中等专业学校试用教材

财经类专业通用

数学

下册一分册

高等教育出版社

中等专业学校试用教材

财经类专业通用

数　　学

下册一分册

高等教育出版社

内容提要

本书为下册一分册，主要内容讲概率论基础与数理统计初步。供具有高中毕业程度的二年制财经中专作试用教材。

中等专业学校试用教材
财经类专业通用

数　学

下册一分册

*

高等教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
上海群众印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 4.25　字数 90,000
1982年3月第1版　1986年1月第7次印刷
印数 481,001—551,000
书号 13010·0737　　定价 0.57 元

前　言

《数学》下册一分册《概率论与数理统计初步》是在东北、华北协作区编写的《数学》教材基础上，根据一九八一年十月教育部制订的《中等专业学校财经类专业通用数学教学大纲(试行草案)》编写的.

《概率论与数理统计初步》共五章，关于内容安排及讲授安排作以下几点说明，仅供参考.

(一) 第一章概率论基本概念的内容，中学教材基本都有，本教材略有提高、加深. 如果学生基础较好，则可抓住主要内容进行系统复习. 第二章起是全新内容，应作重点讲授.

(二) 第二章随机变量最后一节，给出了“二元随机变量及其分布”(仅就离散型)，目的是给出随机变量相互独立等概念，为某些专业学习数理统计提供必要的准备知识. 打上“※”号，说明有些专业可以不讲. 未配习题.

(三) 第三章随机变量的数值特征，最后给出了矩的概念，未配习题. 目的是为数理统计讲矩法估计准备知识，在课时紧的情况下可仅作简单介绍.

(四) “回归分析”是经济工作者经常使用的数学工具，由于课时所限，暂不能作为必讲内容，仅在本书最后作简单介绍，供选学之用.

本册教材由沈阳市财经学校主编，辽宁大学数学系郭第渐副教授，概率教研室主任刘良和担任主审. 参加编写的有沈阳市财经学校吴素文、赵长骥、周作光同志，参加初稿编写的还有

山西财贸学校郭太昌同志．由于编者水平和经验有限，谬误之处一定很多，诚恳希望使用本教材的师生不吝赐教．

编　　者

一九八二年二月

目　录

第一章　概率论的基本概念

人们在观察自然界和社会现象时，会发现有些现象在一定条件下必然会发生，例如在标准大气压下，水温达到 100°C，必有“水沸腾”现象发生；水温降到 0°C 以下，必有“结冰”现象发生，这些现象称为在相应条件下的**必然事件**．有些现象在一定条件下必然不发生，如气温在 -20°C 时“天下雨”现象；在水平的有摩擦的路面上，汽车无动力“开走了”现象都是不会发生的，这些现象称为在相应条件下的**不可能事件**．还有一些与上述现象在本质上不同的现象：在一定条件下，这些现象可能发生，也可能不发生，这种现象称为**随机现象**．例如，远距离射击较小的目标，可能击中，也可能击不中，每一次射击的结果是随机的．又如，在抽查某工厂生产的 10 件产品中有几件次品是随机的．这种现象在一次抽查中结果呈现不确定性，但在大量重复抽查中，又呈现出某种规律性，这种规律性称为**统计规律性**，概率论就是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科．

§1　随机试验　随机事件

研究随机现象离不开试验或观察，如果某试验或观察满足以下三个条件：

（1）可以在相同条件下重复进行；

（2）每次试验的可能结果不止一个，并且事先能明确知道试验的所有可能结果；

(3) 一次试验前不能明确哪一个结果会出现.

则称为随机试验, 简称为试验.

为方便起见, 以下有时用字母 E 表示随机试验. 我们就是通过研究随机试验研究随机现象的.

例1 掷一枚五分的硬币, 观察正面 (不妨设花朝上为正面), 反面出现的情况. 该试验满足(1)可以在相同条件下重复投掷; (2)每次试验的可能结果有两个, 并且事先能明确试验的所有可能结果是正面或反面出现; (3)投掷前不能明确哪一面出现, 因此该试验是随机试验.

例2 某人向离地 100 米处的靶上射击, 观察击中的环数. 此事满足上述三个条件: (1)可以在相同条件下重复射击; (2)每次射击可能结果是 0 环, 1 环, 2 环, …, 10 环; (3)射击前不能明确知道击中多少环, 因此该试验是随机试验.

在随机试验 E 中, 每一个可能出现的最简单的结果 w, 称为 E 的基本事件.

例 2 中, 一次射击可能击中的环数有十一个, 它们中的每一个都是基本事件.

随机试验 E 的全体基本事件组成的集合, 称为 E 的基本事件空间, 记为 $\Omega=\{w\}$.

若 E_1 表示例 1 所述试验, w_1, w_2 分别表示出现正面, 反面事件, 则 E_1 的基本事件空间 $\Omega=\{w_1, w_2\}$.

若 E_2 表示例 2 所述试验, 用 0, 1, 2, …, 10 表示击中相应环数的各事件, 则 E_2 的基本事件空间 $\Omega=\{0, 1, 2, \cdots, 10\}$.

例3 E_3 表示掷一颗骰子, 观察出现的点数, 试验结果可能出现 1 点, 2 点, …, 6 点, 如果用这些数字表示出现相应点数的各事件(以下类似), 则 $\Omega=\{1, 2, \cdots, 6\}$.

例 4　E_4 表示记录电话交换台在七点到八点的一小时内所接到呼唤的次数，可能是 0, 1, 2, …, n 次，则 $\Omega=\{0,1,2,\cdots,n\}$. 这里 n 是某一有限整数.

例 5　E_5 表示观察北京十月份的平均气温 T，这里假设平均气温不会小于 T_0，不会大于 T_1，则基本事件空间为 $\Omega=\{T; T_0\leqslant T\leqslant T_1\}$，简记为 $\Omega=\{T_0,T_1\}$.

例 6　E_6 表示向平面某块有色区域 Ω_0 随意投球，观察球落的位置，以 $w(a,b)$ 表示球落在横坐标为 a，纵坐标为 b 的一个试验结果，则基本事件空间重合于区域 Ω_0，即 $\Omega=\Omega_0$.

基本事件空间 Ω 中的子集，称为 E 的一个随机事件，简称事件，常用 $A, B, C, \cdots$ 表示.

例如，已知随机试验 E_3 的基本事件空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，则

子集 $\{1,3,5\}$ 是一事件，记为 $A_1=\{1,3,5\}$；

子集 $\{2,4,6\}$ 是一事件，记为 $A_2=\{2,4,6\}$；

子集 $\{4,5,6\}$ 是一事件，记为 $A_3=\{4,5,6\}$；

子集 $\{1,2\}$ 是一事件，记为 $A_4=\{1,2\}$；

子集 $\{6\}$ 是一事件，记为 $A_5=\{6\}$.

通常只要 A 的一个基本事件发生，就说事件 A 发生. 对于上面的事件 A_2，如果试验的结果是 2 点，则说事件 A_2 发生；对于事件 A_4，如果试验的结果是 1 点，则说事件 A_4 发生. 为研究方便，将必然事件也视为随机事件，显然必然事件对应着基本事件空间 Ω；将不可能事件也视为随机事件，它对应于 Ω 中的空集 $\varnothing$，以后常用 Ω, $\varnothing$ 分别表示必然事件和不可能事件.

在某些问题的研究中，我们通常不只讨论一个事件，而是研究好些事件，而且这些事件间又存在一定联系，我们只有从事物

的联系中研究事物，才能掌握事物的本质.

例如，在一批含有正品、次品的产品中，任意抽取三个为试验 E，则下列都是试验 E 的事件，

A_1：（至少有一个次品）；

A_2：（恰好有一个次品）；

A_3：（至少有两个次品）；

A_4：（三个都是次品）；

A_5：（至多一个次品）；

A_6：（没有次品）；

A_7：（至少有一个正品）.

可以看出，上述事件间有一定联系，如 A_1 发生，则 A_6 不会发生；A_6 发生则 A_1 就不会发生；A_4 与 A_7 不会同时发生；如果 A_2 发生，则 A_1 也必然发生；当且仅当 A_2 与 A_3 至少有一个发生时，A_1 发生；当且仅当 A_1 和 A_5 都发生时，A_2 发生等等. 为把上述关系一般化，介绍事件间关系及其运算.

设试验 E 的基本事件空间为 Ω；A, B, C, A_k $(k=1, 2, \cdots)$ 为试验 E 的事件.

（一）包含关系（特款）

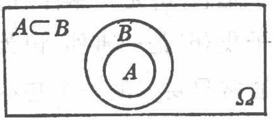

图 1-1

如果事件 A 发生，必然导致事件 B 发生，称事件 B 包含事件 A，或事件 A 是事件 B 的特款，记为 $A \subset B$（或 $B \supset A$），如图 1-1.

如上例中，事件（至少有一个次品）A_1 就包含事件（恰好有一个次品）A_2，即 $A_2 \subset A_1$.

如果事件 B 包含事件 A，同时事件 A 包含事件 B，即 $A \subset B$ 和 $B \subset A$ 同时成立，称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

（二）并

由两个事件A,B至少发生其一，也就是说A发生或者B发生，或者A与B同时发生，这样所构成的事件C称为A,B二事件的并(和)，记为$C=A\cup B$，如图1-2.

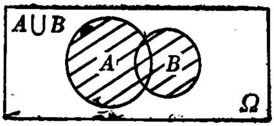

图 1-2

上例中，事件A_1就是A_2与A_3的并，即$A_1=A_2\cup A_3$.

一般地，事件A等于事件$A_k(k=1,2,\cdots)$至少有一发生的事件，则事件A为$A_k(k=1,2,\cdots)$的并，记为$A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

当k取有限个值$k=1,2,\ \cdots,\ n$时得出事件的有限和，以$A=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$表之.

(三) 交

由事件A与事件B同时发生所构成的事件称为事件A与事件B的交，记为$A\cap B$或$A\cdot B$或AB，如图1-3.

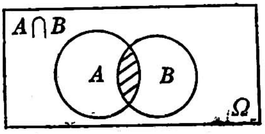

图 1-3

上例中，事件A_1与事件A_5的交便是A_2，即$A_2=A_1\cap A_5$.

类似地，可以规定一系列事件$A_k(k=1,2,\cdots)$的交，记为$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

(四) 互不相容

如果事件A发生，必然导致事件B不发生，即A与B不能同时发生$A\cap B=\varnothing$，称事件A与B是互不相容事件，记为$A\cdot B=\varnothing$，如图1-4.

上例中，A_4与A_7便是互不相容事件.

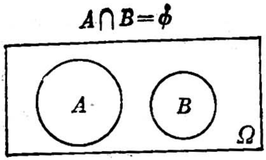

图 1-4

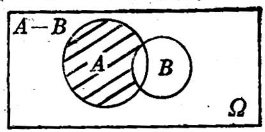

图 1-5

（五）差

事件A发生而事件B不发生所构成的事件，称为事件A与B之差，记为$A-B$，如图 1-5.

上例中，A_2便是A_1与A_3的差，即$A_2=A_1-A_3$.

若事件A与B为互不相容事件，则$A-B=A$.

（六）对立事件（逆事件）

事件$\Omega-A$称为事件A的对立事件或A的逆事件，记为$\bar{A}$，即$\bar{A}=\Omega-A$，如图 1-6.

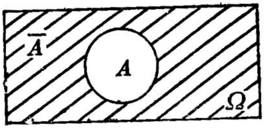

图 1-6

上例中，A_6便是A_1的对立事件，即$A_6=\bar{A}_1$.

显然，若事件A与B互为对立事件，则$A\cup B=\Omega$且$A\cap B=\varnothing$.

例 7 抽查某工厂十件产品，记录不合格品出现的情况，显然，$\Omega=\{0, 1, 2, \cdots, 10\}$.

设A：（不合格品数小于 3），即$A=\{0, 1, 2\}$；

B：（不合格品数小于 5），即$B=\{0, 1, 2, 3, 4\}$；

C：（不合格品数为 4, 5, 6），即$C=\{4, 5, 6\}$；

D：（不合格品数大于 4），即$D=\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

则 $A\subset B$ 或 $B\supset A$；

$B\cup C=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$；

$B\cap C=\{4\}$；

$B-C=\{0, 1, 2, 3\}$.

由$A\cap C=\varnothing$, 知A与C为互不相容事件.

由$B=\Omega-D$, 知B与D互为对立事件, 即$B=\bar{D}$.

由以上所说可以看出，事件间的关系及运算与集合之间的关系及运算是类似的，其运算法则也类似. 事件运算遵循以下法则:

结合律: $\begin{cases}(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), \\ (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);\end{cases}$

交换律: $\begin{cases}A\cup B=B\cup A, \\ A\cap B=B\cap A;\end{cases}$

分配律: $\begin{cases}A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C), \\ A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).\end{cases}$

德·摩根律:
(De Morgan) $\begin{cases}\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}, \\ \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}.\end{cases}$

这些法则都可以推广到有限个事件间的运算, 例如

$$A\cap(B_1\cup B_2\cup B_3\cup\cdots\cup B_n)$$
$$=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\cdots\cup(A\cap B_n).$$

在进行事件运算时，其优先顺序如下：先逆，再交，后并或差.

§2 概　率

某一试验重复多次时会发现某些事件出现的可能性大些，某些事件出现的可能性小些，或各种可能性相等，这种“事件出现的可能性的大小”是事件本身所固有的属性，我们用一个数$P\{A\}$来作为事件A出现的可能性大小的定量表示，则$P\{A\}$就

称为事件A的概率.

如何从数量上规定$P\{A\}$呢? 先给出概率的统计定义,为此引进频率概念.

设随机事件A在n次试验中出现n_A次,则比值

$$f_n\{A\}=\frac{n_A}{n}$$

称为事件A在这n次试验中出现的频率.

若A是必然事件,则$f_n\{A\}=1$;若A是不可能事件,则$f_n\{A\}=0$,显然,对任何事件A有$0\leqslant f_n\{A\}\leqslant 1$.

频率是能反映事件出现可能性大小的一个量,当试验次数不多时,频率有明显的随机性,但是当试验次数增多时又逐渐呈现出稳定性,即在某一常数附近作微小摆动.

观察掷硬币的试验结果,设A表示出现正面的事件,有下表

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_A	$f_n\{A\}$	n_A	$f_n\{A\}$	n_A	$f\{A\}$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

从表中可以看出,当掷硬币次数较少时,事件A出现的频率是不稳定的,差异很大,随着掷硬币次数的增多,事件A出现的频率呈现出稳定性,总是在0.5左右摆动,而逐渐稳定于0.5,这

样0.5这个数反映出事件A出现的可能性的大小.

概率的统计定义: 在n次重复试验下,当n充分大时,事件A在这n次试验中出现的频率将稳定在某个常数附近,我们称此常数为事件A出现的*概率*,记作$P\{A\}$.

上述掷硬币试验,出现正面事件A的概率可以认为$P(A)=0.5$.

事件的频率与概率是度量事件出现可能性大小的两个统计特征.频率是个试验值,具有随机性,可能取多个不同值,因此它只能近似地反映事件出现的可能性大小;概率是个理论值,它由事件的本质所决定,只能取唯一值,能精确地反映事件出现的可能性的大小.

但在实际中,用频率近似代替概率是一个实用有效的办法.我们经常碰到的合格率、废品率、出生率、升学率、死亡率、射击命中率等都是频率.这样求得的概率一般称为经验概率.

§3 古典概型

按概率的统计定义求概率往往是行不通的或者是很繁杂的,而在一些简单、特殊的随机试验下,概率可以用较简单的办法求得,下面讲其中一种情况.

某试验如果满足以下二个条件:

(1) 试验所有结果的个数是有限的,设基本事件空间为$\Omega=\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$;

(2) 各结果的出现是等可能的,即$w_k(k=1, 2, \cdots, n)$是互不相容的等可能事件,则称其为*古典概型*.

概率的古典概型定义: 在古典概型下,设基本事件空间由n

个事件组成，事件A是由m个基本事件组成，则$\frac{m}{n}$为事件A出现的概率，即$P\{A\}=\frac{m}{n}$.

可见在古典概型下，无须进行大量的重复试验，就可求得某事件出现的概率.

例1 口试考场设有50张考签，编号为1,2,3,…,50.一个学生任抽一张应试，每张考签被抽到的可能性是相同的，$\Omega=\{1, 2, \cdots, 50\}$. 则"抽到10号考签"这一事件$A$的概率$P\{A\}=\frac{1}{50}$；"抽到前5号考签"这一事件$B$的概率$P\{B\}=\frac{5}{50}=\frac{1}{10}$.

例2 一批N件产品中有M件次品，从这批产品中任取n件，试求这n件产品中恰有m件次品的概率.

解：设事件A表示"n件产品中恰有m件次品"

从N件产品中任取n件作为一基本事件，则基本事件空间由C_N^n个基本事件组成.

从M件次品中任取m件，再从$N-M$中任取$n-m$件组成A中的一个基本事件，则A由$C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$个基本事件组成，故

$$P\{A\}=\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-n}}{C_N^n}.$$

为了计算比较复杂的事件的概率以及进一步揭露概率的本质，就古典概型说明以下定理.

加法定理：两个互不相容事件A, B的和的概率等于事件A