XIANXING DAISHU JICHU FUDAO LIANXICE

线性代数基础辅导练习册

王敬修　主编

中国计量出版社
CHINA METROLOGY PUBLISHING HOUSE

线性代数基础

辅导练习册

王敬修　主编

中国计量出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数基础辅导练习册/王敬修主编. —北京：中国计量出版社，2009. 8

ISBN 978-7-5026-2993-9

Ⅰ.线…　Ⅱ.王…　Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 036247 号

内 容 提 要

本书是与《线性代数基础》相配套的辅导练习册。书中各章节顺序与教材相对应，在内容编排上做到科学性与通俗性相结合，由浅入深、逐步掌握基本概念和逻辑推理，联系教学实际、注重实用性。

本书可作为高等工科学校的辅助教学用书，也可供其他读者学习使用。

中国计量出版社出版
北京和平里西街甲 2 号
邮政编码　100013
电话 (010)64275360
http://www.zgjl.com.cn
三河市东方印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

*
850 mm×1168 mm　32 开本　印张 2.5　字数 66 千字
2009 年 7 月第 1 版　2009 年 7 月第 1 次印刷
*
定价：7.00 元

编写组名单

主　编：王敬修

编　委：牛玉玲　薛　威　张　欣
何　云　陈凡红　丁茂震

前　言

线性代数课程中概念较多、推理较多，在学习中要做到心中有数，应阅读教学大纲中有关基本要求、重点与难点。在阅读教材时，要逐段细读、逐句推敲、边看书边思考，分析比较各个概念及理论之间的联系与区别。

读者在学习中应逐渐提高使用矩阵、行列式、向量等常用数学工具的能力，掌握本课程解决问题的常用方法。例如矩阵的初等变换就是在求逆矩阵、求向量组的秩及最大无关组、求解线性方程组等问题中的一个常用方法，应牢固地掌握它。

读者要完成作业，是理解、消化和巩固所学的知识，培养分析问题、解决问题以及提高运算能力的重要环节。做题要求步骤清楚、运算准确、书写以及使用数学语言规范，并演算出最后结果。

编者希望读者树立起坚定信念、不断探索适合自己的学习方法，最大限度地发挥自己的潜能，得到好的收获。

书中不妥之处，望广大读者赐教。

编　者

2009 年 3 月

目　　录

第一章　行列式

一、基本要求

1. 掌握行列式、余子式和代数余子式的概念。
2. 掌握行列式的性质并能熟练运用。
3. 会熟练进行数字行列式计算和简单的文字行列式计算。
4. 熟记克莱姆法则并会用它来求解线性方程组。

二、重点内容

1. 行列式的定义

A. 行列式的概念

n^2 个数依次排列成 n 行、n 列：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式。

B. 余子式、代数余子式

设 n 阶行列式 A。划去 A 的第 i 行及第 j 列。剩下的 $(n-1)^2$ 个数按原来的先后顺序组成一个 $n-1$ 阶行列式。这个行列式称为 A 的第 (i,j) 个元素的余子式。记作 M_{ij}。其代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$。

C. 行列式值的定义

按行展开

$$A=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{ij}A_{ij}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}$$

按列展开

$$A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{ij}A_{ij} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$

2. 行列式的性质及行列式的计算

A. 行列式的性质

性质 1 行列式转置后的值不变，即 $A^T = A$。

性质 2 以某个常数 k 乘以行列式某一行（或某一列），所得到的行列式的值等于原行列式值的 k 倍。

性质 3 行列式的两行（或两列）对换，行列式的值改变符号。

性质 4 如果一个行列式的某两行（或某两列）成比例，则行列式的值等于零。

性质 5 若行列式的某一行（或某一列）元素 $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$，则该行列式可分解为两个行列式之和，其中一个行列式的相应行（或列）的元素为 b_{ij}，另一个行列式的相应行（或列）的元素为 c_{ij}，用式子来表示就是：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 将行列式的某一行（或某一列）乘以常数 k 以后加到另一行（或列）上去，行列式的值不变。

B. 行列式的计算（克莱姆法则）

对于含有 n 个未知数、n 个方程式的线性方程组，可用克莱姆法则作一般讨论。

一般线性方程组形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

记系数行列式为 A

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 依次置换 A 的第一列元素，第二列元素，…，第 n 列元素，相应得

$$A_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdots \quad A_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

当系数行列式 $A\neq0$ 时，则该方程组有且只有一组解：

$$x_1=\frac{A_1}{A},x_2=\frac{A_2}{A},\cdots,x_n=\frac{A_n}{A}。$$

三、典型例题

例 1　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 15 \\ 4 & 3 & 14 & 19 \end{vmatrix}$$

解：一般都是利用行列式性质，将其化为上三角行列式求其值。

$$D=\begin{vmatrix}2&5&4&9\\-3&3&1&10\\3&4&5&15\\4&3&14&19\end{vmatrix}\xlongequal[①\times(-1)+③]{①\sim③}\begin{vmatrix}1&-1&1&6\\-3&3&1&10\\2&5&4&9\\4&3&14&19\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[①\times(-2)+③]{\substack{①\times(-4)+④\\①\times3+②}}-\begin{vmatrix}1&-1&1&6\\0&0&4&28\\0&7&2&-3\\0&7&10&-5\end{vmatrix}\xlongequal[③\times(-1)+④]{②\sim③}$$

$$\begin{vmatrix}1&-1&1&6\\0&7&2&-3\\0&0&4&28\\0&0&8&-2\end{vmatrix}\xlongequal{③\times(-2)+④}\begin{vmatrix}1&-1&1&6\\0&7&2&-3\\0&0&4&28\\0&0&0&-58\end{vmatrix}=-1624$$

例 2　计算

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a_1&a&a_2&a_2\\a_2&a_2&a&a_3\\a_3&a_3&a_3&a\end{vmatrix}$$

解：用 $-a_1,-a_2,-a_3$ 乘第一行分别加到第 2,3,4 各行上

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&a-a_1&a_2-a_1&a_2-a_1\\0&0&a-a_2&a_3-a_2\\0&0&0&a-a_3\end{vmatrix}=(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)$$

例 3　计算

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

解：此行列式的特点是各行 4 个数的和都是 6。

$$D=\begin{vmatrix}6&1&1&1\\6&3&1&1\\6&1&3&1\\6&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

$$=6\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&0&2&0\\1&0&0&2\end{vmatrix}=6\times2^3=48$$

例 4　试证奇数阶反对称行列式等于零

证:根据 $a_{ij}=-a_{ji}$

$$D=\begin{vmatrix}0&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&0&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-a_{21}&\cdots&-a_{n1}\\-a_{12}&0&\cdots&-a_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-a_{1n}&-a_{2n}&\cdots&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n\begin{vmatrix}0&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&0&\cdots&a_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n\begin{vmatrix}0&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&0&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&0\end{vmatrix}=(-1)^nD$$

因为 n 是奇数,所以 $D=-D$　即 $2D=0$,故 $D=0$

例 5　求方程 $\begin{vmatrix}x-1&1&1&0\\1&x-1&1&0\\1&1&x-2&1\\1&1&1&x-2\end{vmatrix}=0$ 的根

解：$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & x-1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x-2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x-2 \end{vmatrix} \overset{③\times(x-2)+④}{=\!=\!=\!=}$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & x-1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x-2 & 1 \\ 3-x & 3-x & 1-(x-2)^2 & 0 \end{vmatrix}$$

按第四列展开

$$=(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 3-x & 3-x & (1-x)(x-3) \end{vmatrix} \underset{[1]\times(-1)+[2]}{=\!=\!=\!=}$$

$$-\begin{vmatrix} x-1 & 2-x & 1 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 3-x & 0 & (1-x)(x-3) \end{vmatrix} \xlongequal[\text{按第 2 列展开}]{①+②}$$

$$-\begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 3-x & 0 & (1-x)(x-3) \end{vmatrix}$$

$$=-(x-2)\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3-x & (1-x)(x-3) \end{vmatrix}$$

$=-(x-2)[x(1-x)(x-3)-2(3-x)]$

$=-(x-2)(x-3)[x(1-x)+2]$

$=(x-2)^2(x-3)(x+1)=0$

所以方程的根为 $x=2$(二重根)，3，-1

例 6　计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

解：

$$D=\begin{vmatrix}2a+b & a & b & a\\ 2a+b & 0 & a & b\\ 2a+b & a & 0 & a\\ 2a+b & b & a & 0\end{vmatrix}=(2a+b)\begin{vmatrix}1 & a & b & a\\ 1 & 0 & a & b\\ 1 & a & 0 & a\\ 1 & b & a & 0\end{vmatrix}$$

$$=(2a+b)\begin{vmatrix}1 & a & b & a\\ 0 & -a & a-b & b-a\\ 0 & 0 & -b & 0\\ 0 & b-a & a-b & -a\end{vmatrix}$$

$$=(2a+b)\begin{vmatrix}-a & a-b & b-a\\ 0 & -b & 0\\ b-a & a-b & -a\end{vmatrix}$$

$$=-b(2a+b)\begin{vmatrix}-a & b-a\\ b-a & -a\end{vmatrix}$$

$$=-b^2(2a+b)[a^2(b-a)^2]=b^2(b^2-4a^2)$$

例 7　已知线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+bx_2+2x_3=1\\ 2x_1-x_2+2x_3=-4\\ 4x_1+x_2-4x_3=-2\end{cases}$$

当 b 是何值时线性方程组有唯一解。

解：用克莱姆法则来判定，当方程组的系数行列式不等于零时，方程组有唯一解。

故 $\begin{vmatrix}2 & b & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & -4\end{vmatrix}\neq 0$　解得 $b\neq -1$。

四、练习题(一)

Ⅰ. 单项选择题

1. 当 $a=($　　$)$时，下列行列式的值必为零。　　[　　]

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

A. 1； B. -1； C. 2； D. 0。

2. 下列行列式的值为 [ ]

$$\begin{vmatrix} 125 & 64 & 27 & 8 \\ 25 & 16 & 9 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

A. 12； B. -12； C. 16； D. -16。

3. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & u & 0 & v \end{vmatrix}$ [ ]

A. $abcd-xyuv$； B. $abxy-cduv$；

C. $(ab-cd)(xy-uv)$； D. $(ad-bc)(xv-yu)$。

4. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$

中元素 g 的代数余子式的值为 [ ]

A. $bcf-bde$； B. $bde-bcf$；

C. $acf-ade$； D. $ade-acf$。

5. 设

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & x^2-2 \\ 2 & x^2+1 & 1 \end{vmatrix}$$

则 $f(x)=0$ 的根为 [ ]

A. 1,1,2,2； B. $-1,-1,2,2$；

C. $1,-1,2,-2$； D. $-1,-1,-2,-2$。

6. 行列式$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=$ [ ]

A. 0；　B. $a_1a_2\cdots a_{n-1}a_{n-1}$；

C. $-a_1a_2\cdots a_{n-1}a_{n1}$；　D. $(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_{n1}$。

7. k 不能取(　　)时，下列方程组只有零解： [ ]

$$\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-x_2+3x_3=0 \end{cases}$$

A. 1；　B. 2；　C. 3；　D. 4。

Ⅱ. 计算题

用克莱姆法则解下列方程组。

1. 解方程组$\begin{cases} x_1 \qquad\quad +x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+4x_3=2 \\ 2x_1+2x_2+3x_3=3 \end{cases}$

2. 当 k 取何值时，方程组

$$\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+kx_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+kx_3=0 \end{cases}$$ 有非零解？

五、参考答案(一)

Ⅰ. 单项选择题

1. [A]； 2. [A]； 3. [D]； 4. [B]； 5. [C]； 6. [D]； 7. [B]。

Ⅱ. 计算题

1. $x_1=4, x_2=2, x_3=-3$。

2. $k=1$ 或 $k=-2$。

第二章 矩 阵

一、基本要求

1. 熟练掌握矩阵的概念和运算。

2. 熟练掌握逆矩阵的性质和求法。

3. 掌握伴随矩阵的概念及它和逆矩阵的关系。

4. 掌握分块对角矩阵的概念和运算。

5. 熟练掌握初等变换的方法，掌握初等阵的概念以及初等阵与初等变换的关系。

6. 掌握矩阵等价的概念和相关性质。

二、重点内容

1. 矩阵及其运算

A. 矩阵的定义

定义：由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行、n 列的如下矩形阵列

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵。

B. 矩阵的运算

矩阵的加法与数乘：

设有两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$；若 k 是一个数，$k\boldsymbol{A}_{m\times n}=(ka_{ij})_{m\times n}$。

矩阵的加法和数乘法则(假定下列矩阵都是 $m\times n$ 阵)：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$