免费提供
电子教案

高等院校规划教材
计算机科学与技术系列

图论及其算法

李明哲　金　俊　石端银　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等院校规划教材·计算机科学与技术系列

图论及其算法

李明哲 金 俊 石端银 编著

盖功琪 审

机械工业出版社

本书为图论的入门教材，介绍了图论的基本概念、基本定理和算法，共分 9 章。主要内容包括图的基本概念、树、距离与连通性、图的遍历问题、图的匹配与独立集、图的染色、平面图、网络流、图参数 $A(H)$ 值等。本书将有向图和无向图融为一个整体，不仅介绍了图论的基本原理，而且介绍了如何应用图论方法解决实际问题，还强调了图论算法，配有适当的例题和习题，并在书后附有部分习题的参考答案。本书概念清楚，立论严谨，所有的证明和算法简洁明了，通俗易懂。

本书可作为高等院校计算机、数学、信息、电子、管理等专业的教材，还可作为相关专业人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

图论及其算法/李明哲，金俊，石端银编著．—北京：机械工业出版社，2010.10

（高等院校规划教材·计算机科学与技术系列）

ISBN 978-7-111-31719-7

Ⅰ.①图…　Ⅱ.①李…　②金…　③石...　Ⅲ.①图论—高等学校—教材　②图论算法—高等学校—教材　Ⅳ.①O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 169942 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

责任编辑：唐德凯　李　宁

责任印制：杨　曦

北京鑫海金澳胶印有限公司印刷

2010 年 10 月第 1 版·第 1 次印刷

184mm×260mm·15.75 印张·388 千字

0001-3000 册

标准书号：ISBN 978-7-111-31719-7

定价：30.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

社服务中心：(010)88361066

销 售 一 部：(010)68326294

销 售 二 部：(010)88379649

读者服务部：(010)68993821

网络服务

门户网：http://www.cmpbook.com

教材网：http://www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版

出版说明

计算机技术的发展极大地促进了现代科学技术的发展，明显地加快了社会发展的进程。因此，各国都非常重视计算机教育。

近年来，随着我国信息化建设的全面推进和高等教育的蓬勃发展，高等院校的计算机教育模式也在不断改革，计算机学科的课程体系和教学内容趋于更加科学和合理，计算机教材建设逐渐成熟。在“十五”期间，机械工业出版社组织出版了大量计算机教材，包括“21 世纪高等院校计算机教材系列”、“21 世纪重点大学规划教材”、“高等院校计算机科学与技术‘十五’规划教材”、“21 世纪高等院校应用型规划教材”等，均取得了可喜成果，其中多个品种的教材被评为国家级、省部级的精品教材。

为了进一步满足计算机教育的需求，机械工业出版社策划开发了“高等院校规划教材”。这套教材是在总结我社以往计算机教材出版经验的基础上策划的，同时借鉴了其他出版社同类教材的优点，对我社已有的计算机教材资源进行整合，旨在大幅提高教材质量。我们邀请多所高校的计算机专家、教师及教务部门针对此次计算机教材建设进行了充分的研讨，达成了许多共识，并由此形成了“高等院校规划教材”的体系架构与编写原则，以保证本套教材与各高等院校的办学层次、学科设置和人才培养模式等相匹配，满足其计算机教学的需要。

本套教材包括计算机科学与技术、软件工程、网络工程、信息管理与信息系统、计算机应用技术，以及计算机基础教育等系列。其中，计算机科学与技术系列、软件工程系列、网络工程系列和信息管理与信息系统系列是针对高校相应专业方向的课程设置而组织编写的，体系完整，讲解透彻；计算机应用技术系列是针对计算机应用类课程而组织编写的，着重培养学生利用计算机技术解决实际问题的能力；计算机基础教育系列是为大学公共基础课层面的计算机基础教学而设计的，采用通俗易懂的方法讲解计算机的基础理论、常用技术及应用。

本套教材的内容源自致力于教学与科研一线的骨干教师与资深专家的实践经验和研究成果，融合了先进的教学理念，涵盖了计算机领域的核心理论和最新的应用技术，真正在教材体系、内容和方法上做到了创新。同时，本套教材根据实际需要配有电子教案、实验指导或多媒体光盘等教学资源，实现了教材的“立体化”建设。本套教材将随着计算机技术的进步和计算机应用领域的扩展而及时改版，并及时吸纳新兴课程和特色课程的教材。我们将努力把这套教材打造成为精品教材，为高等院校的计算机教育提供更好的服务。

对于本套教材的组织出版工作，希望计算机教育界的专家和老师能提出宝贵的意见和建议。衷心感谢计算机教育工作者和广大读者的支持与帮助！

机械工业出版社

前　　言

图论是研究离散对象二元关系中关系结构的一个数学分支，与群论、矩阵论、概率论、拓扑学、数值分析等其他数学分支有着密切的联系，其广阔的应用领域涵盖了计算机科学、化学、物理学、运筹学、信息论、控制论、经济学、心理学、环境保护领域等。同时，随着这些学科的发展，特别是计算机科学的快速发展，又促进了图论的发展。

图论是一门极有趣味的学科，它最吸引人的地方是蕴含了丰富不俗的思想、漂亮的图形和巧妙的证明，它涉及的问题广泛，问题外表虽简单朴素，本质上却十分复杂深刻；其解决问题的方法千变万化，灵活多样。因此，各专业的学生都应该具有一定的图论基础，从而掌握一种强大而灵活的工具来分析和处理自己学科领域的问题。目前，图论已经成为计算机科学、数学、运筹学、组合优化、机电等学科的基本课程之一。

本书介绍了图论的基本概念、基本定理和算法，共分 9 章。主要内容包括图的基本概念、树、距离与连通性、图的遍历问题、图的匹配与独立集、图的染色、平面图、网络流和图参数 $A(H)$值等。本书将有向图和无向图融为一个整体，不仅介绍了图论的基本原理，也介绍了如何应用图论方法解决实际问题，还强调了图论算法，配有适当的例题和习题，并在书后附有部分习题的参考答案。

本书吸取了国内外许多优秀图论著作的精华，结合了编者多年的教学经验和本科生的特点，内容力求精炼，所有的证明和算法简洁明了，通俗易懂，易于学生学习和教师的教学。

由于图论不强调数值计算而强调证明技巧和解释的清晰，所以许多问题都有多个证明，编者对这些证明精心选择，深入浅出地介绍了图论的证明技巧。

图论和计算机科学之间有着千丝万缕的联系。由于算法的研究是计算机科学的核心，所以算法在现代图论中占有举足轻重的地位。本书介绍了图论算法及其应用，计算机专业在教学中还可以引导学生编写程序，上机实践。

由于图论是一门新兴的学科，所以国内外许多图论书籍出现了多个版本的术语和符号。本书在介绍图论的基本概念、术语和结论时，选择了最为通俗易懂的语言加以描述，符号力求清晰、简洁、通用。在主题的挑选、顺序的安排和题目的选择上，遵循认知规律和由浅入深的原则，使读者能轻松愉快地进入图论的系统学习和研究。在内容的编排上，各章之间既相互联系又自成体系，便于读者学习和查阅，同时体现了教材的系统性和科学性。

全书共分 9 章，第 1、2、9 章由哈尔滨学院理学院李明哲编写，第 3、4、7 章由牡丹江师范学院数学系金俊编写，第 5、6、8 章由黑龙江科技学院理学院石端银编写，全书由李明哲主持编写并负责统稿。哈尔滨学院盖功琪仔细审阅了本书，并提出了许多宝贵意见。

在本书的编写过程中得到了哈尔滨学院软件学院院长贾宗福教授的热诚帮助和指导，本书作为黑龙江省高教学会高等教育科学研究“十一五”规划课题（项目编号：115C-901）的研究成果，在编写过程中得到了校科研处的帮助和指导，在此表示衷心的感谢。

由于水平有限，书中不妥之处在所难免，殷切希望广大读者批评指正。

编　者

目　录

第1章　图的基本概念

1.1　图论发展简史

1．哥尼斯堡七桥问题

1736 年，欧拉（Euler）解决了一个著名的数学难题——哥尼斯堡七桥问题，成为图论和拓扑学的创始人。哥尼斯堡位于前苏联的加里宁格勒，它在 Euler 的生活以及图论的历史中扮演着非常重要的角色。普雷格尔河流经哥尼斯堡，把哥尼斯堡分成 4 个城区，于是人们在河上架设 7 座桥以方便在这些城区之间穿行。图 1-1a 是哥尼斯堡的一个地图，图中以 A，B，C，D 标出了 4 个城区，以及当时 7 座桥的位置。

哥尼斯堡中的居民提出一个问题：能否从一点出发，走遍 7 座桥，且通过每座桥恰好一次，最后仍回到起始地点。这就是著名的哥尼斯堡七桥问题。这个问题在一段时间内没有得到解决，并成了家喻户晓的一个疑难问题。后来，这个问题吸引了 Euler 的注意力（后人认为他当时在圣彼得堡）。Euler 注意到，哥尼斯堡七桥问题可以用图 1-1b 所示的图 G（事实上是多重图）来表述，其中 G 的顶点 A,B,C,D 分别表示 4 块陆地，两块陆地之间的桥用对应顶点之间的边表示。于是问题转化为：在图 G 中是否存在经过图 G 的每一条边一次且仅一次的闭迹问题。Euler 通过研究，对上述问题给出了否定的回答，并给出对给定的图可以如此走遍的判断法则，即一笔画问题。

此后，Euler 发表了著名的论文《依据几何位置的解题方法》，这是图论领域的第一篇论文，标志着图论的诞生。

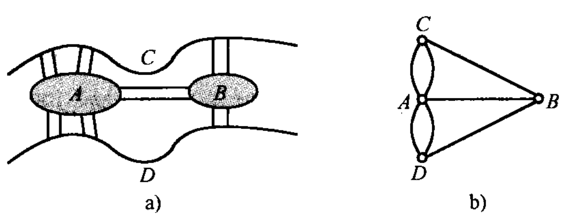

图 1-1　哥尼斯堡七桥问题图

2．基尔霍夫电网络

1847 年，基尔霍夫运用图论解决了电网络问题，引进“树”的概念，发展了树的理论。为了解一类线性联立方程组，这个线性方程组是描述一个电网络的每一条支路中和环绕每一个回路的电流，他把一个电网络和其中的电阻、电容、电感等抽象化，用一个只由点和线组成的相应的组合结构来代替原来的电网络而并不指明每条线所代表的电器元件的种类。这样一来，基尔霍夫实际上是把每个电网络用它的基本图来代替。他还证明，为了解这个方程组，并不需要分别考虑一个电网络图中的每个圈。与此相反，他用一个简单而有力的构造法指出，只要考虑一个图的任何一棵生成树所决定的那些独立圈就够了。他的这个方法现在

已成为一个标准的方法。图 1-2 中画出了一个设计好了的电网络。

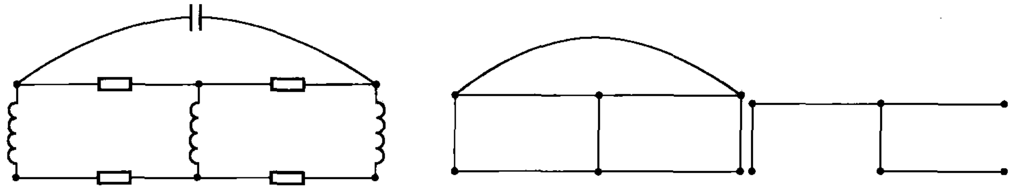

图 1-2　电网络的基本图 G 及其一棵生成树 T

a) 电网络的基本图 G　b) 电网络的一棵生成树 T

3．四色问题

在图论中，也是在数学中有一个著名的至今没有解决的问题就是所谓的“四色猜想”。1852 年，一个叫 Francis Guthrie 的伦敦学生提出了四色问题：在地图或地球仪上，能否最多用 4 种颜色即可把各国的版图染好，使得国界线两侧异色？虽然“四色猜想”是一个至今仍没有得到理论证明的数学难题，但是在 100 年来试图证明“四色猜想”的历史长河中发展了图论的许多方面。

4．化学同分异构物

1857 年，凯莱（Cayley）在有机化学领域里发现了一族重要的图，称为树。他用树从事对给定的碳原子数 n 的饱和碳氢化合物 C_nH_{2n+2} 的同分异构物的计数工作。当然，凯莱抽象地重新叙述了这个问题：求有 p 个点的树的数目，其中每个点的度等于 1 或 4。他没有能够立即成功地解决这个问题，所以他改换了这个问题，对有根树、树、每个点的度至多等于 4 的树进行逐步计数。最后，他还是数出了每个点的度等于 1 或 4 的树，从而解决了化学问题。1869 年，约当（Jotdan）作为一位数学家独立地发现了树。

5．哈密尔顿周游世界问题

Hamilton 问题是图论中一直悬而未解的一个大问题。它起源于 1857 年，当时著名英国数学家哈密尔顿（William Rowan Hamilton，1805—1865）设计了一种名为周游世界的游戏。他在一个实心的正十二面体的 20 个顶点上标有世界上著名的 20 座城市的名字，要求游戏者沿十二面体的棱从一个城市出发，经过每座城市恰好一次，最后返回到原出发点，即所谓的“绕行世界”。哈密尔顿以 25 个金币的代价把他的设计卖给了一个玩具商，但这个游戏在经济上并不成功。

正十二面体的顶点和棱的关系可以用平面上的图来表示：把正十二面体的顶点与棱分别对应图的顶点与边，就得到图 1-3 中的正十二面体图。

上述游戏中所提到的问题相当于在图 1-3 中寻找一个回路，要求通过图中每一个顶点。其实图 1-3 中按自然顺序用数字标示的顶点就是这样的一个回路。当然这种回路并非唯一。

6．20 世纪的图论

1936 年，心理学家莱温（Lewin）提出，一个人的“生活空间”可以用一张平面地图来表示。在这样一张地图中，各个区域代表一个人的各种活动，如他的工作环境，他的家和他的嗜好。莱温实际上处理的是图。这种观点使得集体活动研究中心的心理学家们提出了图的另外一种心理学解释，其中，人用一些点来代表，而人与人之间的关系用线来代表，这些关系包括爱、恨、交往和支配。实际上，就是因为这种方法，著名的心理学家弗斯定格

（L. Festinger）在卡特赖特（D. Cartwright）的帮助和鼓励下，对图论有了独到的发现。

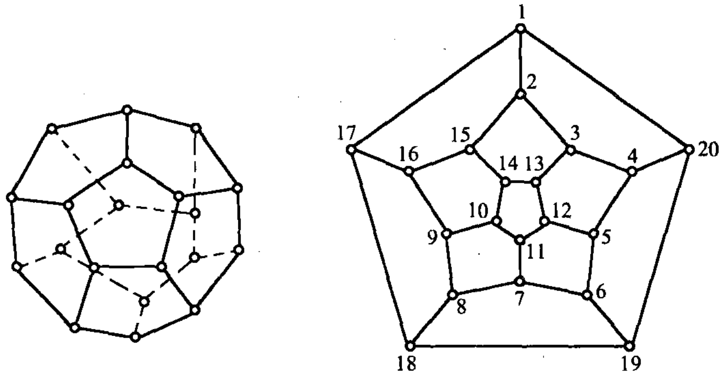

图 1-3 正十二面体图

因为理论物理学研究的需要，所以在这个学科内不止一次地发现过图论。乌伦伯克（Uhlenbeck）在统计力学的研究中用点来代表分子，两个点的邻接表示存在某种物理形式的最邻近的相互作用，如磁的吸力或斥力。在李政道和杨振宁的类似解释中，点代表欧几里得空间的小立方体，其中每一个立方体可能被一个分子占有或者不被分子占有。于是，两个点邻接就表示两个空间都被占有。另外，物理学还用图论来作为一种图形的表示方法。在范曼（Feynmann）提出的图解中，点代表物理粒子，线代表粒子碰撞后的路线。

在概率论中，马尔可夫链的研究引进了有向图，它的意思是：点代表事件，一条从一个点到另外一个点的有向线表示这两个事件直接相继有正的概率。研究中，直接定义一个马尔可夫链是一个网络，其中从每一个点出发的所有有向线的值的和是 1。有向图有一种类似的表示法出现在数值分析的矩阵求逆和特征值计算的部分中，瓦尔加（Varga）给出了一些例子。对于一个给定的矩阵，特别是“稀疏的”矩阵，可以用如下的方式构成一个有向图：用点来代表给定的矩阵的行与列的指标，当矩阵的 i、j 元非零时有一条从点 i 到点 j 的有向线。这种方法与处理马尔可夫链的方法有相似性。

线性规划与运筹学的领域里也利用图论的方法研究网络上的流的形式。一个图的点表示某种货物可以储藏或装船的实际位置，从一处到另一处的一条有向线和记在这条线上的一个正数代表一条运输货物的水道和它的能力，这个能力给出可以同时通过的最大允许数量。

科技的迅猛发展向图论提出了越来越多的需要解决的问题，使图论在科学界非常活跃。尤其是计算机科学的快速发展，为图论及其算法的实现提供了强大的计算与证明的手段，有力地推动了图论的发展，而图论在开关理论、数据结构、操作系统、形式语言、计算机网络、编译程序、人工智能等方面亦有显著贡献。

目前，图论领域形成了两个研究方向：一个是以研究图的性质为主，称之为抽象图论；另一个是以研究图的算法为主，称之为算法图论，也称为网络最优化。本书中不仅介绍了图论的基本原理，还介绍了图论算法及其应用。

1.2 图的概念

现实世界的许多事例用图形来描写可能是方便的，这里所指的图形并不是几何学中的图

形，而是客观世界中某些具体事物之间联系的一个数学抽象，这种图形是由一个点集和这个点集中的某些点对的连线构成的。用小圆点代表事物，用连线表示事物之间的二元关系。例如，点可以表示人，连线表示一对朋友；用点表示通信站，而连线表示通信线路。注意：在这类图形中，图是关系的数学表示，人们主要感兴趣的是给定两点是否有一根线连接，而小圆点的位置以及连线的长短曲直则无关紧要。这类事例的数学抽象就产生了图的概念，把图中的小圆点叫做顶点，把连线叫做边。

1.2.1 图

定义 1.2.1 一个图 G 是指一个有序三元组（$V(G),E(G),\psi_G$），其中 $V(G)$ 是非空的顶点集（Vertex Set），内部的元素称为图 G 的顶点（Vertex），$E(G)$ 是与 $V(G)$ 不相交的边集（Edge Set），内部的元素称为图 G 的边（Edge），ψ_G 是关联函数（Incident Function），它使 G 的每条边对应于 G 的无序顶点对（不必相异）。若 e 是一条边，而 u 和 v 是使得 $\psi_G(e)=(u,v)$ 的顶点，则称 e 连接（Join）u 和 v，顶点 u 和 v 称为 e 的端点（End），常记为 $e=(u,v)$或$e=uv$或$e=vu$。

【例 1】 设 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$，其中 $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$；$E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$；$\psi_G(e_1)=v_1v_2$，$\psi_G(e_2)=v_1v_2$，$\psi_G(e_3)=v_2v_5$，$\psi_G(e_4)=v_2v_3$，$\psi_G(e_5)=v_3v_5$，$\psi_G(e_6)=v_3v_4$，$\psi_G(e_7)=v_5v_5$，则图 G 的图形如图 1-4 所示。

采用图这一名称，是因为它们可以用图形来表示，而这种图形表示有助于人们理解图的许多性质。图论中的大多数定义和概念是根据图形表示提出来的。如果顶点 v 是边 e 的一个端点，则称边 e 和顶点 v 相关联（Incident），反之亦然。对于顶点 u 和 v，若（u,v）$\in E$，则称 u 和 v 是邻接或相邻（Adjacent）的；若两条边有共同的顶点，则也称这两条边是相邻的。两个端点重合的边，称为环（Loop），端点不重合的边称为连杆（Link）。关联于同一对顶点的两条或两条以上的边称为多重边（Multiple Edge）。在例 1 中，边e_2和e_3是相邻的；e_7 是环，其他的边都是连杆；边e_1和e_2是重边。显然，“相邻”是指顶点与顶点之间、边与边之间的关系，而“关联”则是指顶点与边之间的关系。

若一个图既没有环也没有重边，则称之为简单图（Simple Graph），例 1 中的图 G 不是简单图，去掉它的重边和环得到的图 1-5 就是简单图了。

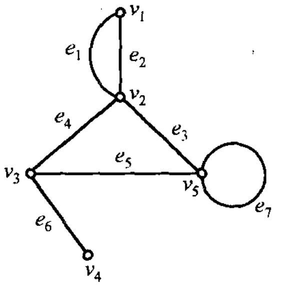

图 1-4　G 的图形

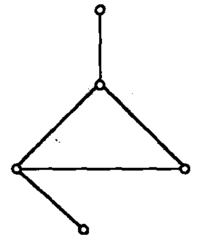

图 1-5　简单图

若图 $G=(V,E)$ 的顶点数与边的数目是有限的，则称图 G 是有限图（Finite Graph），否则称为无限图（Infinite Graph）。本书只介绍有限图。只有一个顶点的图称为平凡图（Trivial

Graph），其他所有的图都称为非平凡图。显然，至少有一个顶点才能称为图，所以总要求一个图的顶点集合是非空的。

通常将图 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$ 简记为 $G=(V(G),E(G))$ 或 $G=(V,E)$ 或 G。当讨论的图只有一个时，总是用 G 来表示这个图。若 $G=(V,E)$ 是有限图，则 G 可以表示为 $G=(p(G),q(G))$，其中 $p(G)$ 为顶点数，即 $p(G)=|V(G)|$，又称为图 G 的阶（Order）；$q(G)$ 为边的数目，即 $q(G)=|E(G)|$，又称为图 G 的规模（Size）。

在图的一个图形中，两条边可能相交于不是顶点的点上，若一个图具有这样的一个图形，它的边仅在端点处相交，则该图称为平面图（Planar Graph），因为这种图可以在平面上用简单的方式表示出来。图 1-6a 是一个平面图（虽然由所给出的表示形式来看并不是一目了然），图 1-6b 是一个非平面图（这将在第 7 章中证明）。

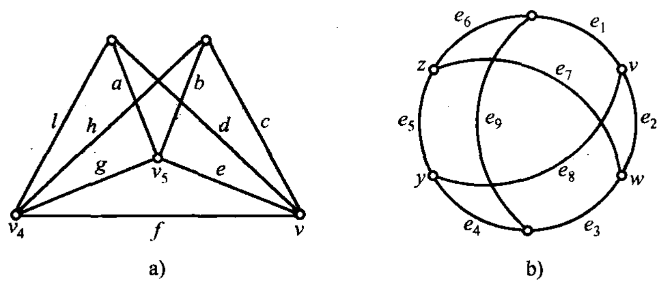

图 1-6　平面图和非平面图

1.2.2　子图

定义 1.2.2　设 $G=(V,E)$ 与 $H=(V',E')$ 是任意两个图，如果 $V'\subseteq V$，$E'\subseteq E$，则称图 H 是图 G 的子图（Subgraph），记为 $H\subseteq G$，称 G 为 H 的母图（Supergraph）。若 $H\subseteq G$，且 $V(H)=V(G)$，则称 H 是 G 的生成子图或支撑子图（Spanning Subgraph）。若 $H\subseteq G$，其中 $V(H)=V(G)$ 和 $E(H)=E(G)$ 至少有一个不成立，则称 H 是 G 的真子图（Prope Subgraph），或当 $H\subseteq G$ 但 $H\neq G$ 时，记为 $H\subset G$，称 H 为 G 的真子图。在图 1-7 中，H_1 和 H_2 是 G 的子图，H_3 就是 G 的一个生成子图。

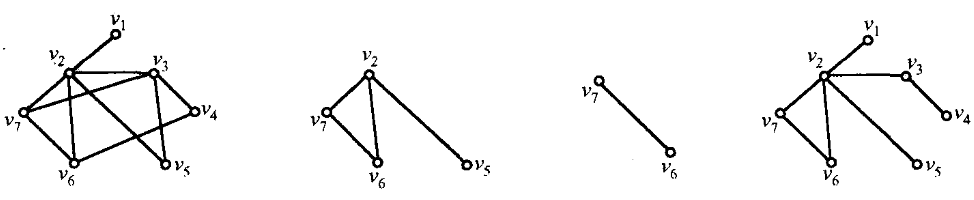

图 1-7　图 G 的子图和生成子图

定义 1.2.3　假设 V' 是 $V(G)$ 的一个非空子集，以 V' 为顶点集，以两端点均在 V' 中的边的全体为边集所组成 G 的子图，称为 G 的由 V' 导出的子图（Induced Subgraph），记为 $G[V']$。图 1-7 中 H_1 是由 $\{v_2,v_5,v_6,v_7\}$ 导出的子图，即 $H_1=G\left[\{v_2,v_5,v_6,v_7\}\right]$。

导出子图 $G[V-V']$ 记为 $G-V'$，它是从 G 中删除 V' 中的顶点以及与这些顶点相关联的

边所得到的子图，若$V'=\{v\}$，常把$G-\{v\}$简记为$G-v$。

定义 1.2.4 假设E'是$E(G)$的非空子集，以E'为边集，以E'中的边关联的全部顶点为顶点集的 G 的子图，称为 G 的由E'导出的子图，简称为 G 的边导出子图（Edge-induced graph），记作$G[E']$。图 1-8 画出了这些不同类型的子图。

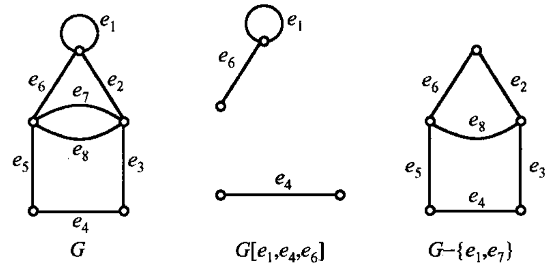

图 1-8　图 G 的不同类型子图

注意： 1）点导出子图就是在原有的图中去掉一些点及其相关联的边所产生的子图。

2）边导出子图是在原图中取一些边，并保留相关联的点所产生的子图。

设$E'\subset E$，且$E'\neq\varnothing,G-E'$表示在 G 中删去E'中所有边所得的子图。同样将 $G-\{e\}$简记为 $G-e$。

若从 G 中删除所有的环，并使每一对相邻的顶点只留下一条边，即可得 G 的一个生成子图，称为 G 的基础简单图。图 1-8 中$G-\{e_1,e_7\}$就是 G 的一个基础简单图。

1.2.3　一些重要类型的图

某些类型的图在图论中经常出现，这些已知的特殊类型的图能帮助我们学习、理解一些图的新概念。所以，下面介绍一些重要类型的图。

定义 1.2.5 若图 G 中的每一对不同顶点恰有一条边连接，则称此图为完全图（Complete Graph），具有 n 个顶点的完全图记为K_n。图 1-9 给出了顶点数不超过 6 的所有完全图。

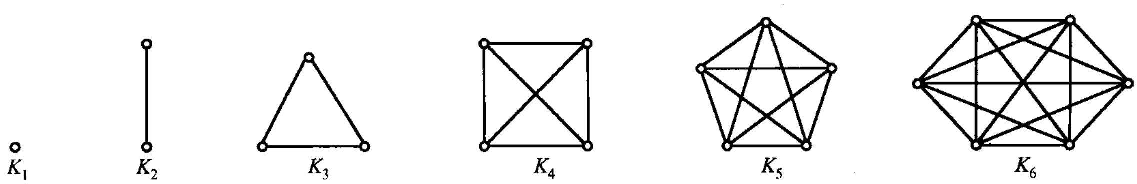

图 1-9　阶数小于 6 的所有完全图

由 n 个顶点互相都邻接，得到

$$|E(K_n)|=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

此数目也是 n 顶点简单图的边数上界，可以写作：若$|V(G)|=n$，有$|E(G)|\leqslant\dfrac{n(n-1)}{2}$。

定义 1.2.6 设$G=(V,E)$为 n 阶简单图，以 V 为顶点集，以所有能使 G 成为完全图K_n的添加边组成的集合为边集的图，称为 G 相对于K_n的补图，简称 G 的补图（Complement

Graph），记作$\overline{G}$。可见，$\overline{G}$是指和 G 有相同顶点集 V 的一个简单图，$\overline{G}$中的两个顶点相邻当且仅当它们在 G 中不相邻。图 1-10 给出了两组互补图。

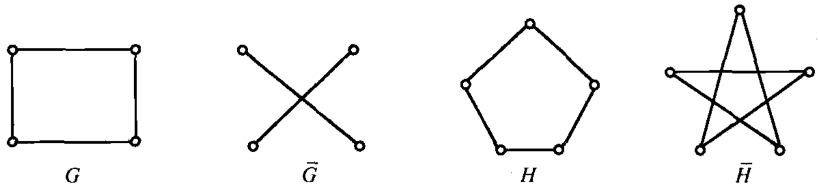

图 1-10　两组互补图

完全图K_n的补图$\overline{K}_n$是一个仅含 n 个顶点不含边的图，称为空图。

当$n\geqslant 3$时，n 个顶点的圈记作C_n，它的图形正如其名字，是含有 n 个顶点的圈，会发现C_3和K_3相同。含 n 个顶点的路记作P_n。易看出：$P_1=K_1,P_2=K_2$，P_n是C_n的生成子图，它是通过删除C_n 的一条边得到的。

定义 1.2.7　若把简单图 G 的顶点集合分成两个不相交的非空集合V_1和V_2，使得图 G 中的每一条边，与其关联的两个顶点分别在V_1和V_2中，则 G 称为偶图或二分图（Bipartite Graph），记作$G=(V_1,V_2,E)$，其中V_1和V_2叫做 G 的二划分。

对二分图$G=(V_1,V_2,E)$，若$|V_1|=m,|V_2|=n$，V_1中每个顶点要与V_2中每个顶点相关联，且都只与V_2中顶点相关联，则称该图为顶点 m 和 n 的完全偶图或完全二分图（Complete Bipartite Graph），记作$K_{m,n}$。由二分图定义知，$G[V_1]$与$G[V_2]$均为空图。

星（Star）$K_{1,n}$是一个完全二分图，图中只有一个顶点的度为 n，其余 n 个点是度为 1 的端点。星$K_{1,n}$经常被用来对计算机网络进行建模，度为 n 的顶点代表网络服务器，其余 n 个顶点代表网络中的 n 个计算机。

图 1-11 给出了上面介绍的各种类型的图。

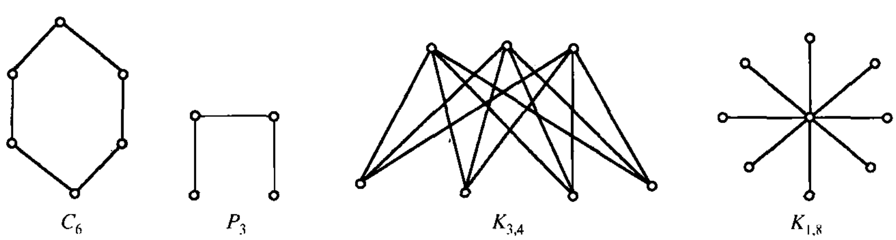

图 1-11　圈，路，完全偶图与星图

1.3　顶点的度和图的同构

1.3.1　顶点的度

定义 1.3.1　在图$G=(V,E)$中，图 G 的顶点 v 的度（Degree）是指与顶点 v 相关联的边数（每个环计算两次），记为$d_G(v)$或$d(v)$。在图 1-4 中，$d_G(v_1)$=2，$d_G(v_2)$=4，$d_G(v_3)$=3，