种商品的 $p_0=1$,那么在第10个年头,这种商品的价格上涨的速度大约是多少(精确到0.01)?

【解析】 $\because p'(t)=1.05^t\ln 1.05$,

$\therefore p'(10)=1.05^{10}\ln 1.05\approx0.08$(元/年).

因此,在第10个年头,这种商品的价格上涨的速度约为0.08元/年.

【点评】 求某一时刻的价格上涨速度相当于求瞬时变化率,即那一时刻的导数值.

变式训练: 某市在一次降雨过程中,降雨量 y(mm)与时间 t(min)的函数关系可近似地表示为 $y=f(t)=\sqrt{t}$,则在时刻 $t=40$ min的降雨强度为 ( )

A. 40 mm B. $40\sqrt{10}$ mm

C. $\frac{1}{40}$ mm/min D. $\frac{\sqrt{10}}{40}$ mm/min