【普通高等院校基础类规划教材】

高等数学

GAODENG SHUXUE（下册）

西南科技大学城市学院
数学教研组组织编写

主编／唐定云

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

普通高等院校基础类规划教材

高等数学

（下册）

西南科技大学城市学院数学教研组组织编写

主编 唐定云

编者 郑金梅 何泳川

文华艳 吴明科

西南交通大学出版社

·成 都·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下册 / 唐定云主编. —成都：西南交通大学出版社, 2011.2

普通高等院校基础类规划教材

ISBN 978-7-5643-1050-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①唐… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 013430 号

普通高等院校基础类规划教材

高等数学

（下册）

主编　唐定云

责任编辑	张宝华
封面设计	墨创文化
出版发行	西南交通大学出版社 （成都二环路北一段 111 号）
发行部电话	028-87600564　028-87600533
邮政编码	610031
网　　址	http://press.swjtu.edu.cn
印　　刷	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸	170 mm×230 mm
印　　张	10.875
字　　数	195 千字
版　　次	2011 年 2 月第 1 版
印　　次	2011 年 2 月第 1 次
书　　号	ISBN 978-7-5643-1050-9
定　　价	19.50 元

前　言

本教材是根据三本工科院校的教学要求，并在三年教学实践的基础上编写而成的. 教材在编写上突出了数学知识的系统性、简洁性，同时注重了概念产生的背景，强调了培养应用数学的意识.

“高等数学”的主体内容是微积分，而微积分是古典数学的经典内容，它对于培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力有着重要的意义. 通过微积分知识的建构，学生还能进一步体会问题解决的数学过程，培养解决高层次问题的能力.

全书分上、下两册，其中上册包括一元函数微积分、空间解析几何与向量代数，下册包括多元函数微积分、级数、微分方程.

参加本教材各章编写工作的是西南科技大学城市学院高等数学教研室，其中唐定云编写了第一章、第十章；郑金梅编写了第二章、第十一章；何泳川编写了第三章、第十二章；文华艳编写了第四章、第五章、第九章；吴明科编写了第六章、第七章、第八章. 唐定云副教授对全书进行了主审.

限于编者水平，以及当前社会对工科学生提出的不同要求，教材在内容的取舍上还存在不妥之处，希望读者提出批评和指正.

编　者

2010.9

目　录

第八章　多元函数的微分

在实际问题中经常涉及多个变量之间的关系，即一个变量依赖于多个变量的多元函数，如圆锥体积 V 就是依赖于两个变量的二元函数：$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$；其中 r 为底面半径，h 为高.

本章将研究多元（主要是二元）函数的微分学，它是一元函数微分学的自然推广.

第一节　多元函数的概念

一、平面上的点集

研究一元函数需要讨论直线上的点集（如开区间、闭区间等），即一维空间 $\boldsymbol{R}$ 的子集，同样研究二元函数需要讨论平面上的点集，即二维空间 R^2 的子集.

定义 1　称 $R^2=\{(x,y)\mid x\in\boldsymbol{R},y\in\boldsymbol{R}\}$ 为二维空间，它的子集称为平面点集.

定义 2　设 $P_0(x_0,y_0)$ 为 xOy 平面内一点，集合

$$\{P\mid |P_0P|<\delta\}=\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

称为 P_0 的 δ 邻域，记作 $U(P_0,\delta)$，也可简记为 $U(P_0)$. 集合

$$\{P\mid 0<|P_0P|<\delta\}=\{(x,y)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

称为 P_0 的去心邻域，记作 $U^{\circ}(P_0,\delta)$.

定义 3　设平面点集 E，$P\in R^2$，若存在一个邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\subseteq E$，则称点 P 为 E 的内点；若存在一个邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\cap E=\varnothing$，则称点 P 为 E 的外点；若 $P\in R^2$ 且点 P 既不是内点也不是外点，则称点 P 为 E 的边界点.

显然，E 的内点一定属于 E，E 的外点一定不属于 E，而 E 的边界点则不能确定.

定义 4 若平面点集 E 的每个点都是内点，则称 E 为开集；若 E 的所有边界点都属于 E，则称 E 为闭集.

例如，点集 $\{(x,y)|\ 1<x^2+y^2<4\}$ 是开集，点集 $\{(x,y)|\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是闭集，而点集 $\{(x,y)|\ 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$ 既不是开集也不是闭集.

定义 5 若平面点集 E 内任意两点，总可以找到一条完全属于 E 的折线连接起来，则称 E 为连通集.

定义 6 设 E 为非空平面点集，若 E 是连通的开集，则称 E 为开区域. 开区域 E 和它的边界组成的集合称为闭区域.

定义 7 设 E 为平面点集，若存在 $\rho>0$，使得

$$\sqrt{x^2+y^2}<\rho \qquad (\ \forall (x,y)\in E\ )$$

成立，则称 E 为有界集；否则称 E 为无界集.

例如，$\{(x,y)|\ 1<x^2+y^2<4\}$ 是有界集，$\{(x,y)|\ x^2+y^2>1\}$ 是无界集，如图 8.1, 8.2 所示.

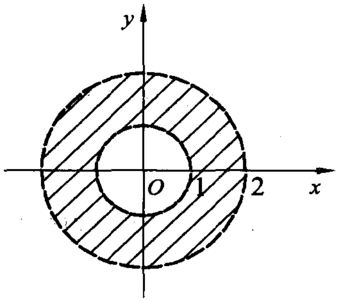

图 8.1

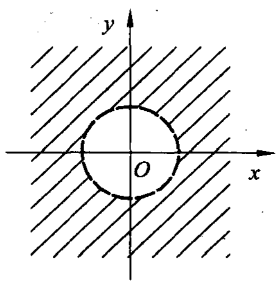

图 8.2

上面的几个概念可以推广到三维，甚至 n 维.

二、二元函数

1. 二元函数的概念

一元函数 $y=f(x)$ 中，y 仅依赖于一个变量 x，而多元函数则不是. 在 $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ 中，我们将 r 和 h 视为两个自变量，而 r 和 h 的取值可以看做平面

上的点(r,h)，因此该函数实际上是点(r,h)与变量V取值的对应关系，这样就可以得出一般的二元函数的定义.

定义 8　在一个变化过程中，有三个变量x,y,z，且变量z随x,y的变化而变化. 设变量x,y所表示的点$P(x,y)$的变化范围为平面点集D，若对任意一点$P(x,y)\in D$，在对应关系f下，z都有唯一的取值与之对应，则称z为x,y的二元函数，记作

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D$$

或

$$z=f(P),\quad P\in D$$

其中D称为定义域，$\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$称为值域，$x,y$称为自变量，$z$称为因变量.

若二元函数由解析式$z=f(x,y)$给出，则其定义域是使$f(x,y)$有意义的自变量所确定的平面点集.

例如，函数$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的定义域为$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，值域是$[0,1]$. $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$的定义域为$\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$，值域是$[1,+\infty)$.

2. 二元函数的图像

设二元函数$z=f(x,y)$的定义域为D，则空间点集

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为二元函数的图像.在空间直角坐标系下，二元函数$z=f(x,y)$的图像通常是一张曲面，定义域是曲面在xOy面上的投影区域. 例如，$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的图像为以$(0,0,0)$为中心，1 为半径的上半球面（见图 8.3）.

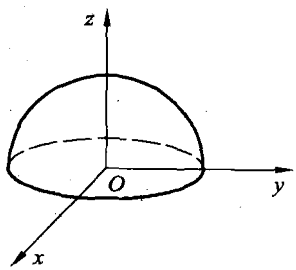

图 8.3

第二节　二元函数的极限与连续性

一、二元函数的极限

二元函数$z=f(x,y)$的极限有多种类型，本节仅研究当$x\to x_0,y\to y_0$时，

$z=f(x,y)\to A$（某个常数）这种类型的极限．显然，$x\to x_0,y\to y_0$ 可以用 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 表示，并且

$$P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)\Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$$

因此类似于一元函数极限的定义有：

定义 1 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的去心邻域内有定义，A 为常数．若对 $\forall\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使得当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，则称 A 为当 $x\to x_0,y\to y_0$ 时函数 $f(x,y)$ 的极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \quad 或 \quad f(x,y)\to A \quad ((x,y)\to(x_0,y_0))$$

也记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \quad 或 \quad f(P)\to A \quad (P\to P_0)$$

注意：二元函数极限中 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 是点 (x,y) 沿着任意方向趋近于 (x_0,y_0)，这与一元函数极限有着本质的区别．

二元函数极限的性质与一元函数极限的性质类似，如有界性、保号性以及四则运算法则等，在此不再叙述．

通常求一元函数极限的方法同样适用于求二元函数的极限，例如替换定理、夹逼准则、换元法等都是比较常用的方法．

例 1 求极限：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$．

解
$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{xy}y$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{xy}\lim_{(x,y)\to(0,2)}y=1\times 2=2.$$

例 2 求极限：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$．

解
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{xy+1}+1)=2.$$

例 3　求极限：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解　令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{r\to0^+}\frac{r\cos\theta r\sin\theta}{r}=0$$

例 4　极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 是否存在？

解　不存在．因为当点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+(kx)^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

显然它随着 k 值的不同而改变，由极限的定义可知该极限不存在．

二、二元函数的连续性

定义 2　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域内有定义，若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续．如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内点点连续，则称该函数在 D 内连续．

通常连续的二元函数的图像是一张连绵不断的曲面．

与一元连续函数类似，二元函数也有下面的定理：

定理 1　若二元函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭域 D 上连续，则

（1）存在正数 K，使得

$$|f(x,y)|\leqslant K,\quad (x,y)\in D$$

（2）在 D 上一定存在最值．

（3）对于任意介于最小值 m 与最大值 M 的数 μ，存在点 $P_0(x_0,y_0)$，使得

$$f(x_0,y_0)=\mu$$

定理 2　二元初等函数在其定义域内部每一点都是连续的．

例 5　求极限：$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 由于点(1,0)是初等函数$\dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$定义域的内点，所以该函数在点(1,0)连续，因此有

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln(1+\mathrm{e}^0)}{\sqrt{1^2+0^2}}=\ln 2$$

一般地，求$\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$时，如果$f(P)$是初等函数，且$P_0$是$f(P)$的定义域的内点，则$f(P)$在点$P_0$处连续，于是

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)$$

习题 8-2

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin xy}{x}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$；

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$；

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$；

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$.

2. 证明极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$不存在.

第三节 偏导数

我们已经知道，函数$y=f(x)$的导数$f'(x)$表示变化率. 对于二元函数$z=f(x,y)$来讲，若将变量y固定为y_0，也可以研究z对x的变化率. 而求出这个变化率只需在一元函数$z=f(x,y_0)$中对x求导即可，所得到的导数就是二元函数$f(x,y)$对x的偏导数.

一、偏导数

1. 偏导数的概念

定义 1　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内有定义，(x_0,y_0) 是 D 的内点．将变量 y 固定在 y_0，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 对 x 的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\quad 或\quad z_x\big|_{(x_0,y_0)},\ f_x(x_0,y_0),\ f_1'(x_0,y_0)$$

类似地，$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 对 y 的偏导数为

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内每一点都有偏导数，则称 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 为 $f(x,y)$ 在 D 内的偏导函数，简称偏导数．

2. 偏导数的计算

二元函数的偏导数的实质就是将其中一个变量固定后，因变量对另一个变量的导数．因此在计算偏导数时，要将某一变量视为常数，然后按照一元函数的求导法则对另一变量求导．

例 1　求 $z=x^2+y^2-xy$ 在点（1,3）处的偏导数．

解　求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 时，把 y 看做常量；求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 时，把 x 看做常量，因此

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y-x$$

故

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=3}}=2\times1-3=-1,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=3}}=2\times3-1=5$$

例 2　求 $z=\sqrt{\ln(xy)}$ 的偏导数．

解　$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\frac{1}{xy}\cdot y=\frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}.$$

例 3 设 $z=x^y(x>0,x\neq 1)$，求证：$\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$.

证明 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$$

所以

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}yx^{y-1}+\frac{1}{\ln x}x^y\ln x=x^y+x^y=2z$$

例 4 求函数

$$z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 的偏导数.

解 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}0=0$$

此例表明：分段函数在分界点的偏导数通常要用定义来求. 此外，由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在，所以该函数在该点不连续，由此可以看出偏导数存在未必能保证函数连续.

3. 偏导数的几何意义

显然，偏导数的几何意义与一元函数的导数的几何意义相似. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 对 x 的偏导数为 $f_x(x_0,y_0)$，则曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $y=y_0$ 的交线在点 $M(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线，对于 x 轴的斜率等于偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，即有

$$f_x(x_0,y_0)=\tan\alpha$$

其中 α 为该切线与 x 轴所形成的倾斜角，如图 8.4 所示.

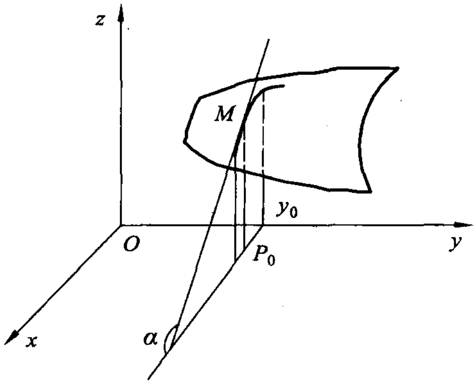

图 8.4

二、高阶偏导数

定义 2 设 $f(x,y)$ 在区域 D 内存在偏导数 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$，则它们也是关于 x,y 的二元函数.如果这两个偏导数还可以求出偏导数，则称它们的偏导数为二元函数 $f(x,y)$ 的二阶偏导数，记作

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$$

其中 $f_{xy}(x,y)$，$f_{yx}(x,y)$ 称为二阶混合偏导数.

类似地，还可以定义更高阶的偏导数，并且引入的记号也相似.

例 5 求 $z=x^3y-3x^2y^3$ 的二阶偏导数.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-6xy^3$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-9x^2y^2$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy-6y^3,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-18x^2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3x^2-18xy^2=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

例 6 证明：函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

证明 因为 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0$$

形如例 6 中的方程叫拉普拉斯方程（Laplace），是数学和物理中重要的方程.

习题 8-3

1. 求下列函数的偏导数.

（1）$z=x^3y-y^3x$；（2）$z=\sin(xy)+\cos(x^2y)$；

（3）$z=e^{xy}(x+y)$；（4）$z=\arctan\dfrac{y}{x}$；

（5）$z=(1+xy)^y$；（6）$u=\arctan(x-y)^z$.

2. 求曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y=4 \end{cases}$，在点（2, 4, 5）处的切线与正向 x 轴所成的倾角.

3. 设 $z=x\ln(xy)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

第四节 全微分

下面将一元函数微分的概念推广到二元函数中来.

一、全微分的定义

定义 1 设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的邻域内有定义，变量 x 和变量 y 的增量分别为 Δx 和 Δy，则称

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量.

定义 2 设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的邻域内有定义，若存在常数 A 和 B，使得函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，常数 A, B 只与 x_0，y_0 有关，则称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全微分，记作

$$\mathrm{d}z\big|_{(x_0,y_0)} = A\Delta x + B\Delta y \quad 或 \quad \mathrm{d}f(x_0,y_0) = A\Delta x + B\Delta y$$

这时称函数在点 (x_0,y_0) 可微.

习惯上，自变量的增量 Δx 与 Δy 常写成 $\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}y$，所以全微分又通常记作

$$\mathrm{d}z\big|_{(x_0,y_0)} = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y$$

函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分通常记为

$$\mathrm{d}z = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y$$

若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内点点可微，则称 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微.

二、函数可微的条件

定理 1 （可微的必要条件）若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，则

（1） $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续；

（2） $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的偏导数存在，且 $A=f_x(x_0,y_0)$，$B=f_y(x_0,y_0)$.

证明 （1） 由条件有

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$