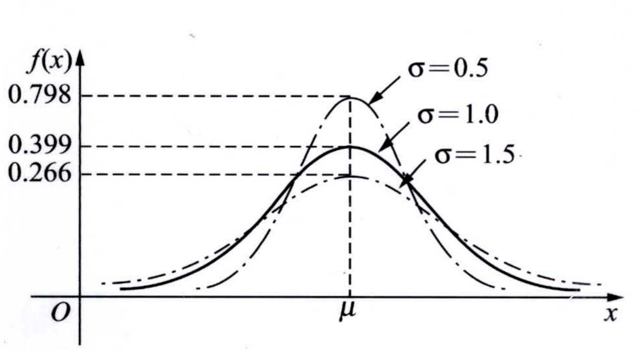
"十二五"高等院校公共数学规划教材

Probability and Statistics 第二版

概率论与数理统计

主编 李其琛 曹伟平



南京大学出版社

“十二五”高等院校公共数学规划教材

概率论与数理统计 第二版

主　编　李其琛　曹伟平
副主编　李连庆　郭海兵　张　恒
高月姣　陈怡南　张滦云

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 李其琛,曹伟平主编. —2 版. —南京:南京大学出版社,2010.8

“十二五”高等院校公共数学规划教材

ISBN 978-7-305-06430-2

Ⅰ.①概… Ⅱ.①李… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 153821 号

出 版 者 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　编 210093
网　　址 http://www.NjupCo.com
出 版 人 左　健

丛 书 名 “十二五”高等院校公共数学规划教材
书　　名 概率论与数理统计(第二版)
主　　编 李其琛　曹伟平
责任编辑 孟庆生　郭　娜　　编辑热线 025-83593947

照　　排 南京紫藤制版印务中心
印　　刷 南京人民印刷厂
开　　本 787×1092 1/16 印张 16.25 字数 405 千
版　　次 2010 年 8 月第 2 版 2010 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-06430-2
定　　价 27.90 元

发行热线 025-83594756
电子邮箱 Press@NjupCo.com
　　　　 Sales@NjupCo.com(市场部)

前　　言

概率论与数理统计是一门研究随机现象的数学学科，在生活中，存在着众多有趣的随机现象. 当你用智慧的眼睛去观察这个可爱的世界，就会发现其中的规律，这就是概率与统计的魔力. 在我们的意识中，或多或少都能根据观察到的随机现象作一些简单的分析，得到对自己有用的结果. 在现代社会，人们可以从大量的随机现象中挖掘信息，转化为数据，依靠先进的分析工具，得出结论或者根据结论作出合理的决策. 因此，概率论与数理统计是大学理工科，经济金融、管理等学科的必修课程.

本教材是在国内同类教材的基础上，结合我校多年对本二、本三不同专业讲授概率论与数理统计课程积累的经验编写的一本实用的公共必修课教材. 本教材的知识结构体系与国内主流的概率论与数理统计教材基本一致，但内容取材的安排上比较新颖，尽量做到通俗易懂、简单易学，既把握科学研究的需求，又重视实际生活的应用. 概率论与数理统计的研究对象、研究方法、思维方式与其他工科数学课程都有较大区别，因此教材力求做到体裁的组织与递进的难度符合学生的认知规律，强调知识的传授与启发式教学相结合，通过实际问题引入基本概念和建立基本定理，激发学生学习的兴趣，增强学生对概率论与数理统计的基本思想、基本方法的理解，逐步巩固学生对本课程的理论知识和应用方法的掌握.

概率论与数理统计历来以抽象难学著称，初学者在学习中会遇到一些困难. 因此，我们在例题的编写中尽量清楚阐述解题的思路、方法和步骤，以精选的例题来巩固学生的课堂知识. 本教材例题涉及面广，在例题选取和分析上把实用性放在重要位置，注重相关理论知识在科学和生活中的应用. 在习题的选择上，主要安排一些由浅入深、有助于加深基本概念和训练基本方法的习题，同时安排一些涉及通讯、信息、经济、管理、医学、农业等方面的习题，使学生在获得概率论与数理统计的基本理论与方法的同时，也掌握一些解决实际问题的方法.

为加强读者对概率统计知识的掌握，在每章末都增加了一些概率与统计学家及其研究成果的简介，有助于读者对概率统计知识的深刻理解，以求使之达到既知其然，又知其所以然的效果.

为便于读者提高知识水平，教材在每一节都配备了适量的练习题，每一章配备了适量的综合习题，全书最后配备了两套综合复习题.

全书共八章，分为两大部分. 第一部分为概率论基础，包括前五章内容，第二部分为数理

统计，包括后三章内容.在概率论基础部分，我们将一维随机变量和多维随机变量分为两章，每章均包含离散型和连续型随机变量的有关内容，便于学生将离散型随机变量和连续型随机变量对比学习；在数理统计部分，着重介绍了统计的基本概念及估计的基本思想，略去了一般概率论与数理统计教材中所含的回归分析和方差分析的内容.教材总体设计为48课时.

本书第二版是在2009年出版的第一版的基础上修订的，可作为高等学校工科、理科（非数学专业）"概率论与数理统计"课程的教材，也可供工程技术人员参考.

在本书的第一版出版后，我们经过进一步的教学实践，积累了不少经验，并吸收了广大读者的意见，修订稿正是在这一基础上完成的.我们修改了第一版中存在的不当之处，在内容上作了部分增减，致力于教材质量的提高.第二版在选材和叙述上有所侧重，尽量做到联系工科专业的实际，注重应用，力图将概念写得清晰易懂，以便于教学.我们在例题和习题的选择上继续作了努力，这些题目既具有启发性，又有广泛的应用性，从题目的广泛性也可看到本门课程涉及面之广.

为了帮助读者抓住要点，提高学习质量和效率，在章末增写了"本章知识结构图".知识结构图中所包含的内容，能起到提纲挈领的作用.

李大潜院士、马吉薄教授、周明儒教授为本教材的顺利完成提出了许多宝贵的意见；淮海工学院理学院的领导以及全体教师对我们编写教材给予了大力支持；南京大学出版社及编辑为本教材的出版付出了辛勤劳动；南京航空航天大学吴和成教授通读了全书，提出了许多宝贵的意见.

由于我们的水平有限，虽经多次修改，错误和不足仍在所难免，恳请专家及读者批评指正.

李其琛
2010年7月7日

目 录

第1章 概率论的基本概念

在公交车站候车时，总希望候车的时间比较短，但到底要等多长时间，事先不能确定；人们买彩票时，总希望自己中大奖，但能否中奖，结果也不确定. 在现实生活中，有很多这类事情，其结果具有不确定性. 人们还会关注这样的问题：公交车站候车时间少于5分钟的可能性有多大？彩票中奖的可能性有多大？等等.

概率论为解决这种不确定性问题提供了有效的方法. 本章主要介绍概率论的基本概念.

§1.1 随机试验与随机事件

1.1.1 随机现象与随机试验

客观世界中发生的现象是多种多样的，归纳起来主要有两种：一种是必然现象(也称为确定性现象)，另一种是随机现象.

必然现象是指在一定的条件下，必然发生的现象. 例如，在一个标准大气压下，水加热到100℃便会沸腾，向上抛一粒石子必然下落，等等.

什么是随机现象？顾名思义，它是指一个随机的、偶然的自然现象或社会现象，它和必然现象是相对的.

例如，在相同的条件下，向上抛一枚质地均匀的硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，不论如何控制抛掷条件，在每次抛掷之前无法确定抛掷是什么结果，这样的试验就出现多于一种的可能结果. 又如，同一门大炮对同一目标进行多次射击(同一型号的炮弹)，每次炮弹着点可能不尽相同，并且每次射击之前无法肯定炮弹着点的确切位置. 再如，重复地从同一生产线上用同一种工艺生产出来的灯泡中抽取一只测量其寿命，每次结果可能不一样，并且每次抽取灯泡之前无法确切知道其寿命，等等.

以上所举的现象都具有随机性，即在一定条件下进行重复试验或观察会出现不同的结果，而且在每次试验之前都无法预测将出现哪一种结果，这种现象称为**随机现象**.

如何来研究随机现象？随机现象是通过随机试验来研究的. 那么，什么是随机试验？回答这个问题之前，先看几个例子.

【引例】 E_1：抛一枚硬币，观察静止之后哪一面朝上；

E_2：抛掷一颗骰子，观察出现的点数；

E_3：射击比赛，观察射击成绩(环数)；

E_4:从一批产品(含有正品和次品)中抽取 3 件产品,检验正品件数;

E_5:记录某公共汽车站某个时刻的候车人数;

E_6:从一批灯泡中抽取一只测量其寿命.

可以发现以上 $E_1 \sim E_6$ 都满足下述条件:

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行(试验可重复性);

(2) 试验的所有可能结果是明确可知的,并且不止一个(全部结果已知性);

(3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个,但在试验之前却不能确定出现哪一种结果(试验前结果未知性).

我们称这样的试验是一个**随机试验**(**random trial**),为方便起见,也简称为**试验**(**trial**),今后讨论的试验都是指随机试验.随机试验常用符号 E 来表示.

随机试验是一个广泛的数学术语,它包含各种各样的科学实验,也包括对客观事物进行的“观察”、“调查”或者“测量”等等.

1.1.2 样本空间与随机事件

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为试验 E 的**样本空间**(**sample space**),记作 S.样本空间的元素,即 E 的每个结果,称为**样本点**(**sample point**),记作 e.

【例 1.1】 给出引例中随机试验 $E_1 \sim E_6$ 的样本空间.

$E_1: S=\{(\text{正面}),(\text{反面})\}$;

$E_2: S=\{1,2,\cdots,6\}$;

$E_3: S=\{0,1,2,\cdots,10\}$;

$E_4: S=\{0,1,2,3\}$;

$E_5: S=\{0,1,2,3,\cdots\}$;

$E_6: S=\{t \mid t \geqslant 0\}$.

样本空间的子集,称为**随机事件**,简称**事件**(**event**),一般用 A,B 等大写英文字母表示.例如,在试验 E_2 中,若 A 为“掷出奇数点”的事件,则 $A=\{1,3,5\}$;若 B 为“掷出的点数小于 5”的事件,则 $B=\{1,2,3,4\}$;若 C 为“掷出的点数是 3 的倍数”,则 $C=\{3,6\}$.

所谓**事件 A 发生**,是指在一次试验中,当且仅当 A 中包含的一个样本点出现.例如,在试验 E_2 中,若一次试验时出现的点数是“1 点”,则事件 A 和事件 B 发生,而事件 C 没有发生.

只含有一个样本点的随机事件,称为**基本事件**.例如,试验 E_4 有 4 个基本事件 $\{0\},\{1\},\{2\},\{3\}$.

在每次试验中一定发生的事件称为**必然事件**.样本空间 S 包含所有的样本点,每次试验它必然发生,因而是一个必然事件.必然事件用 S 表示.

在每次试验中一定不发生的事件称为**不可能事件**,记为 $\varnothing$.它是样本空间的一个空子集.

1.1.3 事件之间的关系和运算

事件是一个集合,因此事件之间的关系及其运算可用集合之间的关系及运算来处理.下面来讨论事件之间的关系及其运算.

设 S 为试验 E 的样本空间,$A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$为随机事件.

1. 子事件

若事件 A 包含于事件 B 中,则称事件 A 是事件 B 一个**子事件**,记为 $A\subset B$. $A\subset B$ 时,可知事件 A 发生,则事件 B 必然发生.

对任意事件 A,都有 $\varnothing\subset A\subset S$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 A 与事件 B 是**相等**的,记为 $A=B$.

例如,在试验 E_2 中,记 $A=\{$掷出奇数点$\}$,则 $A=\{1,3,5\}$. 记 $B=\{$掷出的点数小于 6$\}$,则 $B=\{1,2,3,4,5\}$. 显然,事件 A 发生时,事件 B 必然发生.

图 1-1 直观地描绘了事件 B 包含事件 A.

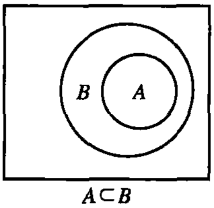


图 1-1

2. 和事件

事件 A,B 中至少有一个发生的事件,称为事件 A 与事件 B 的**和事件**,记为 $A\cup B$. 事件 A 与事件 B 的和事件是由 A 与 B 的样本点合并而成的事件,即

$$A\cup B=\{e|e\in A \text{ 或 } e\in B\}.$$

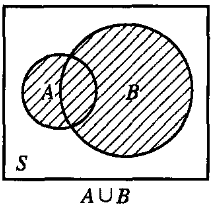


图 1-2

例如,在试验 E_2 中,记 $A=\{$掷出奇数点$\}$,则 $A=\{1,3,5\}$,$B=\{$掷出的点数是 3 的倍数$\}$,则 $B=\{3,6\}$,那么事件 A 与事件 B 的和事件 $A\cup B=\{1,3,5,6\}$.

图 1-2 给出了和事件 $A\cup B$ 的直观表示.

同理,n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件可记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和事件可记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

3. 积事件

事件 A,B 同时发生的事件,称为事件 A 与事件 B 的**积事件**,记为 $A\cap B$,也可简写为 AB. 事件 A 与 B 的积事件是由 A 与 B 的公共的样本点所构成的事件,即

$$AB=\{e|e\in A \text{ 且 } e\in B\}.$$

例如,在试验 E_2 中,记 $A=\{$掷出奇数点$\}$,则 $A=\{1,3,5\}$. $B=\{$掷出的点数是素数$\}$,则 $B=\{2,3,5\}$,于是 $AB=\{3,5\}$.

积事件 AB 可以用图 1-3 来直观表示.

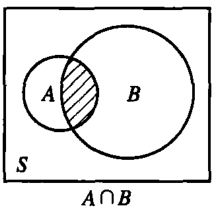
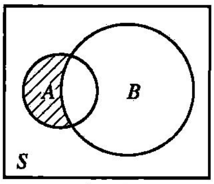


图 1-3

同理,n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$. 可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积事件记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

4. 差事件



$A-B$

图 1-4

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的**差事件**，记为 $A-B$，事件 A 与事件 B 的差是由属于 A 而不属于 B 的样本点所构成的事件. 即

$$A-B=\{e|e\in A \text{ 且 } e\notin B\}.$$

容易推出 $A-B=A-AB$.

例如，在试验 E_2 中，记 $A=\{$掷出奇数点$\}$，则 $A=\{1,3,5\}$. $B=\{$掷出的点数是素数$\}$，则 $B=\{2,3,5\}$，于是差事件 $A-B=\{1\}$.

差事件 $A-B$ 可以用图 1-4 来直观表示.

5. 互不相容(互斥)事件

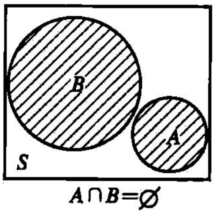
在一次试验中，若事件 A 和 B 不能同时发生，则称事件 A 与事件 B 是**互不相容的**，或称事件 A 与事件 B 是**互斥的**，即

$$A\cap B=\varnothing,$$

即基本事件是两两互不相容的.

例如，在试验 E_2 中，令 $A=\{$掷出的点数至多为 3$\}$，$B=\{$掷出的点数大于 4$\}$，由于 $A=\{1,2,3\}$，而 $B=\{5,6\}$，在组成事件 A,B 的那些试验结果中并无公共(交叉)部分，故 $AB=\varnothing$，亦即事件 A,B 不会同时发生，所以 A,B 是互不相容的.

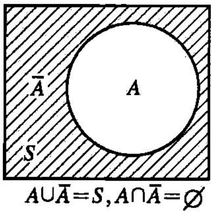
图 1-5 直观地表示了两事件互不相容的含义.



$A\cap B=\varnothing$

图 1-5

6. 对立事件



$A\cup\overline{A}=S, A\cap\overline{A}=\varnothing$

图 1-6

若 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=S$，则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**，或称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**. 事件 A 与事件 B 互为对立事件，是指事件 A 与事件 B 不能同时发生又不能同时不发生，即每次试验中事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}$.

显然

$$\overline{A}=S-A, A\cup\overline{A}=S, A\cap\overline{A}=\varnothing.$$

例如，在试验 E_2 中，记 $A=\{$掷出奇数点$\}$，则 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{$掷出偶数点$\}$，则 $B=\{2,4,6\}$，$A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}=S$，所以 A,B 互为对立事件，于是 $B=\overline{A}$，$A=\overline{B}$.

图 1-6 直观地表示了两事件对立的含义.

对立事件必为互不相容事件，反之，互不相容的两个事件未必是对立事件.

1.1.4 事件的运算律

设 $A,B,C,A_k(k=1,2,\cdots)$ 为事件，则有：

交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

德摩根(De Morgan)律

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$$

一般地说，对有限个事件及可列个事件也有

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n}A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k},\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{A_k},\overline{\bigcap_{k=1}^{n}A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A_k},\overline{\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{A_k}.$$

【例 1.2】　设 A,B,C 为三个事件，试用 A,B,C 表示下列事件：

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生；

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生；

(3) A,B,C 都发生；

(4) A,B,C 恰有一个发生；

(5) A,B,C 至少有一个发生；

(6) A,B,C 中不多于两个发生；

(7) A,B 至少有一个发生而 C 不发生；

(8) A,B,C 恰有两个发生；

解　(1) $A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A-B-C$；

(2) $AB\overline{C}$ 或 $AB-C$；

(3) ABC；

(4) $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}$；

(5) $A\cup B\cup C$ 或 $\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup ABC$ 或 $\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$；

(6) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup\overline{A}BC$ 或 $\overline{ABC}$；

(7) $(A\cup B)\overline{C}$ 或 $\overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup AB\overline{C}$；

(8) $A\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup\overline{A}BC$.

【例 1.3】　设 $A=\{$甲产品合格$\}$，$B=\{$乙产品合格$\}$，试说明 $A\cup\overline{B}$，$\overline{A\cup B}$表示的事件.

解　$A\cup\overline{B}=\{$甲产品合格或乙产品不合格$\}$；

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}=\{$甲产品和乙产品都不合格$\}$.

练　习　1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间 S：

(1) 同时掷两枚骰子，记录两枚骰子点数之和；

(2) 某地铁站每隔 5 分钟有一列车通过，乘客对于列车通过该站的时间完全不知道，观察乘客候车的时间；

(3) 将一尺之棰折成三段，观察各段的长度；

(4) 连续抛一枚硬币，直至出现正面为止，观察抛硬币的次数.

2. 若要击落飞机，必须同时击毁 2 个发动机或击毁驾驶舱. 记：$A_1=\{$击毁第 1 个发动机$\}$，$A_2=\{$击毁第 2 个发动机$\}$，$B=\{$击毁驾驶舱$\}$. 试用 A_1，A_2 和 B 表示事件{飞机被

击落}.

3. 设 A,B,C 表示三个随机事件，试将下列事件用 A,B,C 表示出来.

(1) 三个事件都不出现；

(2) 不多于一个事件出现；

(3) 三个事件至少有两个出现；

(4) A,C 至少一个出现，B 不出现.

4. 袋中有 10 个球，分别编有号码 1～10. 从中任取 1 球，设 $A=\{$取得球的号码是偶数$\}$，$B=\{$取得球的号码是奇数$\}$，$C=\{$取得球的号码小于 5$\}$，则下述运算表示什么事件：

(1) $A\cup B$；　(2) AB；　(3) AC；　(4) $\overline{A}\,\overline{C}$；　(5) $\overline{B\cup C}$.

5. 一批产品中有合格品和废品，从中有放回地抽取三次，每次取一件，设 $A_i=\{$第 i 次抽到废品$\}$，$i=1,2,3$，试用 A_i 表示下列事件：

(1) 第一次、第二次中至少有一次抽到废品；

(2) 只有第一次抽到废品；

(3) 三次都抽到废品；

(4) 至少有一次抽到合格品；

(5) 只有两次抽到废品.

§1.2　频率与概率

对于随机现象，仅仅考虑它的所有可能结果是没有什么意义的. 我们还要关心各种可能结果在一次试验中出现的可能性究竟有多大，从而可以在数量上研究随机现象.

随机现象具有偶然性的一面，在一次试验中的随机事件可能发生，也可能不发生. 但是经过长时间的实践与探索，人们发现，在多次重复试验中，某个事件的发生却呈现出明显的规律性. 这种规律性为我们用数来表示事件发生的可能性提供了客观的依据，为此我们从事件发生的频率谈起.

1.2.1　频率

设有随机试验 E，在相同的条件下，试验重复进行 n 次，在这 n 次试验中事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数，比值 n_A/n 称为事件 A 发生的**频率**(**frequency**)，记作 $f_n(A)$，即 $f_n(A)=n_A/n$.

易知频率具有以下性质：

1° **非负性.** $f_n(A)\geqslant 0$；

2° **规范性.** $f_n(S)=1$；

3° **有限可加性.** 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 两两互不相容，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 反映了事件 A 发生的频繁程度，$f_n(A)$ 越大，事件 A 发生就越频繁，这就意味着 A 在一次试验中发生的可能性也越大. 这种观点引导我们思考这样一个问题：是否可以用频率来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性大小?

先看一个例子.

【例 1.4】 抛掷一枚均匀对称的硬币，事件 $A=\{$正面朝上$\}$，记录 A 发生的频数及频率，得到数据见表 1-1.

表 1-1

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

从表 1-1 可以看出，当试验次数较少时，出现正面朝上的频率波动比较大，但是当试验次数增多时，正面朝上发生的频率明显在 0.5 左右波动.

历史上，也有一些统计学者做过类似的试验，根据资料记载，所得数据见表 1-2.

表 1-2

实 验 者	n	n_A	$f_n(A)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲　　丰	4040	2048	0.5069
K. 皮尔逊	12000	6019	0.5016
K. 皮尔逊	24000	12012	0.5005

从表 1-2 可以看出，当次数增加时，频率 $f_n(A)$ 总是在 0.5 左右摆动，并且呈现出稳定于 0.5 的趋势. 频率的这种稳定性就是平常所说的统计规律性，它揭示了随机现象内在的必然规律性，因此用频率的稳定值来刻画事件 A 发生的可能性的大小是合适的.

1.2.2　概率

定义 1.1（概率的统计定义）　设有随机试验 E，若当试验重复次数 n 充分大时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 稳定地在某一数值 p 附近摆动，则称数 p 为事件 A 发生的**概率**（**probability**）.