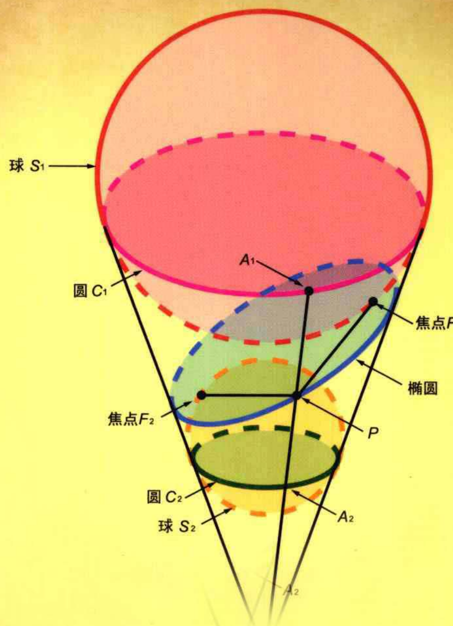
TURING 图灵数学·统计学丛书 50

WILEY



Linear Algebra

A First Course with Applications to Differential Equations

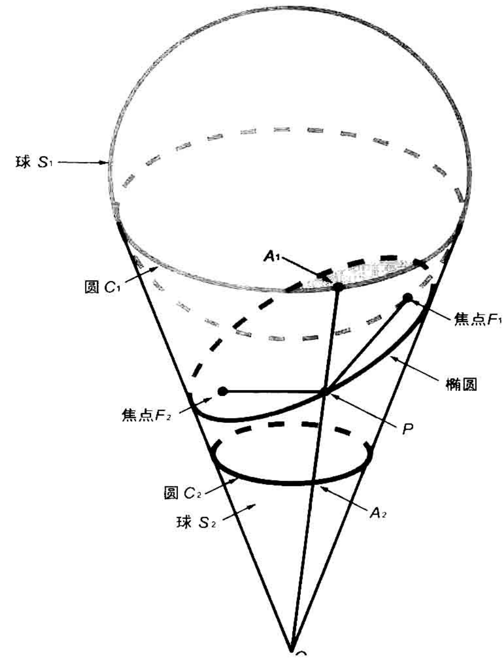
线性代数及其应用导论

[美] Tom M. Apostol 著

沈灏 沈佳辰 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵数学·统计学丛书 50



Linear Algebra

A First Course with Applications to Differential Equations

线性代数及其应用导论

[美] Tom M. Apostol 著
沈 灏 沈佳辰 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用导论/（美）阿波斯托尔（Apostol, T.M.）著；沈灏，沈佳辰译. —北京：人民邮电出版社，2010. 11

(图灵数学 · 统计学丛书)

书名原文：Linear Algebra: A First Course, with Applications to Differential Equations

ISBN 978-7-115-23890-0

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①阿… ②沈… ③沈… Ⅲ. ①线性代数 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 182495 号

内 容 提 要

本书篇幅适中，叙述简洁，通俗易懂，是一本非常好的线性代数入门教材. 主要内容包括向量代数、线性空间、线性变换、矩阵、行列式和二次型等. 书中内容独具特色，自成体系，从基础知识讲起，进而进入线性代数的核心内容，最后达到应用，理论和应用并重. 最后 3 章介绍了线性代数在微分方程中的应用.

本书适合数学专业和其他各理工科专业高年级本科生和研究生作为教材，也值得数学教师和相关研究人员参考.

线性代数及其应用导论

◆ 著 [美]Tom M. Apostol
译 沈 灏 沈佳辰
责任编辑 明永玲

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn
网址：http://www.ptpress.com.cn
北京铭成印刷有限公司印刷

◆ 开本：700×1000 1/16
印张：21.5
字数：431 千字 2010 年 11 月第 1 版
印数：1–3 000 册 2010 年 11 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号 图字： 01-2010-0828 号

ISBN 978-7-115-23890-0

定价：59.00 元

读者服务热线：(010)51095186 印装质量热线：(010) 67129223

反盗版热线：(010)67171154

版 权 声 明

译 者 序

本书是美国数学家 Tom M. Apostol 编著的著名教材, 是 Apostol 教授在其两卷本教材 *Calculus, Second Edition* 中线性代数部分的基础上整理补充和更新后单独组成的.

本书对线性代数的基本概念、基础理论、重要方法和技巧进行了比较深入系统的介绍. 特别是, 书中用了三章的篇幅论述线性代数在微分方程理论中的应用.

为了便于学生学习, 在正文之前对本书用到的一些预备知识做了简要的介绍.

本书由沈灏和沈佳辰翻译, 其中沈佳辰翻译本书前五章, 沈灏翻译其余各章.

最后, 对本书术语的翻译作一点说明, 即在一般的线性代数教材中, 通常也称抽象线性空间的元素为"向量 (vector)", 这样比较有利于为抽象空间建立直观的几何类比. 但在本书中还是遵照英文原著的意思, 称抽象线性空间中的元素为"元素 (element)". 不足之处, 敬请读者批评指证.

译 者 介 绍

沈　灏　1945 年生, 上海交通大学数学系教授、博士生导师, 研究方向: 组合设计, 有限几何与编码理论. 曾任中国数学会理事, 上海市数学会理事; 1993 年获 "全国优秀教师" 称号, 1998 年获 "宝钢优秀教师奖", 2007 年获 "上海市教学名师奖" .

沈佳辰　1979 年生, 1991 年获上海交通大学学士学位, 2007 年获美国路易斯大学博士学位, 高级工程师, 研究方向: 计算机理论, 信息安全.

前　言

我的两卷本教材《微积分》包含了单变量与多变量函数的微积分、微分方程、无穷级数、线性代数、概率论与数值分析等内容. 多年来, 朋友们一直催促我在《微积分(第 2 版)》的基础上编写一本线性代数教材. 两卷本《微积分》已被翻译成意大利文并分成三卷出版, 其中第二卷介绍的就是线性代数内容, 从某种角度说, 朋友们对我的期望已经实现. 本书是作为与《微积分》的各卷彼此独立的教材编写的.

为安排有关背景材料的需要, 本书从回顾某些预备知识 (第 0 章) 开始. 预备知识分为两部分: 与微积分无关的预备知识, 用以理解从第 1 章到第 7 章的内容; 关于微积分的预备知识, 这会在第 8 章到第 10 章中用到. 第 1 章和第 2 章介绍 n 维空间中的向量代数及其在解析几何中的应用, 这两章为第 3 章到第 7 章中关于线性代数的较为抽象的处理提供动力并给出实例.

第 3 章讨论线性空间、子空间、线性无关性、基与维数、内积、正交性以及 Gram-Schmidt 正交化方法. 第 4 章介绍线性变换和矩阵及其在线性方程组中的应用. 第 5 章通过行列式的性质用公理化的方法介绍行列式, 该章对行列式的处理比我在《微积分》中的处理简单. 第 6 章讨论特征值与特征向量, 包括用以导出 Cayley-Hamilton 定理的三角化定理, 还简要介绍了 Jordan 标准型. 第 7 章在欧氏空间的框架下继续讨论特征值和特征向量, 及其在二次型和二次曲线中的应用.

在第 3 章到第 7 章中, 微积分概念仅偶尔在例题与习题中出现而且易于识别, 即使略去或以后再看也不影响教材的连续性. 本书的这一部分可用作不需要用到关于微积分的预备知识的线性代数基础课程的教材. 然而, 本书更适合于那些在某种程度上学习过诸如初等微积分或有限数学等课程的读者.

第 8~10 章当然需要读者具有微积分背景. 第 8 章将线性代数概念用于 n 阶线性微分方程, 特别是常系数线性微分方程. 第 9 章利用矩阵分析讨论微分方程组, 本章主要集中在由线性代数与矩阵分析的交互作用导出指数矩阵的性质. 第 10 章利用 Picard 的逐次逼近法处理微分方程组的存在性和唯一性问题, 我们也用收缩算子的语言对此展开论述.

尽管本书大部分内容都取自我的《微积分》一书, 但还是对某些主题作了改动或重新安排, 此外, 还添加了一些新内容与新习题.

本书可用作大学本科一年级或二年级的教材, 对于那些在多年前学过数学但未学过线性代数的人, 如果现在希望学习线性代数及其基本概念又不过分强调抽象性与形式化, 本书也非常适合.

Tom M. Apostol
于加州理工学院

目　录

第0章　预 备 知 识

本章的第一部分简要介绍本书中需要用到的与微积分无关的若干预备知识：关于实数、直角坐标系、复数、数学归纳法的一些结果. 第二部分则介绍本书中用到的关于微积分的若干预备知识. 第 1 章和第 2 章将会介绍向量代数及其在解析几何中的应用, 这两章不会用到微积分中的任何知识, 而且这两章的内容为由第 3 章开始介绍的线性代数的抽象处理提供了动力和实例. 在第 3 章到第 7 章中, 微积分仅在某些例题和习题中偶尔出现, 微积分出现的地方将会清楚地标示出来, 而且即使跳过也完全不会影响对本书的阅读.

线性代数和微积分虽然是两门完全不同的学科, 但是线性代数的一些最重要的应用需要微积分中诸如积分、导数和无穷级数等概念. 熟悉一元微积分对理解这些应用, 特别是最后三章中介绍的微分方程中的应用, 毫无疑问是至关重要的. 同时, 线性代数的应用也使得对微分方程的理解显得更为自然.

I.　与微积分无关的预备知识

0.1　用直线上的点表示实数

实数可以用几何方法表示为直线上的点. 在直线上先取定两个点, 左边的点表示 0, 右边的点表示 1, 如图 0.1 所示, 这样的取法给定了这个表示的单位长度. 由欧氏几何的公理可知, 每一个实数在此直线上都有且仅有一个点与之对应. 相应地, 此直线上的每一个点都有且仅有一个实数与之对应. 我们通常称这条直线为**实直线** (real line) 或**实轴** (real axis), 称实数 x 所对应的点为点 x. 我们用记号 $\mathbb{R}$ 来表示实数全体所组成的集合.

若 $x < y$, 则点 x 在点 y 的左边, 如图 0.1 所示. 任意正实数 x 对应的点在零点右方 x 长度处, 任意负实数 x 对应的点在零点左方 $|x|$ 长度处.

图 0.1　实数在直线上的几何表示

0.2　用平面上的点表示实数对

平面上的点可以用实数对来表示. 选定平面上两条相互垂直的参考直线：一条

水平的 x 轴和一条竖直的 y 轴. 两轴的交点称为**原点** (origin), 用 O 表示. 在 x 轴上取原点右方的一点表示 1, 它和原点之间的距离称为**单位距离** (unit distance). 通常在 y 轴上也使用相同的单位距离. 平面上的每一点都有一个实数对与之对应, 该实数对称为该点的 **坐标** (coordinate), 它告诉我们如何找到这个点. 如图 0.2 所示, 坐标为 (3, 2) 的点在 y 轴右方 3 个单位距离和 x 轴上方 2 个单位距离处, 其中数 3 称为该点的 x **坐标或横坐标** (abscissa), 数 2 称为它的 y **坐标或纵坐标** (ordinate). y 轴左方的点的横坐标为负, x 轴下方的点的纵坐标为负. 为了纪念解析几何奠基人之一 —— 勒内 • 笛卡儿 (Rene Descartes, 1596—1650), 将上述定义的点的坐标称为该点的**笛卡儿坐标** (Cartesian coordinate).

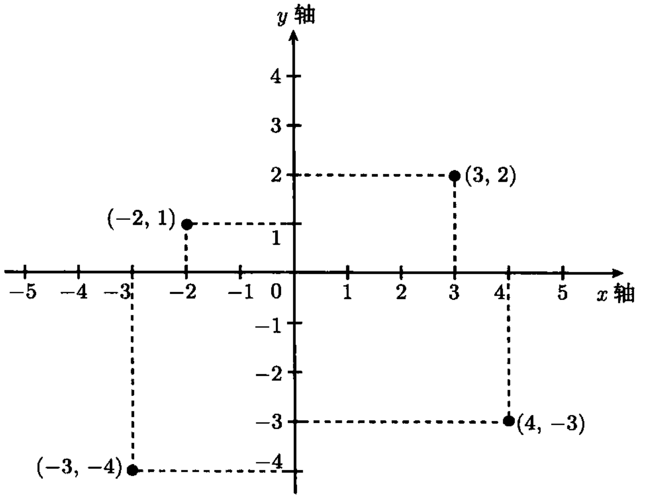


图 0.2 用实数对表示平面上的点

当我们用实数对表示一个点时, 一般将横坐标写在前面, 纵坐标写在后面. 因此, 我们使用的实数对 (a,b) 也称为有序对, 其中 a 称为它的**第一分量** (first entry), b 称为它的**第二分量** (second entry). 当且仅当 $a=c$, $b=d$ 时, 两个有序对 (a,b) 和 (c,d) 表示同一个点. 若 $a>0$, $b>0$, 则点 (a,b) 在第一象限中; 若 $a<0$, $b>0$, 则点 (a,b) 在第二象限中; 若 $a<0$, $b<0$, 则点 (a,b) 在第三象限中; 若 $a>0$, $b<0$, 则点 (a,b) 在第四象限中. 在图 0.2 中, 每个象限内均有一点.

类似地, 我们也可以确定空间中点的实数表示. 在空间中取三条交于一点 (原点) 且两两垂直的直线, 这三条直线决定了三个两两垂直的平面, 则空间中的每一个点可以由该点到这三个平面的有向距离唯一确定. 我们将在下一章中讨论三维笛卡儿坐标, 目前我们重点讨论二维的情形.

和平面中的曲线一样, 任何一个几何图形都是满足一个或多个条件的点的集合, 如果用坐标 x 和 y 来表示这些条件的话, 我们将得到一个或多个刻画该图形的

关系 (等式或不等式). 例如, 如图 0.3 所示, 考虑一个以原点为圆心, 以 r 为半径的圆. 用 (x, y) 表示此圆上的任意一点 P, 则线段 OP 是直角边长分别为 $|x|$ 和 $|y|$ 的直角三角形的斜边, 所以由勾股定理, 我们有

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

该圆上的所有点都满足该方程, 且仅有该圆上的点满足该方程, 所以, 我们称它为该圆的**笛卡儿方程** (Cartesian equation). 该圆内的所有点满足不等式 $x^2 + y^2 < r^2$, 而圆外的所有点都满足不等式 $x^2 + y^2 > r^2$. 这个例子演示了解析几何如何用来将点的几何关系化为实数的代数关系.

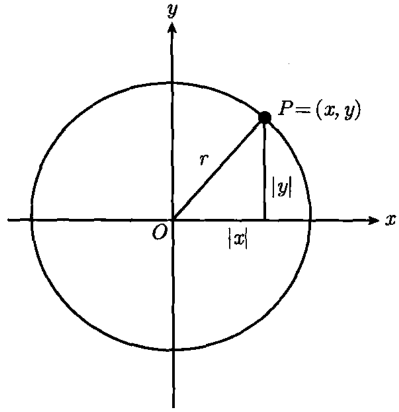


图 0.3 笛卡儿方程 $x^2 + y^2 = r^2$ 所表示的圆

0.3 极 坐 标

平面中的点也可以用极坐标来定位. 取 P 为平面上不同于原点的任意点, 设原点与点 P 之间的线段长为 $r > 0$, 且该线段与正 x 轴之间的夹角为 θ, 如图 0.4 所示, 则 r 和 θ 称为 P 的**极坐标** (polar coordinate). 极坐标和直角坐标满足以下关系:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta. \tag{0.1}$$

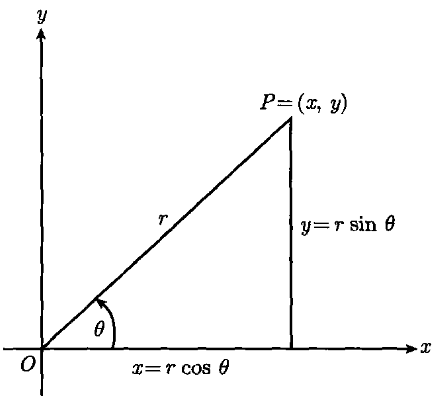


图 0.4 极坐标

我们称正数 r 为 P 的**极半径** (radial distance), 称 θ 为 P 的一个**极角** (polar angle). 考虑到若 θ 满足式 (0.1), 则对任意整数 n, $\theta + 2n\pi$ 也满足式 (0.1), 所以我们称 θ 为 P 的一个极角而不是简单地称它为 P 的极角. 若实数对 (r, θ) 满足式 (0.1), 且 $r > 0$, 则我们称它为 P 的极坐标.

极半径 r 可用公式 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 由 x 和 y 唯一确定, 不过极角 θ 不能由 x 和 y 唯一确定, 而是只能在允许相差 2π 的整数倍的意义下唯一确定.

若 P 是原点, 则 $r = 0$ 和任意 θ 均满足关系式 (0.1), 所以我们用 $r = 0$ 作为原点的极半径, 并用任意实数 θ 作为原点的极角.

用极坐标表示一些曲线比用直角坐标要方便得多. 例如, 圆心在原点, 半径为 2 的圆的笛卡儿方程为 $x^2+y^2=4$, 而在极坐标系中, 我们用更简单的方程 $r=2$ 来表示同一个圆, 而且圆内的点满足不等式 $r<2$, 圆外的点满足不等式 $r>2$.

0.4 复　　数

由于所有实数的平方都非负, 所以我们知道方程 $x^2+1=0$ 在实数系统内无解. 为了使此方程有解, 我们将引入一类新的数 —— 复数.

早在 16 世纪, 人们已经用符号 $\sqrt{-1}$ 来提供表示方程 $x^2+1=0$ 的解的方法, 这个符号后来用字母 i 代替, 它是一个虚构的、想象出来的数字, 同时除了平方是 -1 之外, 它也像所有的实数一样参与代数运算并满足这些运算的规则. 例如, 二次多项式可以进行如下因式分解:

$$x^2+1=x^2-\mathrm{i}^2=(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}).$$

另外, 我们也用 $x=\pm\mathrm{i}$ 来表示方程 $x^2+1=0$ 的解, 而不管它的具体意义是什么. 我们称诸如 $2+3\mathrm{i}$ 的表达式为**复数** (complex number). 一开始, 人们仅仅是纯形式化地使用复数, 直到约 300 年后, 才开始使用符合现代标准的方式来定义它们.

在 19 世纪早期, Carl Friedrich Gauss (1777–1855) 和 William Rowan Hamilton (1805–1865) 几乎同时且相互独立地提出使用被赋予了某些特殊性质的有序实数对 (a,b) 来表示复数的思想. 现在复数的这种表示方法已经被广泛接受, 我们将在下一节中介绍这种思想.

0.5 复数的定义与代数性质

在 0.2 节中, 我们用实数对定义平面上点的直角坐标, 本节中, 为了对复数进行代数运算, 我们用满足下列条件的实数对定义复数.

定义 *设 a 和 b 是实数, 则 (a,b) 表示一个复数, 且两个复数之间的相等、加法、乘法关系由下式定义:*

(a) *相等:* $(a,b)=(c,d)$ *当且仅当* $a=c$ *且* $b=d$.

(b) *加法:* $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$.

(c) *乘法:* $(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$.

相等的定义表明 (a,b) 是作为一个有序对使用的, 所以 $(2,3)$ 和 $(3,2)$ 是两个不同的复数. a 和 b 称为复数 (a,b) 的**分量**, 第一个分量 a 称作该复数的**实部** (real part), 第二个分量 b 称作该复数的**虚部** (imaginary part).

细心的读者会发现, 在这个定义中, 我们并没有使用 $\sqrt{-1}$ 这个符号, 事实上, 在本书中, 我们将把 i 看作一个特殊的复数, 它具有早先的数学家给虚构的符号 $\sqrt{-1}$

所赋予的所有代数性质, 为此, 我们先来讨论刚才定义的运算的基本性质.

定理 0.1 *复数的加法和乘法满足交换律、结合律、分配律. 即若 x, y, z 是任意复数, 则我们有如下性质:*

交换律: $x+y=y+x$, $xy=yx$,

结合律: $x+(y+z)=(x+y)+z$, $x(yz)=(xy)z$,

分配律: $x(y+z)=xy+xz$.

证明 由复数加法和乘法的定义, 易证本定理. 例如要证乘法结合律, 我们用分量形式表示复数 x, y, z, 设 $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$, $z=(z_1,z_2)$, 则有

$$\begin{aligned}
x(yz) &= (x_1,x_2)(y_1z_1-y_2z_2,y_1z_2+y_2z_1)\\
&= (x_1(y_1z_1-y_2z_2)-x_2(y_1z_2+y_2z_1),x_1(y_1z_2+y_2z_1)+x_2(y_1z_1-y_2z_2))\\
&= ((x_1y_1-x_2y_2)z_1-(x_1y_2+x_2y_1)z_2,(x_1y_2+x_2y_1)z_1+(x_1y_1-x_2y_2)z_2)\\
&= (x_1y_1-x_2y_2,x_1y_2+x_2y_1)(z_1,z_2)\\
&= (xy)z.
\end{aligned}$$

交换律和分配律也可类似证明. □

我们可在复数中定义零、负数、倒数、商等基本代数概念, 它们的定义如下.

我们称复数 $(0,0)$ 为**复数零** (zero). 由于对任意复数 (a,b), 有 $(0,0)+(a,b)=(a,b)$, 所以复数零是复数加法的单位元. 类似地, 考虑到对任意复数 (a,b), 有 $(a,b)(1,0)=(a,b)$, 所以复数 $(1,0)$ 是复数乘法的单位元.

由于 $(-a,-b)+(a,b)=(0,0)$, 我们称复数 $(-a,-b)$ 为 (a,b) 的**负元** (negative), 记作 $-(a,b)$.

我们定义两个复数 (a,b) 和 (c,d) 的**差** (difference) $(a,b)-(c,d)$ 为 (a,b) 与 (c,d) 的负元的和, 即 $(a,b)-(c,d)=(a,b)+(-(c,d))$.

所有的非零复数 (a,b) 都有一个相对于乘法单位元 $(1,0)$ 的**倒数** (reciprocal), 记为 $(a,b)^{-1}$. $(a,b)^{-1}$ 的定义如下式:

$$(a,b)^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right), \tag{0.2}$$

其中 $(a,b)\neq(0,0)$. 这个定义满足 $(a,b)(a,b)^{-1}=(1,0)$. 因为 $(a,b)\neq(0,0)$, 则 $a^2+b^2\neq 0$, 所以 $(a,b)^{-1}$ 对任意 $(a,b)\neq(0,0)$ 有意义.

我们定义两个复数 (a,b) 和 (c,d) 的**商** (quotient)$(a,b)/(c,d)$ 为 (a,b) 与 (c,d) 的倒数 $(c,d)^{-1}$ 的积, 即 $(a,b)/(c,d)=(a,b)(c,d)^{-1}$, 其中 $(c,d)\neq(0,0)$.

0.6 复数作为实数的推广

我们用记号 $\mathbb{C}$ 表示所有复数的集合, 设 $\mathbb{C}_0$ 是所有形如 $(a,0)$ 的复数的集合, 则 $\mathbb{C}_0$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个子集, 且它包含所有虚部为零的复数. $\mathbb{C}_0$ 中任意两个元素的和与积仍然是 $\mathbb{C}_0$ 中的元素. 事实上, 我们有

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0), \quad (a,0)(b,0)=(ab,0).$$

这两个式子表明当求 $\mathbb{C}_0$ 中两个元素的和 (或积) 时, 我们只需要求它们实部的和 (或积), 所以对于加法和乘法, $\mathbb{C}_0$ 中的数就像实数一样. 而且对于减法和除法也是如此, 这是因为 $-(a,0)=(-a,0)$, $(b,0)^{-1}=(b^{-1},0)$, 其中 $b\neq 0$. 正因如此, 实数 x 和复数 $(x,0)$ 并无本质上的区别, 我们认为 x 和 $(x,0)$ 是相同的, 并将 x 记为 $(x,0)$, 特别将 0, 1, -1 分别记为 $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$. 这样, 我们可以将复数系统看作是实数系统的一个推广.

而这么做同样也有几何意义, 在 0.9 节中, 我们将用平面上笛卡儿坐标为 x, y 的点来表示复数 (x,y), 此时 x 轴上的点即为集合 $\mathbb{C}_0$ 的几何表示.

0.7 虚数单位 i

复数具有一些实数不具备的代数性质, 例如二次方程 $x^2+1=0$ 无实数解, 但是它可用复数求解. 事实上, 复数 $(0,1)$ 就是它的一个解, 这是因为

$$(0,1)^2=(0,1)(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1,0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)=-1,$$

定义 *用符号 i 表示复数 $(0,1)$, 并称它为虚数单位.*

虚数单位具有平方为 -1 的性质, 即 $\mathrm{i}^2=-1$, 从而 $x=\mathrm{i}$ 是二次方程 $x^2+1=0$ 的解. 读者容易验证 $x=-\mathrm{i}$ 也是此方程的解.

现在我们可以建立复数的有序实数对表示与早期数学家使用的记号之间的关系了. 首先, 由复数乘法定义可得 $(b,0)(0,1)=(0,b)$, 于是我们有

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1).$$

因此, 若记 $a=(a,0)$, $b=(b,0)$, $\mathrm{i}=(0,1)$, 则有 $(a,b)=a+b\mathrm{i}$. 由此, 我们证明了如下定理.

定理 0.2 *任意复数 (a,b) 都可表示为 $(a,b)=a+b\mathrm{i}$ 的形式.*

这种记法使关于复数加法和乘法的运算更便捷. 例如, 计算 $a+b\mathrm{i}$ 和 $c+d\mathrm{i}$ 的积, 运用分配律和结合律以及 $\mathrm{i}^2=-1$, 有

$$(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=ac-bd+(ad+bc)\mathrm{i},$$

此式显然符合复数乘法的定义. 类似地, 计算非零复数 $a+b\mathrm{i}$ 的倒数, 我们有

$$\frac{1}{a+b\mathrm{i}}=\frac{a-b\mathrm{i}}{(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})}=\frac{a-b\mathrm{i}}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b\mathrm{i}}{a^2+b^2},$$