

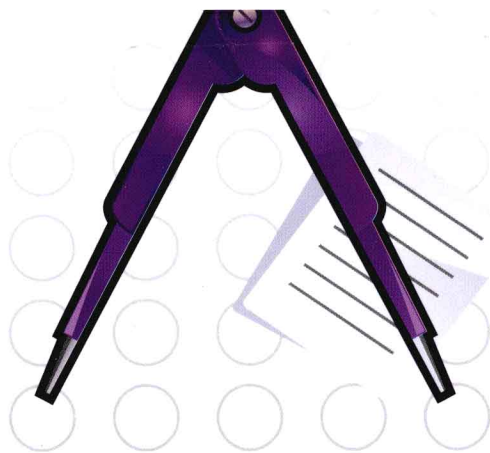


疑难与规律详解

YINAN YU GUI LU XIANGJIE

☆ 修订版 ☆

全国百位名师联合编写



高中数学 ②

(必修5+选修)

主编 蔡晔



龍門書局

www.longmenbooks.com



疑难与规律详解

YINAN YU GUI LÜ XIANGJIE

修订版

高中数学2

(必修5+选修)

主编 蔡 晔

编委 刘 林

杜海东

龍 門 書 局

北 京

版权所有 翻印必究

举报电话:(010)64034160,13501151303(打假办)

邮购电话:(010)52638916

图书在版编目(CIP)数据

提分攻略:疑难与规律详解. 高中数学2(必修5+选修)/蔡晔主编.
北京:龙门书局,2009

ISBN 978-7-5088-2079-8

I. 提… II. 蔡… III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634.73

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第105405号

责任编辑:潘恭华 黄利/封面设计:艺和天下

龙 门 书 局 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

www.longmenbooks.com

世界知识印刷厂印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

2009年7月第一版

开本:B5

2010年5月修订版

印张:15 1/4

2010年5月第四次印刷

字数:305 000

定 价:28.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

使用说明

您在学习中遇到过难以理解的知识点吗?

您在考试中碰到过难以解答的试题吗?

您还在苦苦地寻觅学习的规律、解题的技巧吗?

您还经常为那些“看似容易,一做就错”的易错题苦恼吗?

知识疑难解读

本栏目

针对各章节的重点、难点,将教材内容归纳出几个专题,并分别给予详细的讲解和点拨。同学们在掌握了教材中基本概念的基础上仔细研读本栏目内容,将在重点和难点知识理解方面有一个质的飞跃。

思维规律解读

本栏目

总结了各章节的各类思维和解题规律,分析指导了应用性、探索性和开放性问题的解题思路,并针对各章节重要考点作了深入剖析。本栏目的思维要求较高,例题有一定的难度,需要同学们首先弄懂教材上的例题和思维方法,再来研读。

知识疑难解读

有理数的意义疑难解读 (山东 李祥伦)

理解有理数的概念,要注意以下几个问题:

1. 有限小数可化成分母是 10, 100, 1000, ... 的分数, 如 $0.9 = \frac{9}{10}$, $5.47 = 5\frac{47}{100}$, 故在有理数的分类表中, 这样的小数包括在分数中。
2. 整数也可看作是分母为 1 的分数, 因此一切有理数都可表示为最简分数 $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$) 的形式, 这里的分数是指不包括整数的分数, 因此有理数的分类有两种:

思维规律解读

绝对值中的解题规律 (山东 邱振中)

1. 正确判断正负数, 准确写出绝对值

例 1 三个数 a, b, c 在数轴上的对应点如图 1-2 所示, 化简 $a + |a + b| - |c| - |b - c|$.

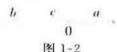


图 1-2

解答: 由图 1-2 可知 $c < 0, b < 0, a > 0$, $b < c, |b| > |a|$.

所以 $a + b < 0, b - c < 0$.

所以原式 $= a - a - b + c + b - c = 0$.

2. 逆用绝对值的性质解题

例 2 已知 $|a - 1| = 2, |b| = 3$, 且 $a > b$, 则 $a + b$ 的值为 _____.

解析: 由 $|\pm 2| = 2$, 所以 $a - 1 = 2$ 或 $a - 1 = -2$.

疑难知识

逐个突破

思维规律

完整呈现

方法技巧

详细解读

思维误区破解

正负数误区点拨

(山西 马志君 重庆 王帮胜)

误区一:没有正确理解正数和负数致误

例 1 下列各数哪些是正数?

$+2007, -3.1, \frac{1}{2}, 10.58, 0, -9, +1.$

错解:正数有 $+2007, 0, +1.$

剖析:没有明确正数的含义及其表示方法,“+”号是可以省略不写的,而且0既不是正数,也不是负数.

正解:正数有 $+2007, \frac{1}{2}, 10.58, +1.$

例 2 下列说法中,正确的是 ()

- A. 一个有理数不是正数,就是负数
- B. 一个整数不是正整数,就是负整数
- C. 非正数是指负整数和负分数
- D. 0是最小的自然数

错解:C

本栏目

精选同学们容易出现的错误理解和错误解题思路,作深入的剖析,并向正确的思维引导。在研读这一栏目内容时,要根据自己的错题笔记,融会贯通,切勿死记硬背。

思维误区破解

本栏目

针对“新题型”“疑难题”“思维误区题”进行训练。通过对本栏目的训练,达到突破疑难、纠正易错题、体验新题型的目的。

挑战疑难

1. 若规定 $f(a) = -|a|$, 则 $f(-2009) =$ _____.

2. 小李在做题时,画了一个数轴,在数轴上原有一点A,其表示的数是-3,由于粗心,他把数轴的原点标错了位置,使点A正好落在-3的相反数的位置,想一想,要把数轴画正确,原点要向哪个方向移动几个单位长度?

本书编写背景

新课标教学和新的中、高考改革，越来越重视学生思维能力、应用能力和创新能力。在这三种能力中，思维能力是核心。而提高思维能力不是一蹴而就的，需要选择好的知识载体、好的学习方法，通过科学的培训才能见效。

目前中学使用的教材有很多版本，每种版本由于本身的篇幅所限，教材对知识的深度挖掘和对思维的纵向拓展不够。因此，教师需要花大量的时间去研究教材，搜集、整理教学资料。学生们也要根据自身情况寻找合适的学习资源，研究学习方法。这无疑给广大师生带来了很大的负担。

《数理报》作为一份专门为一线教学服务的优秀报刊，非常好地解决了教材、教学、学习、考试等各环节的衔接问题。重知识、讲方法，为师生释疑解难，归纳总结，让学生们能够灵活应用知识规律解决问题，并有所创新。鉴于此，我们组织了一批经验丰富的一线教师，将《数理报》多年来积淀下来的精华内容进行重新加工和整合，根据“新课标”和“考试说明”的要求，分模块、分年级编排成册，省去了广大师生搜集资料的繁琐工作。

本书优势所在

一、既有报刊的深度和灵活性，又具有图书的广度和系统性。

本书传承了报刊文章内容深刻、实用、针对性强的特点，同时克服了其随意性和系统性差的缺点，因此本书既有报刊的深度和灵活性，又具有图书的广度和系统性。

二、紧扣课标要求，可以配合同步教学使用。

《数理报》已得到全国几百万师生的认可，其版本配备全，是一份同步辅导报。本书融合了《数理报》所有的配版分刊，并根据知识模块加以整合。因此适用于各个版本不同学段的同步教学和学习使用。

三、内容覆盖面广，重点突出，专门解决“疑难”和“规律”问题。

本书的编写定位于解决教学、学习、考试中的疑难问题，总结归纳出解决问题的方法规律，旨在为广大师生突破教学、学习中的难点，找到提高思维能力的捷径。

四、编写队伍庞大，实力雄厚。

本书取材于《数理报》，汇集了来自全国各地的一线教师，有德高望重的教育教学专家，有教学成绩优异的中青年骨干教师，他们是我国目前中学教学一线优秀教师的代表，是一线教师队伍的精英。





目 录

CONTENTS

第一部分 必修5

第一章 解三角形	1	高考命题透视	23
解三解形剖析	1	等比数列误区破解	23
增设参数在解三角形中的应用	1	第四节 数列综合应用	25
“三类”应用问题解析	2	数列综合应用浅析	25
正、余弦定理及其变形的应用策略	3	数列通项公式的特殊求解技巧	25
正、余弦定理中数学思想的渗透	4	数列求和的方法	26
有关解三角形的创新题	6	数学思想在数列中的应用	27
高考命题透视	7	数列在实际中的应用	29
误区破解	9	数列中的探索题型	30
正、余弦定理应用“现形记”	19	高考命题透视	32
第二章 数 列	12	误区破解	33
第一节 数列的概念及简单表示法	12	第三章 不等式	35
认识数列	12	第一节 不等关系及不等式	35
巧解数列通项公式	12	浅析不等式	35
妙用通项公式	14	典例剖析	35
误区破解	14	比较大小的三种常用方法	36
第二节 等差数列及等差数列的前 n 项和	15	误区破解	37
解读等差数列	15	第二节 一元二次不等式及其解法	38
等差数列中的解题技巧	15	不等式解法小结	38
巧用性质妙解题	16	一元二次不等式的解法及应用	38
等差数列巧求和	17	图象法解不等式	40
等差数列中的函数思想	18	数学思想在二次不等式中的应用	41
高考命题透视	18	高考命题透视	42
误区破解	19	误区破解	42
第三节 等比数列及等比数列前 n 项和	21	第三节 含绝对值不等式	44
解读等比数列	21	含绝对值不等式解法归纳	44
等比数列中的解题技巧	21	含绝对值不等式的五种解法	45
巧用等比数列性质解题	22	证明含绝对值不等式的常用技巧	45
		含参数绝对值不等式的解法	47
		高考命题透视	48

误区破解	48
第四节 简单的线性规划	50
解读线性规划	50
借用截距巧求规划问题	50
线性规划与其他知识的交汇点	51
高考命题透视	52
误区破解	53
第五节 基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$	53

$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 用法剖析	56
$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 用法小结	57
不等式中的创新题型	58
高考命题透视	57
基本不等式误区破解	58

第二部分 选修

第四章 常用逻辑用语	60
解读四种命题	60
从三个角度看充分与必要条件	60
判断命题充要条件的三种方法	60
充分条件、必要条件的类型	61
充分条件、必要条件的判断方法	61
利用“且”或“非”求参数	62
逻辑中的数学思想	63
常用逻辑用语中的新题型	64
高考命题透视	65
误区剖析	66

第五章 圆锥曲线与方程	68
-------------	----

第一节 椭圆	68
解读椭圆	68
椭圆标准方程的求解类型	68
应用椭圆的性质解题	69
椭圆的应用类型	70
高考真题透视	72
椭圆误区破解	73

第二节 双曲线	75
解读双曲线	75
巧用双曲线的定义解题	75
双曲线离心率的有关题型	76
如何求(证)双曲线中的定值	77

双曲线的应用举例	78
高考真题透视	80
误区破解	81
第三节 抛物线	83
解读抛物线	83
抛物线的定义的转化功能	84
抛物线方程的创新应用	85
抛物线的实际应用	86
高考命题透视	87
误区破解	88

第四节 直线与圆锥曲线、曲线方程	90
------------------	----

剖析直线与圆锥曲线的关系	90
相交弦长问题解法五步曲	91
曲线方程的几种常规求法	91
减少圆锥曲线问题运算量的几种方法	93
圆锥曲线的中点弦问题	94
高考命题透视	95
误区破解	97

第六章 空间向量与立体几何	100
---------------	-----

第一节 空间向量及其运算	100
浅析空间向量运算	100

空间向量三定理	100	利用定积分解决物理问题	136
巧妙建立空间直角坐标系	101	误区解读	137
空间向量基本定理的应用	102	第八章 推理与证明	138
空间向量数量积的应用	103	解析推理与证明的方法	138
巧妙构造向量解题	104	归纳推理	138
高考命题透视	105	综合法、分析法解题指导	139
误区破解	107	“三段论”在数学证明中的应用	140
第二节 立体几何中的向量方法	109	反证法解题指导	140
解读向量方法	109	推理与证明中的数学思想	142
空间向量的应用	110	证明不等式拓展方法	144
用空间向量求二面角的三种方法	113	数学归纳法的应用	145
探索型问题解密	114	证明中的创新题型	146
高考命题透视	115	高考命题透视	147
误区破解	118	误区破解	148
第七章 导数	120	第九章 极限	150
第一节 导数及其计算	120	解读极限	150
初等函数浅析	120	求函数极限的变形技巧	150
曲线的切线的求法	120	数列极限的应用	151
活用导数的几何意义	121	逆向极限问题中的参数求法	152
导数计算中的策略	122	高考命题透视	152
巧用导数“导”出参数	123	误区破解	153
导数中的数学思想方法	124	第十章 复数	155
高考命题透视	125	复数全析	155
误区破解	126	复数求解的常见题型	155
第二节 导数的应用	127	复数问题中的数学思想	157
解读导数的应用	127	复数中的拓展题型	158
导数在研究函数中的应用	128	高考命题透视	159
导数的拓展应用	130	误区破解	160
利用导数求最值	130	第十一章 计数原理	162
高考命题透视	131	第一节 计数原理与排列	162
误区破解	133	两个计数原理学习导航	162
第三节 定积分及其应用	134	数字中的计数问题	163
解读定积分	134	谈四类“球入盒”问题的求解思维策略	164
求定积分	134	精析排列问题的解题策略	165
利用定积分求面积	135		

计数原理中的数学思想	167	典例剖析	191
平面区域的涂色问题	168	误区破解	193
高考命题透视	168	第三节 离散型随机变量的期望与方差及正态分布	191
误区破解	169	离散型随机变量的期望与方差	191
第二节 组合	171	离散型随机变量的均值与方差的求法	191
解读组合	171	服从二项分布的期望与方差	195
区分不同元素的分组与分配	171	服从几何分布的期望	195
“隔板法”求解组合问题	172	用数学期望解决生活中的问题	196
排列组合应用题的解法	172	高考命题透视	198
有关组合问题的求和策略	174	误区破解	199
高考命题透视	174	第四节 回归分析与独立性检验	200
误区破解	175	解读回归分析与独立性检验	200
第三节 二项式定理	176	回归直线方程的求解	201
解读二项式定理	176	非线性回归模型例析	202
浅谈二项式定理的应用	177	独立性检验中的题型及求解策略	203
二项式系数的若干求法	178	独立性检验在生活中的应用	204
二项式问题的非常规解法	179	高考命题透视	205
构造法在二项式定理中的应用	180	误区破解	205
探求三项式问题的求解策略	180	第十三章 选修内容精讲	207
二项式中“最大、最小项”的求解策略	181	第一节 几何证明选讲	207
高考命题透视	181	相似三角形的判定与性质小结	207
误区破解	182	圆与圆锥曲线	207
第十二章 随机变量及其分布	184	精典题型示范	207
第一节 离散型随机变量及其分布列	184	第二节 坐标系与参数方程	209
解读分布列	184	解读坐标系	209
离散型随机变量的分布列求法	184	系数方程全析	209
随机变量及其分布中的数学思想	187	常见题型剖析	210
高考命题透视	188	第三节 不等式选讲	212
误区破解	190	解析反证法	212
第二节 条件概率与相互独立试验	191	证明不等式的常用方法	212
解读概率问题	191	不等式题型大揭秘	212
		答案与解析	216

第一部分 必修5

第一章 解三角形

知识疑难解读

解三角形剖析

(山东 石磊)

1. 三角形中常用公式:

$$c = a \cos B + b \cos A, b = c \cos A + a \cos C,$$

$$a = b \cos C + c \cos B;$$

$$\sin(A+B) = \sin C, \cos(A+B) = -\cos C;$$

$$\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}, \cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}.$$

2. 三角形面积公式:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B =$$

$$\frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C \quad (R \text{ 为外接圆半径})$$

$$= \frac{1}{2} (a+b+c)r \quad (r \text{ 为内切圆半径}).$$

3. 三角形形状的判断

如果 c 是三角形的最大边, 则有:

$$a^2 + b^2 > c^2 \Leftrightarrow \text{三角形 } ABC \text{ 是锐角三角形};$$

$$a^2 + b^2 < c^2 \Leftrightarrow \text{三角形 } ABC \text{ 是钝角三角形};$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \text{三角形 } ABC \text{ 是直角三角形}.$$

思维规律解读

增设参数在解三角形中的应用

(江苏 宋振苏)

例 1 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2, AC=3$, 点 D 是边 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} =$ _____.

分析: 本题若直接解答似乎难以下手求解, 这里若增设参数 x, y , 设 $\triangle ABC$ 中的线段 $AD=y, BD=DC=x$, 可得如下简解:

解答: 如图 1-1, 因点 D 是边 BC 的中点, 连结 AD , 设 $AD=y, BD=DC=x$, 记 $\angle ADB = \theta$, 则 $\angle ADC = \pi - \theta$, 注意到 $AB=2, AC=3$, 所以在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中, 分别运用余弦定理可得: $2^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta, 3^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos(\pi - \theta)$ 将以上两式两边分别相减可得: $4xy \cos \theta = 5$, 所以 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = 2xy \cos \theta = \frac{5}{2}$.

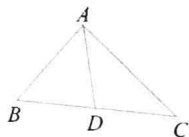


图 1-1

例 2 在 $\triangle ABC$ 中,

$$\tan A = \frac{1}{4}, \tan B = \frac{3}{5}.$$

(1) 求角 C 的大小;

(2) 若 $\triangle ABC$ 最大边的边长为 $\sqrt{17}$, 求最小边的边长.

分析: 本题直接运用两角和的正切公式及正弦定理可以求解, 但较为繁琐, 这里若过点 C 作 $CD \perp AB$, 垂足为 D , 并增设参数 k , 使 $CD=3k$ ($k>0$), 可得如下简解:

解答: (1) 如图 1-2, 过 $\triangle ABC$ 的顶点 C 作 $CD \perp AB$, 垂足为 D , 设 $CD=3k$ ($k>0$), 则 $AD=12k, BD=5k$, 进而可得 $AC=3\sqrt{17}k, BC=\sqrt{34}k$.

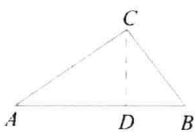


图 1-2

由余弦定理得:

$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{所以 } C = \frac{3\pi}{4}.$$

(2) 由 (1) 知 $AB > AC > BC$, 则 $AB=17k=\sqrt{17}$, 故 $k=\frac{1}{\sqrt{17}}$, 所以最小边为 $BC=\sqrt{34}k=\sqrt{34} \times \frac{1}{\sqrt{17}} = \sqrt{2}$.

例 3 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=5$, $\cos \angle ABC = \frac{1}{7}$, AC 边上的中线 $BD = \sqrt{21}$, 试求 $\triangle ABC$ 的内角 A .

分析: 本题若直接解答似乎难以下手求解, 其实这里若增设参数 x, y , 使 $\triangle ABC$ 中的 $AC=2x, BC=y$, 可得如下简解:

解答: 如图 1-3, 设 $AC=2x, BC=y$, 点 D 是边 AC 的中点, 则 $AD=DC=x$, 若记 $\angle ADB=\theta$, 则 $\angle BDC=\pi-\theta$, 注意到 $AB=5$, 因此在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 中, 分别运用余弦定理可得:

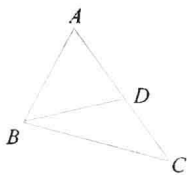


图 1-3

$$5^2 = x^2 + BD^2 - 2xBD\cos\theta;$$

$$y^2 = x^2 + BD^2 - 2xBD\cos(\pi-\theta),$$

将以上两式两边分别相加可得:

$$y^2 + 25 = 2x^2 + 42; \text{ 又因 } \cos\angle ABC = \frac{1}{7},$$

故在 $\triangle ABC$ 中应用余弦定理可得: $4x^2 = 25 +$

$$y^2 - 2 \times 5y \cos\angle ABC, \text{ 即 } 4x^2 = 25 + y^2 - \frac{10}{7}y,$$

结合 $y^2 + 25 = 2x^2 + 42$ 消去 x^2 并整理得,

$$7y^2 + 10y - 7 \times 59 = 0,$$

解之得: $y=7, y=-\frac{59}{7}$ (舍去),

将 $y=7$ 代入 $y^2 + 25 = 2x^2 + 42$ 可得: $x=4$,

所以由余弦定理得:

$$49 = 64 + 25 - 2 \times 5 \times 8 \cos A,$$

$$\text{得 } \cos A = \frac{1}{2},$$

故所求 $\triangle ABC$ 的内角 $A = \frac{\pi}{3}$.

点评: 从上例的解析可以看出, 解答某些解三角形问题时, 可依据题设条件适时增设参变量, 借助解三角形的有关工具构建方程或方程组, 通过解出这些参变量或不解出而整体代换, 可使这些问题简捷、巧妙地获解, 品味这些问题的解答过程, 进一步体验和感悟数学中的参数思想、方程思想、设而不求与整体代换等数学思想的灵魂和真正内涵.

“三类”应用问题解析 (湖北 张大任)

1. 求距离问题

例 4 某轮船以 30 海里/小时的速度航行, 在 A 点测得灯塔 M 在南偏东 60° , 向北航行 40 分钟后到 B 点, 测得灯塔在南偏东 30° , 如果轮船改为北偏东 60° 的航向再行驶 80 分钟到达

C 点, 求 M, C 两点间的距离.

分析: 据题意作出图形(如图 1-4), 在 $\triangle ABM$ 中, 找出各已知边与角, 利用正弦定理求 BM , 然后在 $\text{Rt}\triangle BCM$ 中, 利用勾股定理求解 MC .

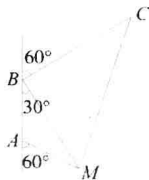


图 1-4

解答: 已知在 $\triangle ABM$ 中,

$$AB = 30 \times \frac{40}{60} = 20,$$

$$\angle AMB = 30^\circ, \angle BAM = 120^\circ,$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{AB}{\sin\angle AMB} = \frac{BM}{\sin\angle BAM},$$

$$\text{即 } \frac{20}{\sin 30^\circ} = \frac{BM}{\sin 120^\circ}, \text{ 解得 } BM = 20\sqrt{3}.$$

$$\text{因为在 } \triangle BCM \text{ 中, } BC = 30 \times \frac{80}{60} = 40,$$

$$\angle CBM = 90^\circ,$$

所以由勾股定理得

$$MC = \sqrt{BM^2 + BC^2} = \sqrt{(20\sqrt{3})^2 + 40^2} = 20\sqrt{7}.$$

故 M, C 两点间的距离为 $20\sqrt{7}$ 海里.

点评: 解决本题的关键在于如何把实际问题转化为解斜三角形问题(即建立数学模型), 这也是应用题的难点所在.

2. 求高度问题

例 5 为测量建造中的奥运会体育馆已到达的高度, 张明在附近找了 A, B, C 三点, $AB=BC=60$ 米, 且在 A, B, C 三点观测该馆的最高点, 测得仰角分别为 $45^\circ, 54.2^\circ, 60^\circ$. 已知张明身高为 1.7 米, 试求建造的体育馆已到达的高度(结果保留一位小数).

分析: 根据题意画出示意图, 如图 1-5 所示, 设 $DE=x$, 则 AE, BE, CE 都可用 x 来表示, 在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCE$ 中同时用余弦定理列出方程, 便可求出 x .

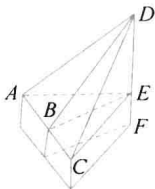


图 1-5

解答: 设体育馆高 $DF=h$, $DE=x$, 则 $h=x+1.7$.

在 $\text{Rt}\triangle AED, \text{Rt}\triangle BED, \text{Rt}\triangle CED$ 中,

$$AE = DE \cdot \cot 45^\circ = x;$$

$$BE = DE \cdot \cot 54.2^\circ = x \cdot \cot 54.2^\circ;$$

$$CE = DE \cdot \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}x.$$

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle ACE$ 中,由余弦定理得

$$\begin{aligned}\cos\angle BCE &= \frac{BC^2 + CE^2 - BE^2}{2BC \cdot CE} \\ &= \frac{AC^2 + CE^2 - AE^2}{2AC \cdot CE}\end{aligned}$$

$$\text{即 } \frac{60^2 + \frac{x^2}{3} - (x \cot 54^\circ)^2}{2 \times 60 \times \frac{\sqrt{3}}{3}x}$$

$$= \frac{120^2 + \frac{x^2}{3} - x^2}{2 \times 120 \times \frac{\sqrt{3}}{3}x},$$

解得 $x \approx 156.75$, 故 $h = 158.5$ (米).

故建造中的体育馆现在已大约达到 158.5 米.

点评:在解决斜三角形问题时,要注意仰角、俯角等名词,并准确地找出这些角.仰角或俯角:与目标视线在同一铅垂平面内的水平视线上方时叫仰角,目标视线在水平视线下方时叫俯角.

3. 航海中方位角问题

例 6 在海岸 A 处,发现北偏东 45° 方向,距 A $(\sqrt{3}-1)$ n mile 的 B 处有一艘走私船,在 A 处北偏西 75° 方向,距 A 2 n mile 的 C 处的缉私船奉命以 $10\sqrt{3}$ n mile/h 的速度追从 B 处向北偏东 30° 方向逃窜的走私船.走私船速度 10 n mile/h.问缉私船怎样才能最快追上走私船?并求出所需要的时间.

分析:由题意,先作出如图 1-6 所示的方位图形.

解答:设缉私船追上走私船所需时间为 t h,则

有 $CD = 10\sqrt{3}t$, $BD = 10t$.

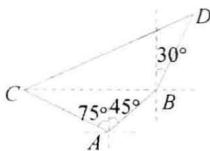


图 1-6

在 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{3}-1$, $AC = 2$,

$\angle BAC = 45^\circ + 75^\circ = 120^\circ$,

根据余弦定理 $BC =$

$$\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times (\sqrt{3}-1) \cos 120^\circ} = \sqrt{6}.$$

根据正弦定理得

$$\sin\angle ABC = \frac{AC \cdot \sin 120^\circ}{BC} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以 $\angle ABC = 45^\circ$,

而 $\angle CBD = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$.

在 $\triangle BCD$ 中,根据正弦定理

$$\sin\angle BCD = \frac{BD \cdot \sin\angle CBD}{CD} = \frac{10t \cdot \sin 120^\circ}{10\sqrt{3}t} =$$

$\frac{1}{2}$, 所以 $\angle BCD = 30^\circ$, $\angle BDC = 30^\circ$.

所以 $BD = BC = \sqrt{6}$, 则有 $10t = \sqrt{6}$,

$$t = \frac{\sqrt{6}}{10} = 0.245 \text{ h} = 14.7 \text{ min}.$$

所以缉私船沿北偏东 60° 方向,需 14.7 min 才能追上走私船.

点评:掌握方位角的概念,会识图作图,才能正确求解此类问题.

正、余弦定理及其实际应用策略

(山东 胡大波)

1. 观察式子的特征,直接应用正、余弦定理解题

在已知条件中,往往含有选用正、余弦定理的蛛丝马迹,充分识别这些信息,有助于寻找解题的途径.

例 7 在 $\triangle ABC$ 中,若 $\frac{a^3 + b^3 - c^3}{a + b - c} = c^2$, $\sin A \sin B = \frac{3}{4}$,试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

分析:通过观察已知式子,可以看出与余弦定理有关,设法把边的关系转化为角的关系,从而把角 C 求出,使问题得以解决.

解答:由 $\frac{a^3 + b^3 - c^3}{a + b - c} = c^2$,

得 $a^3 + b^3 - c^3 = (a + b - c)c^2$.

即 $a^2 - ab + b^2 = c^2$.

所以 $a^2 + b^2 - c^2 = ab$.

所以 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}$,

可得 $C = \frac{\pi}{3}$. 从而 $A + B = \frac{2\pi}{3}$.

又 $\sin A \sin B = \frac{3}{4}$,

则 $-\frac{1}{2}[\cos(A+B) - \cos(A-B)] = \frac{3}{4}$,

所以 $\cos(A-B) = 1$. 所以 $A = B = \frac{\pi}{3}$.

故 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

点评:若题目中含有 $a^2 - ab + b^2 = c^2$ 或其变形形式往往可以应用余弦定理解。

2. 应用正、余弦定理的变形解題

正余弦定理有一些重要的变形,如正弦定理的变形有: $\frac{a}{2R} = \sin A$; $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$; $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = 2R$ 等。余弦定理的变形有: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{b} \cdot \cos A$; $\left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \cos B$ 等。若已知三角形两边之比及其夹角,用此变式往往可以快速求解。

例 8 已知 A, B, C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角,它们的对边分别是 a, b, c , 且 $B = \frac{1}{2}(A + C)$, $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, 求此三角形三个内角的度数。

解答: 因为 $B = \frac{1}{2}(A + C) = \frac{1}{2}(180^\circ - B)$, 所以 $B = 60^\circ$ 。

而 $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} \cdot \cos B = \frac{3}{2}$ 。

又由正弦定理得 $\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ 。

可得 $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

所以 $A = 45^\circ$ 或 $A = 135^\circ$ (不合题意舍去)。

所以 $C = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$ 。

故三角形的三个内角分别是 $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 。

3. 灵活应用正、余弦定理,联袂求解问题

有一些三角问题需要综合应用正余弦定理求解,由余弦定理有: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 根据正弦定理有: $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$, 将后者代入前者得: $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A$ 。此式反映了三角形的三个内角所满足的一种关系,应用它可以解决三角求值问题。

例 9 在 $\triangle ABC$ 中, 如果 $a^2 + b^2 = 2005c^2$, 试求 $\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B}$ 的值。

解答: 依题设并结合正弦定理, 得

$$\sin^2 A + \sin^2 B = 2005 \sin^2 C.$$

又 $\sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B - 2 \sin A \sin B \cos C$,

所以 $\sin^2 C = 2005 \sin^2 C - 2 \sin A \sin B \cos C$ 。

即 $\sin A \sin B \cos C = 1002 \sin^2 C$ 。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{\frac{\cos C}{\sin C}}{\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B}} \\ &= \frac{\sin A \sin B \cos C}{\sin C (\cos A \sin B + \sin A \cos B)} \\ &= \frac{\sin A \sin B \cos C}{\sin C \sin(A+B)} \\ &= \frac{\sin A \sin B \cos C}{\sin^2 C} = 1002. \end{aligned}$$

正、余弦定理中数学思想的渗透

(山东 仇玲)

1. 化归与转化思想

例 10 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $(a^2 + b^2) \cdot \sin(A - B) = (a^2 - b^2) \cdot \sin(A + B)$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状。

解答: 由 $(a^2 + b^2) \cdot \sin(A - B) = (a^2 - b^2) \cdot \sin(A + B)$ 得

$$a^2 [\sin(A - B) - \sin(A + B)] + b^2 [\sin(A - B) + \sin(A + B)] = 0.$$

所以 $a^2 \cos A \sin B = b^2 \sin A \cos B$ 。

解法一: 由正弦定理, 得

$$\sin^2 A \cos A \sin B = \sin^2 B \sin A \cos B.$$

即 $\sin A \sin B (\sin 2A - \sin 2B) = 0$ 。

因为在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A \sin B \neq 0$,

所以 $\sin 2A - \sin 2B = 0$ 。

又因为 $0 < A, B < \pi$,

所以 $A + B = 90^\circ$ 或 $A = B$ 。

所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形。

解法二: 由正弦定理和余弦定理, 得

$$a^2 \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot b = b^2 \cdot a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

化简得 $a^4 - a^2 c^2 + b^2 c^2 - b^4 = 0$ 。

所以 $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0$ 。

所以 $a = b$ 或 $a^2 + b^2 = c^2$ 。

故 $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形。

点评:已知三角形的边角关系判断三角形形状时,一般采用化归与转化的思想:化边为角(如解法1)或化角为边(如解法2),其中要以正弦定理和余弦定理作为桥梁来实现这两种转化.

2. 方程思想

例 11 如图 1-7, D

是直角 $\triangle ABC$ 斜边 BC 上一点, $AB=AD$, 记 $\angle CAD=\alpha$, $\angle ABC=\beta$.

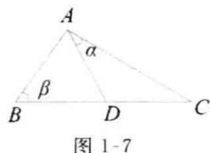


图 1-7

(1) 证明: $\sin\alpha + \cos 2\beta = 0$;

(2) 若 $AC = \sqrt{3}DC$, 求 β 的值.

解答: (1) 因为 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \angle BAD = \frac{\pi}{2} -$

$$(\pi - 2\beta) = 2\beta - \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以 } \sin\alpha = \sin(2\beta - \frac{\pi}{2}) = -\cos 2\beta.$$

$$\text{即 } \sin\alpha + \cos 2\beta = 0.$$

(2) 在 $\triangle ADC$ 中, 由正弦定理, 得

$$\frac{DC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin(\pi - \beta)}, \text{ 即 } \frac{DC}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}DC}{\sin(\pi - \beta)},$$

$$\text{所以 } \sin\beta = \sqrt{3}\sin\alpha.$$

$$\text{又由 (1) 可知: } \sin\alpha = -\cos 2\beta,$$

$$\text{所以 } \sin\beta = -\sqrt{3}\cos 2\beta = -\sqrt{3}(1 - 2\sin^2\beta),$$

$$\text{即 } 2\sqrt{3}\sin^2\beta - \sin\beta - \sqrt{3} = 0.$$

$$\text{解得 } \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 或 } \sin\beta = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{因为 } 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \text{ 故 } \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 从而 } \beta = \frac{\pi}{3}.$$

点评:第(2)问借助正弦定理得到“ $\sin\beta = \sqrt{3}\sin\alpha$ ”, 结合第(1)问的结论消去 α 角, 把问题转化为关于 $\sin\beta$ 的一元二次方程, 通过解方程求得. 此题灵活运用了消元思想和方程思想.

3. 分类讨论思想

例 12 如图 1-8, 有两

条相交成 60° 的直线 xx' , yy' , 其交点为 O , 甲、乙两辆汽车分别在 xx' , Oy' 上行驶, 起初



图 1-8

甲离 O 点 30 km, 乙离 O 点 10 km, 后来两车均用 60 km/h 的速度, 甲沿 xx' 方向, 乙沿 yy' 方向行驶 (设甲、乙两车最初的位置分别为 A, B).

(1) 起初两车的距离是多少?

(2) 用包含 t 的式子表示, t 小时后两车的距离是多少?

解答: (1) 由余弦定理, 知

$$\begin{aligned} AB^2 &= OA^2 + OB^2 - 2 \times OA \times OB \times \cos 60^\circ \\ &= 30^2 + 10^2 - 2 \times 30 \times 10 \times \frac{1}{2} = 700. \end{aligned}$$

$$\text{故 } AB = 10\sqrt{7} \text{ (km)}.$$

即起初两车的距离是 $10\sqrt{7}$ km.

(2) 设甲、乙两车 t 小时后的位置分别为 P, Q , 则 $AP = 60t, BQ = 60t$.

① 当 $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ 时, $\angle POQ = 60^\circ$.

$$\text{此时 } OP = 30 - 60t, OQ = 10 + 60t,$$

由余弦定理, 得

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (30 - 60t)^2 + (10 + 60t)^2 - 2 \times \\ &\quad (30 - 60t)(10 + 60t) \cos 60^\circ \\ &= 10\,800t^2 - 3\,600t + 700. \end{aligned}$$

② 当 $t > \frac{1}{2}$ 时, $\angle POQ = 120^\circ$.

$$\text{此时 } OP = 60t - 30, OQ = 10 + 60t,$$

由余弦定理, 得

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (60t - 30)^2 + (10 + 60t)^2 - 2 \times (60t - \\ &\quad 30)(10 + 60t) \cos 120^\circ \\ &= 10\,800t^2 - 3\,600t + 700. \end{aligned}$$

$$\text{综上知 } PQ^2 = 10\,800t^2 - 3\,600t + 700,$$

$$\text{则 } PQ = 10 \sqrt{108t^2 - 36t + 7}.$$

故 t 小时后两车的距离是

$$PQ = 10 \sqrt{108t^2 - 36t + 7} \text{ (km)}.$$

点评:本题是一个解三角形的实际问题, 由于两车的行驶方向导致以 O 点为起点的两线段的夹角发生变化, 因此必须对两种情况进行分类讨论.

四、数形结合理想

数形结合的解题方法, 就是把数学问题中的数量关系和几何图形结合起来考虑的思维方法, 其实质就是将抽象的数学语言与直观的图形结合起来, 抽象思维和形象思维结合起来, 使

抽象问题具体化,复杂问题简单化,通过“数”和“形”的联系和转化,从而使问题得以解决.

例 13 在斜度一定的山坡上的一点 A 测得山顶上一建筑物顶端 C 对于山坡的斜度为 15° ,向山顶前进 100 m 后,又从 B 点测得斜度为 45° . 设建筑物的高为 50 m,求山坡对于地平面的斜度的倾斜角 θ 的余弦值.

分析: 本题是测量角度问题,首先应根据题意画出图形,如图 1-9 所示. 设山坡对于地平面的斜度的倾斜角 $\angle EAD = \theta$,这样可在 $\triangle ABC$ 中利用正弦定理求出 BC;再在 $\triangle BCD$ 中,利用正弦定理得到关于 θ 的三角函数关系式,进而解出 θ .

解答: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 15^\circ$, $\angle CBA = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = 100$ m.

根据正弦定理,有 $\frac{100}{\sin 30^\circ} = \frac{BC}{\sin 15^\circ}$. 所以 $BC = \frac{100 \sin 15^\circ}{\sin 30^\circ}$.

又在 $\triangle BCD$ 中, $CD = 50$, $BC = \frac{100 \sin 15^\circ}{\sin 30^\circ}$, $\angle CBD = 45^\circ$, $\angle CDB = 90^\circ + \theta$.

根据正弦定理,有 $\frac{50}{\sin 45^\circ} = \frac{\frac{100 \sin 15^\circ}{\sin 30^\circ}}{\sin(90^\circ + \theta)}$.

解得 $\cos \theta = \sqrt{3} - 1$.

即山坡对于地面的斜度的倾斜角的余弦值为 $\sqrt{3} - 1$.

点评: 题中已知条件较多,为了求倾斜角,根据题意画出其示意图,将已知条件归结到 $\triangle ABC$ 与 $\triangle BCD$ 中. 在 $\triangle BCD$ 中,利用三角形的性质,将 $\angle CDB$ 与角 θ 联系起来,从而在两个三角形中,利用正弦定理将 θ 求出.

有关解三角形的创新题 (湖北 张大任)

1. 探究型创新题

例 14 有一解三角形的题因纸张破损有一个条件不清,具体如下: 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a = \sqrt{3}$, $B = 45^\circ$, _____, 求角 A. 经推断破损处的条件为三角形一边的长度,且答案提示 $A =$

60° , 请直接题中横线上将条件补充完整.

解析: 由正弦定理,得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

即 $\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$, 得 $b = \sqrt{2}$.

由余弦定理,得

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2 + c^2 - 3}{2 \times \sqrt{2} \cdot c} = \frac{1}{2},$$

可求出 $c = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$. 故填 $c = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$.

点评: 此题属于条件探究型问题,运用正弦定理、余弦定理求解问题.

2. 开放型创新题

例 15 三角形 ABC 的三个内角 A, B, C 的对边的长分别为 a, b, c, 有下列两个条件: (1) a, b, c 成等差数列; (2) a, b, c 成等比数列.

现给出三个结论:

$$(1) 0 < B \leq \frac{\pi}{3};$$

$$(2) a \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{3b}{2};$$

$$(3) 1 < \frac{1 + \sin 2B}{\cos B + \sin B} \leq \sqrt{2}.$$

请你选取给定的两个条件中的一个为条件,三个结论中的两个为结论,组建一个你认为正确的命题,并证明之.

解答: 三角形 ABC 的三个内角 A, B, C 的对边的长分别为 a, b, c, 若 a, b, c 成等差数列, 则 $0 < B \leq \frac{\pi}{3}$ 且 $a \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{3b}{2}$.

证明如下:

因为 a, b, c 成等差数列, 所以 $b = \frac{a+c}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{所以 } \cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2 - \left(\frac{a+c}{2}\right)^2}{2ac} \\ &= \frac{3(a^2 + c^2) - 2ac}{8ac} \geq \frac{6ac - 2ac}{8ac} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

当且仅当 $a = c$ 时, 取等号.

角 B 是三角形 ABC 的一个内角,

$$\text{所以 } 0 < B \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{又因为 } a \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{3b}{2}$$

$$\begin{aligned}
 &= a \cdot \frac{1+\cos C}{2} + c \cdot \frac{1+\cos A}{2} \\
 &= \frac{a+c}{2} + \frac{a\cos C + c\cos A}{2} \\
 &= \frac{a+c}{2} + \frac{b}{2} = \frac{3b}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } a\cos^2 \frac{C}{2} + c\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{3b}{2}.$$

点评: 由于题目要求: “选取给定的两个条件中的一个为条件, 三个结论中的两个为结论的一个正确命题”, 所以本题应该有 6 种组建方案, 需分别讨论其是否正确, 因此本题的答案不唯一.

3. 跨学科型创新题

例 16 一束光线与玻璃成 45° 角, 穿过折射率为 1.5, 厚度为 1 cm 的一块玻璃, 那么光线在玻璃内的行程是 _____ cm.

解析: 根据题意画出图形, 如图 1-10 所示.

因为 $\alpha = 45^\circ$,

$$\text{所以 } 1.5 = \frac{\sin 45^\circ}{\sin \beta}.$$

$$\text{所以 } \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{3}, \cos \beta = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

$$\text{又 } \cos \beta = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{AB},$$

$$\text{所以 } AB = \frac{1}{\cos \beta} = \frac{3\sqrt{7}}{7} \text{ (cm)}.$$

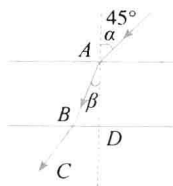


图 1-10

点评: 本题与物理光学折射定理有关, 解决问题的关键是根据条件构造数学模型, 利用数学知识求解.

高考命题透视 (广东 许少华 邱金龙)

1. 求三角形的边与角

例 17 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a = 1, c = \sqrt{3}, C = \frac{\pi}{3}$, 则 $A =$ _____.

解析: 本题已知两边的长, 及边 c 的对角, 求另一边所对的角, 可用正弦定理.

由正弦定理, 得:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 即 } \frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{\sin \frac{\pi}{3}},$$

$$\text{解得 } \sin A = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } A = \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \frac{5\pi}{6},$$

但因为 $C = \frac{\pi}{3}$, 故 $A = \frac{5\pi}{6}$ 不合题意,

$$\text{所以 } A = \frac{\pi}{6}.$$

点评: 由于一个角及它的补角的正弦值是一样的, 所以解题时应注意验根, 防止三角形的内角和大于 180° , 另外, 本题若求角 B , 也应先求 A , 再由内角和定理求 B .

2. 已知一边两角, 解三角形

例 18 在 $\triangle ABC$ 中, 已知内角 $A = \frac{\pi}{3}$, 边

$BC = 2\sqrt{3}$. 设内角 $B = x$, 周长为 y . 求函数 $y = f(x)$ 的解析式和定义域.

分析: 由角 A, B 及三角形内角和定理, 角 C 也可以求出, 知道了一边长, 其余两边长可求, 周长的解析式可求.

解答: $A + B + C = \pi$, 由 $A = \frac{\pi}{3}, B > 0, C > 0$, 得 $0 < x < \frac{2\pi}{3}, C = \frac{2\pi}{3} - x$.

由正弦定理得

$$AB = \frac{BC}{\sin A} \sin C = 4 \sin \left(\frac{2\pi}{3} - x \right),$$

$$AC = \frac{BC}{\sin A} \sin B = 4 \sin x,$$

因为 $y = AB + BC + AC$,

$$\text{所以 } y = 4 \sin x + 4 \sin \left(\frac{2\pi}{3} - x \right) + 2\sqrt{3} = 6 \sin x + 2\sqrt{3} \cos x + 2\sqrt{3} \left(0 < x < \frac{2\pi}{3} \right).$$

点评: 本题虽然不全是用数字来求解, 有一定难度, 但熟练掌握好正弦定理, 求解也就容易了.

3. 已知三边, 解三角形

例 19 已知 $\triangle ABC$ 的周长为 $\sqrt{2} + 1$, 且 $\sin A + \sin B = \sqrt{2} \sin C$.

(1) 求边 AB 的长;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{6} \sin C$, 求角 C 的度数.