提分攻略
T·I·F·E·N·G·O·N·G·L·U·E

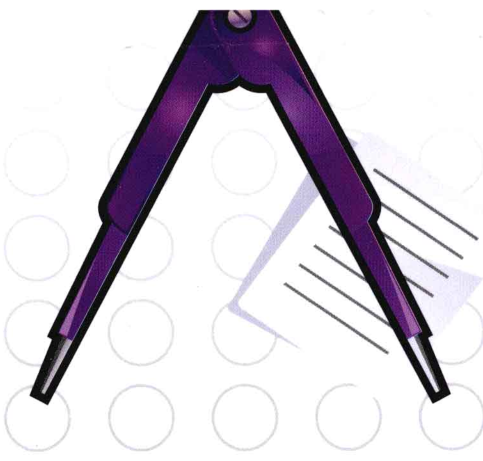
Shu
Li Bao
Jing Bian
数理报精编

疑难与规律详解

YINAN YU GUILǗ XIANGJIE

☆修订版☆

全国百位名师联合编写



高中数学❷
（必修5+选修）

主编　蔡晔

龍門書局
www.longmenbooks.com

提分攻略
TIFENGONGLUE

Shu Li Bao Jing Bian
数理报精编

疑难与规律详解

YINAN YU GUILÜ XIANGJIE

修订版

高中数学2

（必修5+选修）

主编　蔡　晔
编委　刘　林　杜海东

龍門書局
北京

图书在版编目(CIP)数据

提分攻略:疑难与规律详解. 高中数学 2(必修 5 + 选修)/蔡晔主编. 北京:龙门书局,2009
ISBN 978-7-5088-2079-8

Ⅰ. 提…　Ⅱ. 蔡…　Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ. G634.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 105405 号

责任编辑:潘恭华　黄　利/封面设计:艺和天下

龍門書局出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
www.longmenbooks.com
世界知识印刷厂印刷
科学出版社总发行　各地书店经销
*
2009 年 7 月第　一　版　　开本:B5
2010 年 5 月修　订　版　　印张:15 1/4
2010 年 5 月第四次印刷　　字数:305 000

定　价:28.00 元
(如有印装质量问题,我社负责调换)

使用说明

您在学习中遇到过难以理解的知识点吗？

您在考试中碰到过难以解答的试题吗？

您还在苦苦地寻觅学习的规律、解题的技巧吗？

您还经常为那些“看似容易，一做就错”的易错题苦恼吗？

知识疑难解读

本栏目针对各章节的重点、难点，将教材内容归纳出几个专题，并分别给予详细的讲解和点拨。同学们在掌握了教材中基本概念的基础上仔细研读本栏目内容，将在重点和难点知识理解方面有一个质的飞跃。

知识疑难解读

有理数的意义疑难解读　（山东　李祥伦）

理解有理数的概念，要注意以下几个问题：

1. 有限小数可化成分母是10，100，1000，…的分数，如 $0.9=\frac{9}{10}$，$5.47=5\frac{47}{100}$，故在有理数的分类表中，这样的小数包括在分数中.

2. 整数也可看作是分母为1的分数，因此一切有理数都可表示为最简分数 $\frac{p}{q}$（$q\neq 0$）的形式，这里的分数是指不包括整数的分数，因此有理数的分类有两种：

思维规律解读

本栏目总结了各章节的各类思维和解题规律，分析指导了应用性、探索性和开放性问题的解题思路，并针对各章节重要考点作了深入剖析。本栏目的思维要求较高，例题有一定的难度，需要同学们首先弄懂教材上的例题和思维方法，再来研读。

思维规律解读

绝对值中的解题规律　（山东　邱振中）

1. 正确判断正负数，准确写出绝对值

例 1　三个数 a、b、c 在数轴上的对应点如图1-2所示，化简 $a+|a+b|-|c|-|b-c|$.

图1-2

解答：由图1-2可知 $c<0$，$b<0$，$a>0$，$b<c$，$|b|>|a|$.

所以 $a+b<0$，$b-c<0$.

所以原式 $=a-a-b+c+b-c=0$.

2. 逆用绝对值的性质解题

例 2　已知 $|a-1|=2$，$|b|=3$，且 $a>b$，则 $a+b$ 的值为________.

解析：由 $|\pm 2|=2$，所以 $a-1=2$ 或 $a-1=-2$，

疑难知识　逐个突破
思维规律　完整呈现
方法技巧　详细解读

思维误区破解

正负数误区点拨

（山西　马志君　重庆　王帮胜）

误区一：没有正确理解正数和负数致误

例 1　下列各数哪些是正数？

$+2007,-3.1,\frac{1}{2},10.58,0,-9,+1.$

错解：正数有+2007，0，+1.

剖析：没有明确正数的含义及其表示方法，"+"号是可以省略不写的，而且0既不是正数，也不是负数.

正解：正数有+2 007，$\frac{1}{2}$，10.58，+1.

例 2　下列说法中，正确的是（　　）

A. 一个有理数不是正数，就是负数

B. 一个整数不是正整数，就是负整数

C. 非正数是指负整数和负分数

D. 0是最小的自然数

错解：C

本栏目精选同学们容易出现的错误理解和错误解题思路，作深入的剖析，并向正确的思维引导。在研读这一栏目内容时，要结合自己的错题笔记，融会贯通，切勿死记硬背。

思维误区破解

1. 若规定 $f(a)=-|a|$，则 $f(-2\,009)=$________.

2. 小李在做题时，画了一个数轴，在数轴上原有一点A，其表示的数是−3，由于粗心，他把数轴的原点标错了位置，使点A正好落在−3的相反数的位置，想一想，要把数轴画正确，原点要向哪个方向移动几个单位长度？

本栏目针对"新题型""疑难题""思维误区题"进行训练。通过对本栏目的训练，达到突破疑难题、纠正易错题、体验新题型的目的。

挑战疑难

前言

本书编写背景

新课标教学和新的中、高考改革，越来越重视学生思维能力、应用能力和创新能力。在这三种能力中，思维能力是核心。而提高思维能力不是一蹴而就的，需要选择好的知识载体、好的学习方法，通过科学的培训才能见效。

目前中学使用的教材有很多种版本，每种版本由于本身的篇幅所限，教材对知识的深度挖掘和对思维的纵向拓展不够。因此，教师需要花大量的时间去研究教材，搜集、整理教学资料。学生们也要根据自身情况寻找合适的学习资源，研究学习方法。这无疑给广大师生带来了很大的负担。

《数理报》作为一份专门为一线教学服务的优秀报刊，非常好地解决了教材、教学、学习、考试等各环节的衔接问题。重知识、讲方法，为师生释疑解难，归纳总结，让学生们能够灵活应用知识规律解决问题，并有所创新。鉴于此，我们组织了一批经验丰富的一线教师，将《数理报》多年来积淀下来的精华内容进行重新加工和整合，根据“新课标”和“考试说明”的要求，分模块、分年级编排成册，省去了广大师生搜集资料的繁琐工作。

本书优势所在

一、既有报刊的深度和灵活性，又具有图书的广度和系统性。

本书传承了报刊文章内容深刻、实用、针对性强的特点，同时克服了其随意性和系统性差的缺点，因此本书既有报刊的深度和灵活性，又具有图书的广度和系统性。

二、紧扣课标要求，可以配合同步教学使用。

《数理报》已得到全国几百万师生的认可，其版本配备全，是一份同步辅导报。本书融合了《数理报》所有的配版分刊，并根据知识模块加以整合。因此适用于各个版本不同学段的同步教学和学习使用。

三、内容覆盖面广，重点突出，专门解决“疑难”和“规律”问题。

本书的编写定位于解决教学、学习、考试中的疑难问题，总结归纳出解决问题的方法规律，旨在为广大师生突破教学、学习中的难点，找到提高思维能力的捷径。

四、编写队伍庞大，实力雄厚。

本书取材于《数理报》，汇集了来自全国各地的一线教师，有德高望重的教育教学专家，有教学成绩优异的中青年骨干教师，他们是我国目前中学教学一线优秀教师的代表，是一线教师队伍的精英。

目录

CONTENTS

第一部分　必修5

第二部分 选修

第一部分 必修5

第一章 解三角形

知识疑难解读

解三解形剖析

（山东 石磊）

1. 三角形中常用公式：

$c=a\cos B+b\cos A$，$b=c\cos A+a\cos C$，$a=b\cos C+c\cos B$；

$\sin(A+B)=\sin C$，$\cos(A+B)=-\cos C$；

$\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$，$\cos\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$.

2. 三角形面积公式：

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{abc}{4R}=2R^2\sin A\sin B\sin C$（$R$为外接圆半径）$=\dfrac{1}{2}(a+b+c)r$（$r$为内切圆半径）.

3. 三角形形状的判断

如果c是三角形的最大边，则有：

$a^2+b^2>c^2\Leftrightarrow$三角形$ABC$是锐角三角形；

$a^2+b^2<c^2\Leftrightarrow$三角形$ABC$是钝角三角形；

$a^2+b^2=c^2\Leftrightarrow$三角形$ABC$是直角三角形.

思维规律解读

增设参数在解三角形中的应用

（江苏 宋振苏）

例1 在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$AC=3$，点D是边BC的中点，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$________.

分析：本题若直接解答似乎难以下手求解，这里若增设参数x,y，设$\triangle ABC$中的线段$AD=y$，$BD=DC=x$，可得如下简解：

解答：如图1-1，因点D是边BC的中点，连结AD，设$AD=y$，$BD=DC=x$，记$\angle ADB=\theta$，则$\angle ADC=\pi-\theta$，注意到$AB=2$，$AC=3$，所以在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中，分别运用余弦定理可得：$2^2=x^2+y^2-2xy\cos\theta$，$3^2=x^2+y^2-2xy\cos(\pi-\theta)$将以上两式两边分别相减可得：$4xy\cos\theta=5$，所以$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}=2xy\cos\theta=\dfrac{5}{2}$.

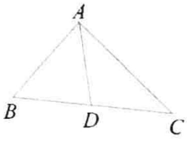


图1-1

例2 在$\triangle ABC$中，$\tan A=\dfrac{1}{4}$，$\tan B=\dfrac{3}{5}$.

(1)求角C的大小；

(2)若$\triangle ABC$最大边的边长为$\sqrt{17}$，求最小边的边长.

分析：本题直接运用两角和的正切公式及正弦定理可以求解，但较为繁琐，这里若过点C作$CD\perp AB$，垂足为D，并增设参数k，使$CD=3k$ $(k>0)$，可得如下简解：

解答：(1)如图1-2，过$\triangle ABC$的顶点C作$CD\perp AB$，垂足为D，设$CD=3k$ $(k>0)$，则$AD=12k$，$BD=5k$，进而可得$AC=3\sqrt{17}k$，$BC=\sqrt{34}k$.

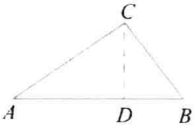


图1-2

由余弦定理得：

$$\cos C=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以$C=\dfrac{3\pi}{4}$.

(2)由(1)知$AB>AC>BC$，则$AB=17k=\sqrt{17}$，故$k=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$，所以最小边为$BC=\sqrt{34}k=\sqrt{34}\times\dfrac{1}{\sqrt{17}}=\sqrt{2}$.

例3 在$\triangle ABC$中，已知$AB=5$，$\cos\angle ABC=\dfrac{1}{7}$，$AC$边上的中线$BD=\sqrt{21}$，试求$\triangle ABC$的内角$A$.

分析：本题若直接解答似乎难以下手求解，其实这里若增设参数 x，y，使$\triangle ABC$中的$AC=2x$，$BC=y$，可得如下简解：

解答：如图 1-3，设 $AC=2x$，$BC=y$，点 D 是边 AC 的中点，则 $AD=DC=x$，若记$\angle ADB=\theta$，则$\angle BDC=\pi-\theta$，注意到 $AB=5$，因此在$\triangle ABD$和$\triangle BCD$中，分别运用余弦定理可得：

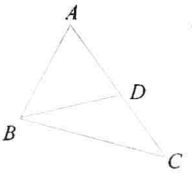


图 1-3

$5^2=x^2+BD^2-2xBD\cos\theta$；

$y^2=x^2+BD^2-2xBD\cos(\pi-\theta)$，

将以上两式两边分别相加可得：

$y^2+25=2x^2+42$；又因 $\cos\angle ABC=\dfrac{1}{7}$，

故在$\triangle ABC$中应用余弦定理可得：$4x^2=25+y^2-2\times5y\cos\angle ABC$，即 $4x^2=25+y^2-\dfrac{10}{7}y$，

结合 $y^2+25=2x^2+42$ 消去 x^2 并整理得，$7y^2+10y-7\times59=0$，

解之得：$y=7$，$y=-\dfrac{59}{7}$（舍去），

将 $y=7$ 代入 $y^2+25=2x^2+42$ 可得：$x=4$，所以由余弦定理得：

$49=64+25-2\times5\times8\cos A$，

得 $\cos A=\dfrac{1}{2}$，

故所求$\triangle ABC$的内角 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

点评：从上例的解析可以看出，解答某些解三角形问题时，可依据题设条件适时增设参变量，借助解三角形的有关工具构建方程或方程组，通过解出这些参变量或不解出而整体代换，可使这些问题简捷、巧妙地获解，品味这些问题的解答过程，进一步体验和感悟数学中的参数思想、方程思想、设而不求与整体代换等数学思想的灵魂和真正内涵.

"三类"应用问题解析

（湖北　张大任）

1. 求距离问题

例 4　某轮船以 30 海里/小时的速度航行，在 A 点测得灯塔 M 在南偏东 60°，向北航行 40 分钟后到 B 点，测得灯塔在南偏东 30°，如果轮船改为北偏东 60°的航向再行驶 80 分钟到达 C 点，求 M，C 两点间的距离.

分析：据题意作出图形（如图 1-4），在$\triangle ABM$中，找出各已知边与角，利用正弦定理求 BM，然后在 Rt$\triangle BCM$ 中，利用勾股定理求解 MC.

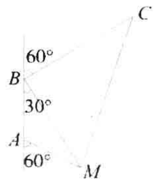


图 1-4

解答：已知在$\triangle ABM$中，

$AB=30\times\dfrac{40}{60}=20$，

$\angle AMB=30°$，$\angle BAM=120°$，

由正弦定理得$\dfrac{AB}{\sin\angle AMB}=\dfrac{BM}{\sin\angle BAM}$，

即$\dfrac{20}{\sin30°}=\dfrac{BM}{\sin120°}$. 解得 $BM=20\sqrt{3}$.

因为在$\triangle BCM$中，$BC=30\times\dfrac{80}{60}=40$，$\angle CBM=90°$，

所以由勾股定理得

$MC=\sqrt{BM^2+BC^2}=\sqrt{(20\sqrt{3})^2+40^2}=20\sqrt{7}$.

故 M，C 两点间的距离为 $20\sqrt{7}$海里.

点评：解决本题的关键在于如何把实际问题转化为解斜三角形问题（即建立数学模型），这也是应用题的难点所在.

2. 求高度问题

例 5　为测量建造中的奥运会体育馆已到达的高度，张明在附近找了 A，B，C 三点，$AB=BC=60$ 米，且在 A，B，C 三点观测该馆的最高点，测得仰角分别为 45°，54.2°，60°. 已知张明身高为 1.7 米，试求建造的体育馆已到达的高度（结果保留一位小数）.

分析：根据题意画出示意图，如图 1-5 所示，设 $DE=x$，则 AE，BE，CE 都可用 x 来表示，在$\triangle ACE$和$\triangle BCE$中同时用余弦定理列出方程，便可求出 x.

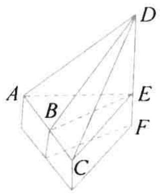


图 1-5

解答：设体育馆高 $DF=h$，$DE=x$，则 $h=x+1.7$.

在 Rt$\triangle AED$，Rt$\triangle BED$，Rt$\triangle CED$ 中，

$AE=DE\cdot\cot45°=x$；

$BE=DE\cdot\cot54.2°=x\cdot\cot54.2°$；

$CE=DE\cdot\cot60°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$.

在△BCE和△ACE中，由余弦定理得

$$\cos\angle BCE=\frac{BC^2+CE^2-BE^2}{2BC\cdot CE}=\frac{AC^2+CE^2-AE^2}{2AC\cdot CE}$$

即$$\frac{60^2+\frac{x^2}{3}-(x\cot54.2°)^2}{2\times60\times\frac{\sqrt{3}}{3}x}=\frac{120^2+\frac{x^2}{3}-x^2}{2\times120\times\frac{\sqrt{3}}{3}x},$$

解得 $x\approx156.75$，故 $h=158.5$(米).

故建造中的体育馆现在已大约达到 158.5 米.

点评：在解决斜三角形问题时，要注意仰角、俯角等名词，并准确地找出这些角. 仰角或俯角：与目标视线在同一铅垂平面内的水平视线上方时叫仰角，目标视线在水平视线下方时叫俯角.

3. 航海中方位角问题

例 6　在海岸 A 处，发现北偏东 45°方向，距 $A(\sqrt{3}-1)$ n mile 的 B 处有一艘走私船，在 A 处北偏西 75°方向，距 A 2n mile 的 C 处的缉私船奉命以 $10\sqrt{3}$ n mile/h 的速度追从 B 处向北偏东 30°方向逃窜的走私船. 走私船速度 10 n mile/h. 问缉私船怎样才能最快追上走私船？并求出所需要的时间.

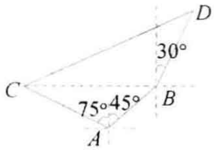


图 1-6

分析：由题意，先作出如图 1-6 所示的方位图形.

解答：设缉私船追上走私船所需时间为 t h，则有 $CD=10\sqrt{3}t$，$BD=10t$.

在△ABC中，$AB=\sqrt{3}-1$，$AC=2$，

$\angle BAC=45°+75°=120°$，

根据余弦定理 $BC=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+2^2-2\times2\times(\sqrt{3}-1)\cos120°}=\sqrt{6}$.

根据正弦定理得

$$\sin\angle ABC=\frac{AC\cdot\sin120°}{BC}=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以$\angle ABC=45°$，

而$\angle CBD=90°+30°=120°$.

在△BCD中，根据正弦定理

$\sin\angle BCD=\frac{BD\cdot\sin\angle CBD}{CD}=\frac{10t\cdot\sin120°}{10\sqrt{3}t}=\frac{1}{2}$，所以$\angle BCD=30°$，$\angle BDC=30°$.

所以 $BD=BC=\sqrt{6}$，则有 $10t=\sqrt{6}$，

$t=\frac{\sqrt{6}}{10}=0.245$ h$=14.7$ min.

所以缉私船沿北偏东 60°方向，需 14.7 min 才能追上走私船.

点评：掌握方位角的概念，会识图作图，才能正确求解此类问题.

正、余弦定理及其变形的应用策略

（山东　胡大波）

1. 观察式子的特征，直接应用正、余弦定理解题

在已知条件中，往往含有选用正、余弦定理的蛛丝马迹，充分识别这些信息，有助于寻找解题的途径.

例 7　在△ABC中，若$\frac{a^3+b^3-c^3}{a+b-c}=c^2$，$\sin A\sin B=\frac{3}{4}$，试判断△$ABC$的形状.

分析：通过观察已知式子，可以看出与余弦定理有关，设法把边的关系转化为角的关系，从而把角 C 求出，使问题得以解决.

解答：由$\frac{a^3+b^3-c^3}{a+b-c}=c^2$，

得 $a^3+b^3-c^3=(a+b)c^2-c^3$.

即 $a^2-ab+b^2=c^2$.

所以 $a^2+b^2-c^2=ab$.

所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$，

可得 $C=\frac{\pi}{3}$. 从而 $A+B=\frac{2\pi}{3}$.

又 $\sin A\sin B=\frac{3}{4}$，

则$-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)]=\frac{3}{4}$，

所以 $\cos(A-B)=1$. 所以 $A=B=\frac{\pi}{3}$.

故△ABC是等边三角形.

点评：若题目中含有 $a^2-ab+b^2=c^2$ 或其变形式子往往可以应用余弦定理求解.

2. 应用正、余弦定理的变形解题

正余弦定理有一些重要的变形，如正弦定理的变形有：$\frac{a}{2R}=\sin A$；$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$；$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=2R$ 等. 余弦定理的变形有：$\left(\frac{a}{b}\right)^2=1+\left(\frac{c}{b}\right)^2-2\cdot\frac{c}{b}\cdot\cos A$；$\left(\frac{b}{c}\right)^2=1+\left(\frac{a}{c}\right)^2-2\cdot\frac{a}{c}\cdot\cos B$ 等. 若已知三角形两边之比及其夹角，用此变式往往可以快速求解.

例 8 已知 A,B,C 是△ABC 的三个内角，它们的对边分别是 a,b,c，且 $B=\frac{1}{2}(A+C)$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，求此三角形三个内角的度数.

解答：因为 $B=\frac{1}{2}(A+C)=\frac{1}{2}(180°-B)$，

所以 $B=60°$.

而 $\left(\frac{b}{a}\right)^2=1+\left(\frac{c}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}\cdot\cos B=\frac{3}{2}$.

又由正弦定理得 $\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}=\sqrt{\frac{3}{2}}$，

可得 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $A=45°$ 或 $A=135°$(不合题意舍去).

所以 $C=180°-45°-60°=75°$.

故三角形的三个内角分别是 $45°,60°,75°$.

3. 灵活应用正、余弦定理，联袂求解问题

有一些三角问题需要综合应用正余弦定理求解，由余弦定理有：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，根据正弦定理有：$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$，将后者代入前者得：$\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C-2\sin B\sin C\cos A$. 此式反映了三角形的三个内角所满足的一种关系. 应用它可以解决三角求值问题.

例 9 在△ABC 中，如果 $a^2+b^2=2005c^2$，试求 $\dfrac{\frac{1}{\tan C}}{\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}}$ 的值.

解答：依题设并结合正弦定理，得

$\sin^2A+\sin^2B=2005\sin^2C$.

又 $\sin^2C=\sin^2A+\sin^2B-2\sin A\sin B\cos C$，

所以 $\sin^2C=2005\sin^2C-2\sin A\sin B\cos C$.

即 $\sin A\sin B\cos C=1002\sin^2C$.

$$原式=\frac{\frac{\cos C}{\sin C}}{\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}}=\frac{\sin A\sin B\cos C}{\sin C(\cos A\sin B+\sin A\cos B)}=\frac{\sin A\sin B\cos C}{\sin C\sin(A+B)}=\frac{\sin A\sin B\cos C}{\sin^2C}=1002.$$

正、余弦定理中数学思想的渗透

（山东　仇玲）

1. 化归与转化思想

例 10 在△ABC 中，已知 $(a^2+b^2)\cdot\sin(A-B)=(a^2-b^2)\cdot\sin(A+B)$，试判断△$ABC$ 的形状.

解答：由 $(a^2+b^2)\cdot\sin(A-B)=(a^2-b^2)\cdot\sin(A+B)$ 得

$a^2[\sin(A-B)-\sin(A+B)]+b^2[\sin(A-B)+\sin(A+B)]=0$.

所以 $a^2\cos A\sin B=b^2\sin A\cos B$.

解法一：由正弦定理，得

$\sin^2A\cos A\sin B=\sin^2B\sin A\cos B$.

即 $\sin A\sin B(\sin 2A-\sin 2B)=0$.

因为在△ABC 中，$\sin A\sin B\neq 0$，

所以 $\sin 2A-\sin 2B=0$.

又因为 $0<A,B<\pi$，

所以 $A+B=90°$ 或 $A=B$.

所以△ABC 是等腰三角形或直角三角形.

解法二：由正弦定理和余弦定理，得

$a^2\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot b=b^2\cdot a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$.

化简得 $a^4-a^2c^2+b^2c^2-b^4=0$.

所以 $(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$.

所以 $a=b$ 或 $a^2+b^2=c^2$.

故△ABC 是等腰三角形或直角三角形.

点评：已知三角形的边角关系判断三角形形状时，一般采用化归与转化的思想：化边为角（如解法1）或化角为边（如解法2），其中要以正弦定理和余弦定理作为桥梁来实现这两种转化．

2. 方程思想

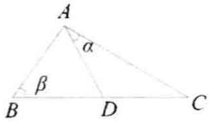


图 1-7

例 11　如图 1-7，D 是直角 $\triangle ABC$ 斜边 BC 上一点，$AB=AD$，记 $\angle CAD=\alpha$，$\angle ABC=\beta$．

（1）证明：$\sin\alpha+\cos 2\beta=0$；

（2）若 $AC=\sqrt{3}DC$，求 β 的值．

解答：（1）因为 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\angle BAD=\frac{\pi}{2}-(\pi-2\beta)=2\beta-\frac{\pi}{2}$，

所以 $\sin\alpha=\sin\left(2\beta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2\beta$．

即 $\sin\alpha+\cos 2\beta=0$．

（2）在 $\triangle ADC$ 中，由正弦定理，得

$\frac{DC}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin(\pi-\beta)}$．即 $\frac{DC}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{3}DC}{\sin(\pi-\beta)}$，

所以 $\sin\beta=\sqrt{3}\sin\alpha$．

又由（1）可知：$\sin\alpha=-\cos 2\beta$，

所以 $\sin\beta=-\sqrt{3}\cos 2\beta=-\sqrt{3}(1-2\sin^2\beta)$，

即 $2\sqrt{3}\sin^2\beta-\sin\beta-\sqrt{3}=0$．

解得 $\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\sin\beta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$．

因为 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$，故 $\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，从而 $\beta=\frac{\pi}{3}$．

点评：第（2）问借助正弦定理得到“$\sin\beta=\sqrt{3}\sin\alpha$”，结合第（1）问的结论消去 α 角，把问题转化为关于 $\sin\beta$ 的一元二次方程，通过解方程求得．此题灵活运用了消元思想和方程思想．

3. 分类讨论思想

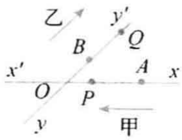


图 1-8

例 12　如图 1-8，有两条相交成 $60°$ 的直线 xx'，yy'，其交点为 O，甲、乙两辆汽车分别在 xx'，Oy' 上行驶，起初甲离 O 点 30 km，乙离 O 点 10 km，后来两车均用 60 km/h 的速度，甲沿 xx' 方向，乙沿 yy' 方向行驶（设甲、乙两车最初的位置分别为 A，B）．

（1）起初两车的距离是多少？

（2）用包含 t 的式子表示，t 小时后两车的距离是多少？

解答：（1）由余弦定理，知

$$AB^2=OA^2+OB^2-2\times OA\times OB\times\cos 60°$$
$$=30^2+10^2-2\times 30\times 10\times\frac{1}{2}=700.$$

故 $AB=10\sqrt{7}$（km）．

即起初两车的距离是 $10\sqrt{7}$ km．

（2）设甲、乙两车 t 小时后的位置分别为 P，Q，则 $AP=60t$，$BQ=60t$．

①当 $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$\angle POQ=60°$．

此时 $OP=30-60t$，$OQ=10+60t$．

由余弦定理，得

$$PQ^2=(30-60t)^2+(10+60t)^2-2\times(30-60t)(10+60t)\cos 60°$$
$$=10\,800t^2-3\,600t+700.$$

②当 $t>\frac{1}{2}$ 时，$\angle POQ=120°$．

此时 $OP=60t-30$，$OQ=10+60t$．

由余弦定理，得

$$PQ^2=(60t-30)^2+(10+60t)^2-2\times(60t-30)(10+60t)\cos 120°$$
$$=10\,800t^2-3\,600t+700.$$

综上知 $PQ^2=10\,800t^2-3\,600t+700$．

则 $PQ=10\sqrt{108t^2-36t+7}$．

故 t 小时后两车的距离是

$PQ=10\sqrt{108t^2-36t+7}$（km）．

点评：本题是一个解三角形的实际问题，由于两车的行驶方向导致以 O 点为起点的两线段的夹角发生变化，因此必须对两种情况进行分类讨论．

四、数形结合理想

数形结合的解题方法，就是把数学问题中的数量关系和几何图形结合起来考虑的思维方法，其实质就是将抽象的数学语言与直观的图形结合起来，抽象思维和形象思维结合起来，使

抽象问题具体化，复杂问题简单化，通过“数”和“形”的联系和转化，从而使问题得以解决.

例13 在斜度一定的山坡上的一点 A 测得山顶上一建筑物顶端 C 对于山坡的斜度为 $15°$，向山顶前进 100 m 后，又从 B 点测得斜度为 $45°$. 设建筑物的高为 50 m，求山坡对于地平面的斜度的倾斜角 θ 的余弦值.

分析：本题是测量角度问题，首先应根据题意画出图形，如图 1-9 所示. 设山坡对于地平面的斜度的倾斜角 $\angle EAD=\theta$，这样可在 $\triangle ABC$ 中利用正弦定理求出 BC；再在 $\triangle BCD$ 中，利用正弦定理得到关于 θ 的三角函数关系式，进而解出 θ.

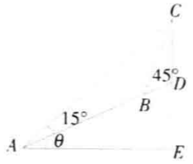


图 1-9

解答：在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=15°$，$\angle CBA=180°-45°=135°$，$\angle ACB=30°$，$AB=100$ m.

根据正弦定理，有 $\dfrac{100}{\sin30°}=\dfrac{BC}{\sin15°}$ 所以 $BC=\dfrac{100\sin15°}{\sin30°}$.

又在 $\triangle BCD$ 中，$CD=50$，$BC=\dfrac{100\sin15°}{\sin30°}$，$\angle CBD=45°$，$\angle CDB=90°+\theta$.

根据正弦定理，有 $\dfrac{50}{\sin45°}=\dfrac{\dfrac{100\sin15°}{\sin30°}}{\sin(90°+\theta)}$.

解得 $\cos\theta=\sqrt{3}-1$.

即山坡对于地面的斜度的倾斜角的余弦值为 $\sqrt{3}-1$.

点评：题中已知条件较多，为了求倾斜角，根据题意画出其示意图，将已知条件归结到 $\triangle ABC$ 与 $\triangle BCD$ 中. 在 $\triangle BCD$ 中，利用三角形的性质，将 $\angle CDB$ 与角 θ 联系起来，从而在两个三角形中，利用正弦定理将 θ 求出.

有关解三角形的创新题 （湖北 张大任）

1. 探究型创新题

例14 有一解三角形的题因纸张破损有一个条件不清，具体如下：在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=\sqrt{3}$，$B=45°$，______________，求角 A. 经推断破损处的条件为三角形一边的长度，且答案提示 $A=60°$，请直接在题中横线上将条件补充完整.

解析：由正弦定理，得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

即 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin60°}=\dfrac{b}{\sin45°}$，得 $b=\sqrt{2}$.

由余弦定理，得

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{2+c^2-3}{2\times\sqrt{2}\cdot c}=\dfrac{1}{2}$，

可求出 $c=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$. 故填 $c=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

点评：此题属于条件探究型问题，运用正弦定理、余弦定理求解问题.

2. 开放型创新题

例15 三角形 ABC 的三个内角 A,B,C 的对边的长分别为 a,b,c，有下列两个条件：(1) a,b,c 成等差数列；(2) a,b,c 成等比数列.

现给出三个结论：

(1) $0<B\leqslant\dfrac{\pi}{3}$；

(2) $a\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{3b}{2}$；

(3) $1<\dfrac{1+\sin2B}{\cos B+\sin B}\leqslant\sqrt{2}$.

请你选取给定的两个条件中的一个为条件，三个结论中的两个为结论，组建一个你认为正确的命题，并证明之.

解答：三角形 ABC 的三个内角 A,B,C 的对边的长分别为 a,b,c，若 a,b,c 成等差数列，则 $0<B\leqslant\dfrac{\pi}{3}$ 且 $a\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{3b}{2}$.

证明如下：

因为 a,b,c 成等差数列，所以 $b=\dfrac{a+c}{2}$.

所以 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+c^2-\left(\dfrac{a+c}{2}\right)^2}{2ac}$

$=\dfrac{3(a^2+c^2)-2ac}{8ac}\geqslant\dfrac{6ac-2ac}{8ac}=\dfrac{1}{2}$.

当且仅当 $a=c$ 时，取等号.

角 B 是三角形 ABC 的一个内角，

所以 $0<B\leqslant\dfrac{\pi}{3}$.

又因为 $a\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{A}{2}$

$=a\cdot\dfrac{1+\cos C}{2}+c\cdot\dfrac{1+\cos A}{2}$

$=\dfrac{a+c}{2}+\dfrac{a\cos C+c\cos A}{2}$

$=\dfrac{a+c}{2}+\dfrac{b}{2}=\dfrac{3b}{2}.$

所以 $a\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{3b}{2}.$

点评：由于题目要求："选取给定的两个条件中的一个为条件，三个结论中的两个为结论的一个正确命题"，所以本题应该有6种组建方案，需分别讨论其是否正确，因此本题的答案不唯一.

3. 跨学科型创新题

例 16 一束光线与玻璃成45°角，穿过折射率为1.5，厚度为1 cm的一块玻璃，那么光线在玻璃内的行程是________ cm.

解析：根据题意画出图形，如图1-10所示.

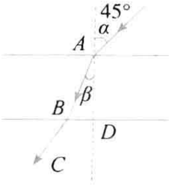


图 1-10

因为 $\alpha=45°$，

所以 $1.5=\dfrac{\sin 45°}{\sin\beta}$.

所以 $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，$\cos\beta=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

又 $\cos\beta=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{1}{AB}$，

所以 $AB=\dfrac{1}{\cos\beta}=\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$ (cm).

点评：本题与物理光学折射定理有关，解决问题的关键是根据条件构造数学模型，利用数学知识求解.

高考命题透视　（广东　许少华　邱金龙）

1. 求三角形的边与角

例 17 在△ABC中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，若$a=1$，$c=\sqrt{3}$，$C=\dfrac{\pi}{3}$，则$A=$________.

解析：本题已知两边的长，及边c的对角，求另一边所对的角，可用正弦定理.

由正弦定理，得：

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，即$\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$，

解得 $\sin A=\dfrac{1}{2}$，所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{5\pi}{6}$，

但因为 $C=\dfrac{\pi}{3}$，故 $A=\dfrac{5\pi}{6}$ 不合题意，

所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$.

点评：由于一个角及它的补角的正弦值是一样的，所以解题时应注意验根，防止三角形的内角和大于180°，另外，本题若求角B，也应先求A，再由内角和定理求B.

2. 已知一边两角，解三角形

例 18 在△ABC中，已知内角$A=\dfrac{\pi}{3}$，边$BC=2\sqrt{3}$. 设内角$B=x$，周长为y. 求函数$y=f(x)$的解析式和定义域.

分析：由角A,B及三角形内角和定理，角C也可以求出，知道了一边长，其余两边长可求，周长的解析式可求.

解答：$A+B+C=\pi$，由$A=\dfrac{\pi}{3}$，$B>0$，$C>0$，得$0<x<\dfrac{2\pi}{3}$，$C=\dfrac{2\pi}{3}-x$.

由正弦定理得

$AB=\dfrac{BC}{\sin A}\sin C=4\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)$，

$AC=\dfrac{BC}{\sin A}\sin B=4\sin x$，

因为 $y=AB+BC+AC$，

所以 $y=4\sin x+4\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)+2\sqrt{3}=6\sin x+2\sqrt{3}\cos x+2\sqrt{3}\left(0<x<\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

点评：本题虽然不全是用数字来求解，有一定难度，但熟练掌握好正弦定理，求解也就容易了.

3. 已知三边，解三角形

例 19 已知△ABC的周长为$\sqrt{2}+1$，且$\sin A+\sin B=\sqrt{2}\sin C$.

(1)求边AB的长；

(2)若△ABC的面积为$\dfrac{1}{6}\sin C$，求角C的度数.