



高等学校数学学习辅导丛书

概率论与数理统计 全程学习指导

配人大修订版

丛书主编 北京航空航天大学 徐兵

编著 王丽燕 王红丽 王丽娟



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

概率论与数理统计 全程学习指导

配人大修订版

丛书主编 北京航空航天大学 徐兵

编著 王丽燕 王红丽 王丽娟



大连理工大学出版社

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计全程学习指导(配人大修订版)/王丽燕,王红丽,王丽娟编著. —3 版. —大连:大连理工大学出版社,2008.7

高等学校数学学习辅导丛书

ISBN 978-7-5611-2645-5

I. 概… II. ①王… ②王… ③王… III. ①概率论—高等学校—教学参考资料 ②数理统计—高等学校—教学参考资料 IV. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 075385 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail: dulp@ dulp. cn URL: <http://www. dulp. cn>

大连业发印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm

印张:9.25

字数:369 千字

2008 年 7 月第 3 版

2008 年 7 月第 5 次印刷

责任编辑:梁 锋 于建辉

责任校对:舒 道

封面设计:季 强

ISBN 978-7-5611-2645-5

定 价:12.00 元



高等学校数学学习辅导丛书

编写委员会

主 任	北京航空航天大学	徐 兵	教授
副主任	清华大学	韩云瑞	教授
委 员	大连理工大学	姜乃斌	教授
	浙江大学	秦禹春	教授
	大连大学	王丽燕	教授
	大连海事大学	王志平	教授
	南开大学	周概容	教授

INSTRUCTION
TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS



总序

大学数学是高等学校各门类、专业学生必修的基础课,对理工类、经管类学生都非常重要。21 世纪是知识经济时代,数学的重要性更突出,人们甚至把“数学力”看作是“竞争力、成功力、管理力、领导力”。对于准备报考研究生的同学来说,其重要性更是不言而喻。

作为一名从事大学数学教学和科研工作 40 余年的教师,我一直密切关注着大学数学的教育状况。我很早就注意到大连理工大学出版社一直在为学生提供高质量的教学辅导书而努力着。10 多年来,该社先后出版了 50 余种相关的大学数学辅导图书,我经常在课堂上、自习课上、考研辅导班上看到学生们在使用。我也多次仔细阅读他们的辅导书,对于图书的内在质量和选题设计,我非常认可,因此经常向学生推荐。在目前浮躁的图书市场上,大连理工大学出版社的这种真正为学生考虑的做法是非常值得弘扬的。

在出版社推出《高等学校数学系列辅导丛书》10 周年之际,我受出版社之托,担任该系列丛书编委会主任,深感责任重大。一方面,需要延续出版社一直追求的高质量的图书内在品质;另一方面,需要在对现有图书进行规划和整合的基础上,结合目前学生的需求、高校课程教学的基本要求与教学状况以及最新《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》有所创新。为此,本次修订主要围绕以下几个方面展开:

第一,坚持聘请名校名师亲自编写的原则。本套丛书编委会的成员全部来自知名高校,并且都是知名教师。例如,韩云瑞教授在清华大学“学生心目中的好老师”评选活动中,2005、2006 连续两年全校排名第一;大连大学的王丽燕教授一直是“学生最喜爱的老师”;南开大学的周概容教授连续 17 年担任考研《概率论与数理统计》命题组组长。这些优秀教师多年积累的教学经验一定会给学生带来意想不到的收获。

第二,对于全部习题进行重新演算,以保证解题过程的正确,而

**INSTRUCTION
TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS**

且在编委会成员之间相互切磋。对于典型习题,努力寻求最优解法,对于重点例题、习题给出多种解法,以帮助学生打开解题思路。我们希望通过编委会的共同努力,可以让读者真正掌握大学数学的思想和算理。

第三,针对学生不同的学习阶段,设计了不同层次的系列图书,力图为学生提供学习数学的立体空间,引导学生全方位、多角度逐步认识并掌握大学数学,从而使得每本书都成为学生天天见面的辅导老师。大一新生刚进大学校门,要尽快适应大学的学习环境,注重夯实大学数学的基础,为学习专业课打下基础;高年级阶段,很多学生准备进一步学习深造,报考研究生,对大学数学需要进行全面复习及提高。针对这些特点,本套丛书设计了四大系列。

习题全解(全析)系列 为读者解答教材中的习题,像习题课一样,与学生们一起通过对习题的分析、讨论、求解、总结,扎实掌握基础知识,领悟数学的真谛。本系列图书“不是好学生的作业本,而是优秀教师习题课的教案”。读者也可以将该系列丛书作为工具书与教材配套使用。

同步辅导系列 按节同步,讲解细致,其主要特点是“基础、同步”,帮助读者重点掌握大学数学中的“基本概念、基本理论、基本方法”。本书可以帮助学生逐步适应从中学时代“以老师讲解为主”到大学时代“以学生自学为主”学习方式的转变。

全程学习指导系列 指导学生准确理解大学数学中的概念、原理,熟练掌握解题的基本思路、方法,提高分析问题、解决问题的能力,同时,让学生熟悉研究生考试的各类题型,在大学低年级阶段就为将来报考研究生打下坚实的基础并提前做好准备。

典型题精讲系列 以习题讲解为主,在注重基本解题能力培养的同时,增加了一些题目难度较大、但颇具特色的习题,在更高层次上引导学生掌握数学的算理与数学思想。

我们欢迎读者通过各种方式与我们联系,提出建议与意见,以利于本套丛书千锤百炼,惠及更多学子。

祝大家学习进步,前程似锦!

徐 兵

2006年6月

于北京航空航天大学



编者的话

从事大学数学教学已接近 20 年。在此过程中,我深深感受到了数学的理性之美,力量之美,乃至清柔之美。她远不只是工具,更像是一位哲人,启发你,熏陶你,伴你追寻人生的理想。我在讲台上,自然地,将这种意境传递给了学生,使他们在大学学习数学的过程中以新的角度体味“数学”,体味学习。作为教师,我愿意将我的教学经验与大家共享,与大家共同学习,共同提高,这就是我写作本书的初衷。加上同事王红丽和王丽娟的加盟,更增添了我写好本书的信心。

《概率论与数理统计》是大学各门类、各专业学生必修的基础课,也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。本书的目的是帮助广大学生扩大课堂信息量,提高应试能力。本书严格按照教育部高等院校教学指导委员会审订的“本科数学基础课程教学基本要求”(教学大纲),以及教育部最新的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的要求编写。

本书按照被全国许多高校经济类、管理类专业采用的《概率论与数理统计》(人大修订版,袁荫棠编)的章节顺序编写,共 11 章,每章有 4 个版块。

知识点考点精要 列出基本概念、重要定理、主要内容,突出必须掌握或考试出现频率高的核心内容。

典型题真题精解 精选具有代表性的例题进行详尽解析。这些例题涉及内容广,类型多,技巧性强,旨在提高大家分析问题、解决问题的能力,帮助大家掌握基本概念和理论,开拓解题思路,熟练掌握解题技巧。

INSTRUCTION
TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS

教材习题同步解析 本版块为教材习题全解,为大家提供一种比较规范的解题思路和方法,以便读者对照和分析。

模拟试题自测 模拟试题力争反映考试的重点、难点,帮助大家进一步强化训练解题能力,巩固和提高学习效果。

在“典型题真题精解”和“模拟试题自测”版块中采用了大量历年考研真题。为增加信息量,考研真题采用“年代/类别/分值”的标注方式,如“060406”,说明此题是 2006 年数学四的考题,分值 6 分。

常言道,熟能生巧。剖析一定数量的范例,做一定数量的练习,无疑是应试的有效途径。在此过程中扎实掌握基本概念、基础理论、常用方法,注重科学思维方式的培养,才能掌握“数学力”,并将之转化为一种“数学素质”和“竞争力”。

本书自出版以来,连年加印,数次修订。想到成千上万的学子曾经阅读过此书,作为教师,我深感欣慰。每次修订,都有新的体会融入书的新版中,并根据考研大纲的变化,对重点、难点及例题都进行了调整,订正了原书的印刷错误,使其日臻完善。

此次修订,得到了编委会诸位前辈和同仁的指点,特此致谢!

希望读者通过 E-mail 等方式给我们提出宝贵意见和建议。

王丽燕

2006 年 7 月



目 录

第一章 随机事件及其概率 / 1

- 知识点考点精要 / 1
- 典型题真题精解 / 4
- 教材习题同步解析 / 9
- 模拟试题自测 / 26

第二章 随机变量及其分布 / 29

- 知识点考点精要 / 29
- 典型题真题精解 / 36
- 教材习题同步解析 / 50
- 模拟试题自测 / 71

第三章 随机变量的数字特征 / 77

- 知识点考点精要 / 77
- 典型题真题精解 / 80
- 教材习题同步解析 / 91
- 模拟试题自测 / 105

第四章 几种重要的分布 / 108

- 知识点考点精要 / 108
- 典型题真题精解 / 112
- 教材习题同步解析 / 120
- 模拟试题自测 / 131

第五章 大数定律及中心极限定理 / 134

- 知识点考点精要 / 134
- 典型题真题精解 / 136
- 教材习题同步解析 / 139
- 模拟试题自测 / 146

第六章 马尔可夫链 / 148

- 知识点考点精要 / 148
- 教材习题同步解析 / 148

INSTRUCTION
TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS

第七章 样本分布 / 156

知识点考点精要 / 156

典型题真题精解 / 159

教材习题同步解析 / 162

模拟试题自测 / 168

第八章 参数估计 / 171

知识点考点精要 / 171

典型题真题精解 / 173

教材习题同步解析 / 181

模拟试题自测 / 189

第九章 假设检验 / 192

知识点考点精要 / 192

典型题真题精解 / 194

教材习题同步解析 / 198

模拟试题自测 / 205

第十章 方差分析 / 207

知识点考点精要 / 207

典型题真题精解 / 211

教材习题同步解析 / 215

模拟试题自测 / 223

第十一章 回归分析 / 225

知识点考点精要 / 225

典型题真题精解 / 227

教材习题同步解析 / 230

模拟试题自测 / 238

模拟试题自测参考答案 / 240

综合测试 / 270

测试一 / 270

测试二 / 272

综合测试参考答案 / 275

测试一参考答案及提示 / 275

测试二参考答案及提示 / 280

第一章 随机事件及其概率

■ 知识点考点精要

随机事件与样本空间,事件之间的关系与运算,完全(完备)事件组。概率的概念,概率的基本性质,古典概型,几何概型,条件概率,概率的基本公式。事件的独立性,独立重复试验。

一、随机试验与随机事件

1. 基本概念

(1) 随机试验:如果试验满足下列三个特性:

- 1° 可以在相同的条件下重复地进行;
- 2° 每次试验的结果具有多种可能性,试验前可明确知道所有可能结果;
- 3° 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。

则称该试验为随机试验,简称试验,用 E 表示。

(2) 样本空间:试验的所有可能结果构成的集合,称为样本空间,用 Ω 表示。样本空间的元素,即 E 的每个结果,称为样本点。

(3) 随机事件:在一次试验中可能发生也可能不发生,而在大量的重复试验中具有某种规律性的试验结果,称为随机事件,简称为事件。通常用大写字母 A, B, C 等表示。

每次试验中一定发生的事件称为必然事件,用 Ω 表示。

每次试验中一定不发生的事件称为不可能事件,用 $\emptyset$ 表示。只含有一个样本点的事件称为基本事件。

2. 事件之间的关系与运算

(1) 事件之间的四种关系

关系	符号	概率论	集合论
包含关系	$A \subseteq B$	事件 A 发生必有事件 B 发生	A 是 B 的子集
等价关系	$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
对立关系	$\bar{A}$	事件 A 的对立事件	A 的余集
互斥关系	$AB = \emptyset$	事件 A 与事件 B 不能同时发生(或互不相容)	A 与 B 无公共元素

(2) 事件之间的三种运算

运 算	符 号	概率论	集合论
事件的和 (并)	$A \cup B$ (或 $A+B$)	事件“ A 与 B 至少有一个发生”	A 与 B 的并集
	$\bigcup_{i=1}^n A_i$	事件“ $A_1, \dots, A_n$ 至少有一个发生”	$A_1, \dots, A_n$ 的并集
事件的积 (交)	$A \cap B$ (或 AB)	事件“ A 与 B 同时发生”	A 与 B 的交集
	$\bigcap_{i=1}^n A_i$	事件“ $A_1, \dots, A_n$ 同时发生”	$A_1, \dots, A_n$ 的交集
事件的差	$A - B$	事件“ A 发生而 B 不发生”	A 与 B 的差集

(3) 完备事件组

若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为两两互不相容的事件, 并且 $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$, 称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 构成一个完备事件组。

二、随机事件的概率及其性质

1. 概率的公理化定义

设 E 是随机试验, Ω 是它的样本空间, 对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数, 记为 $P(A)$, 称为事件 A 的概率, 如果它满足下列条件:

(1) 对于每一事件 A , $0 \leq P(A) \leq 1$;

(2) $P(\Omega) = 1$;

(3) 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是两两互不相容的事件, 即对于 $i \neq j, A_i A_j = \emptyset$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \text{ (有限可加性)}$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots \text{ (可列可加性)}$$

2. 概率的性质

(1) 不可能事件的概率为 0, 即 $P(\emptyset) = 0$; 必然事件的概率为 1, 即 $P(\Omega) = 1$ 。

(2) 如果 $A \subset B$, 则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$, $P(B) \geq P(A)$ 。

(3) 对于任一事件 A , $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ 。

(4) 对于任意两事件 A, B , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

一般地, 对于 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

3. 概率的古典定义

若随机试验 E 的样本空间 Ω 由 n 个基本事件构成(即 Ω 只含有有限多个基本事件),每个基本事件是否发生具有相同的可能性(等可能性),事件 A 由其中 m 个基本事件组成,则

$$P(A) = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{\Omega \text{ 中基本事件总数}} = \frac{m}{n}$$

4. 几何概率

将古典概型中的有限推广到无限,保留等可能性,就得到几何概型。

设区域 G 的长度(面积或体积)为 D ,质点可以等可能地落在 G 中的任何一点, g 是 G 的一部分,其长度(面积或体积)为 d ,定义事件 A “质点落在 g 内”的概率为

$$P(A) = d/D$$

5. 条件概率

在事件 B 发生的条件下,事件 A 发生的概率,称为事件 A 在事件 B 已发生的条件下的条件概率。记做 $P(A | B)$ 。公式为

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

三、计算公式

1. 加法公式

如果事件 A 与 B 是互不相容的,则事件 A 与 B 的和的概率等于它们的概率之和。即

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

对于有限和可列的情形仍然成立。

2. 乘法公式

两个事件的积的概率等于其中一个事件的概率乘以在此事件出现的条件下另一事件的条件概率,即

$$P(AB) = P(A)P(B | A) \quad (P(A) > 0)$$

或

$$P(AB) = P(B)P(A | B) \quad (P(B) > 0)$$

一般地

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 A_2) \cdots P(A_n | A_1 \cdots A_{n-1})$$

$$(P(A_1 \cdots A_{n-1}) > 0)$$

3. 全概率定理

如果事件组 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 满足 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 互不相容, $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ (即 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为完备事件组), 且 $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$, 则对任一事件 A , 有

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i)$$

4. 贝叶斯定理

在全概率定理的条件下, 如果 $P(A) > 0$, 则

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A | B_i)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i)}$$

四、事件的独立性

设 A, B 是试验 E 的两个事件, 若 $P(B | A) = P(B)$ 或 $P(A | B) = P(A)$, 称事件 A 与 B 是相互独立的。此时 $P(AB) = P(A)P(B)$ 。

一般地, 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 $n (n > 2)$ 个事件, 如果对于任意 $k (2 \leq k \leq n)$ 个事件积事件的概率等于各个事件概率的积, 则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是相互独立的。

若 A, B 独立, 则 A 与 $\bar{B}, \bar{A}$ 与 $B, \bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 都独立。

五、独立试验序列概型

如果一个试验 E 只有两个对立的可能结果, 事件 A 发生或事件 $\bar{A}$ 发生, 且各次试验结果互不影响, 即每次试验结果出现的概率都不依赖于其他各次试验的结果, 设 $P(A) = p, P(\bar{A}) = 1 - p = q (0 < p < 1)$ 。将 E 独立地重复进行 n 次, 则称这一串重复的独立试验为 n 重贝努里试验, 简称为贝努里概型或独立试验序列概型。

在 n 重贝努里试验中, 事件 A 恰好发生 $k (0 \leq k \leq n)$ 次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n$$

此公式也称为二项概率公式。

典型题真题精解

【例1】 (事件的运算) 设 A, B 是任意两个随机事件, 则 $P\{(\bar{A} \cup B)(A \cup B)(\bar{A} \cup \bar{B})(A \cup \bar{B})\} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解 根据事件的运算及其性质, 可得

$$(\bar{A} \cup B)(A \cup B)(\bar{A} \cup \bar{B})(A \cup \bar{B}) = \emptyset$$

从而

$$P\{(\bar{A} \cup B)(A \cup B)(\bar{A} \cup \bar{B})(A \cup \bar{B})\} = 0$$

【例 2】 (920103) (概率的性质) 已知 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = 0$,

$P(AC) = P(BC) = \frac{1}{16}$, 则事件 A, B, C 全不发生的概率为多少?

$$\begin{aligned}\text{解 } P(\bar{A} \bar{B} \bar{C}) &= P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) + P(C) - \\ &\quad P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)]\end{aligned}$$

因 $ABC \subset AB$, 所以 $0 \leq P(ABC) \leq P(AB) = 0$, 故

$$P(ABC) = 0$$

$$\text{从而 } P(\bar{A} \bar{B} \bar{C}) = 1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{16} \right) = \frac{3}{8}$$

【例 3】 (900405) (古典概型) 从 $0, 1, 2, \dots, 9$ 等十个数字中任选出三个不同的数字, 试求下列事件的概率:

$$A_1 = \{\text{三个数字中不含 } 0 \text{ 和 } 5\}$$

$$A_2 = \{\text{三个数字中含 } 0 \text{ 但不含 } 5\}$$

$$A_3 = \{\text{三个数字中不含 } 0 \text{ 或 } 5\}$$

解 随机试验是从十个数字中任取三个数字, 样本空间 Ω 的样本点总数为 C_{10}^3 。

如果取得的三个数字不含 0 和 5, 则这三个数字必须在其余八个数字中取得, 故事件 A_1 所包含的样本点总数为 C_8^3 , 从而

$$P(A_1) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}$$

如果取得的三个数字中含 0, 则需取到 0, 再在其余九个数字中取两个数字, 这样有可能取到 5, 所以再将取到 5 的 $C_1^2 C_8^2$ 种情况去掉, 得事件 A_2 所包含的样本点数为 $C_1^1 C_9^2 - C_1^2 C_8^2$, 从而

$$P(A_2) = \frac{C_1^1 C_9^2 - C_1^2 C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{7}{30}$$

或者先取到 0, 再在不含 5 的 8 个数字中任取两个数字, 则 A_2 所包含的样本点总数为 $C_1^1 C_8^2$, 从而

$$P(A_2) = \frac{C_1^1 C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{7}{30}$$

如果记 B 为事件“取得三个数字中不含 0”, C 为事件“取得三个数字中不含 5”, 则 $A_3 = B \cup C$, 从而

$$\begin{aligned}P(A_3) &= P(B) + P(C) - P(BC) \\ &= \frac{C_9^3}{C_{10}^3} + \frac{C_9^3}{C_{10}^3} - \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{14}{15}\end{aligned}$$

同类型的问题还有产品的随机抽样问题, 摸球问题, 鞋子配对问题等。

【例 4】 (920303) (古典概型) 将 C, C, E, E, I, N, S 等七个字母随机地排成一行, 那么恰好排成英文单词 SCIENCE 的概率为多少?

解 将七个字母随机地排成一行, 共有 P_7^7 种排法, 这就是随机试验的样本空间所含的样本点总数. 而排成英文单词 SCIENCE 共有 $1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 = 4$ 种排法, 故所求的概率为

$$p = \frac{4}{P_7^7} = \frac{1}{1260}$$

同类型的问题还有书、报及电话号码等的排列问题.

【例 5】 (古典概型) 掷 5 次骰子, 试求:

(1) 恰好有 3 次点数相同的概率;

(2) 至少有两次 6 点的概率.

解 (1) 随机试验的样本空间所含的基本事件总数是 6^5 , 5 次中恰好有 3 次是 1 点的基本事件数是 $C_3^5 5^2$, 恰好有 3 次是 2, 3, ..., 6 点的基本事件数也分别是 $C_3^5 5^2$, 故

$$p = \frac{6 \cdot C_3^5 \cdot 5^2}{6^5} = \frac{125}{648} \approx 0.193$$

(2) 不出现 6 点的基本事件数是 5^5 , 只出现一次 6 点的基本事件数是 $C_1^5 5^4$, 故至少出现两次 6 点的概率是

$$p = 1 - \frac{5^5}{6^5} - \frac{C_1^5 \cdot 5^4}{6^5} = \frac{1526}{7776} \approx 0.196$$

同类型的问题还有盒子装球, 分房问题, 邮信及生日问题等.

【例 6】 (会面问题, 几何概型) 甲、乙两人约定在 6 ~ 7 时在某处会面, 并约定先到者应等候另一个人一刻钟, 过时即可离去. 求两人能会面的概率.

解 以 x 和 y 分别表示甲、乙两人到达约会地点的时间, 则两人能会面的充要条件为

$$|x - y| \leq 15$$

如图 1-1 建立坐标系, 则 (x, y) 的所有可能结果是边长为 60 的正方形, 而可能的会面时间是图中阴影部分所示. 这是一个几何概率问题, 由等可能性,

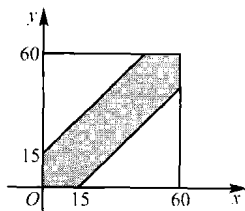


图 1-1

$$p = d/D = \frac{60^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 15}{60^2} = \frac{7}{16}$$

【例 7】 (条件概率) 掷两枚骰子, 在第一枚骰子出现的点数被 3 整除的条件下, 求两枚骰子出现的点数之和大于 8 的概率.

解法 1 (利用条件概率的定义) 同时掷两枚骰子, 共有 $n = 6 \times 6 = 36$ 种可能结果, 这就是样本空间所包含的样本点总数。若记事件 A 为“第一枚骰子出现的点数能被 3 整除”, 则第一枚骰子出现 3 点或 6 点, 此时事件 A 所包含的样本点总数为 $m = 2 \times 6 = 12$ 。记事件 B 为“两枚骰子出现的点数之和大于 8”, 则 $AB = \{(3, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$, 从而

$$P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}, P(AB) = \frac{5}{36}$$

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{5/36}{1/3} = \frac{5}{12}$$

解法 2 (利用缩减样本空间) 已知第一枚骰子出现的点数能被 3 整除, 此时的缩减样本空间为 $\Omega_A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$, 共有 12 个样本点, 其中“两枚骰子出现的点数之和大于 8”的共有 5 个样本点, 于是

$$P(B | A) = \frac{5}{12}$$

【例 8】 (930103) (全概率公式) 一批产品共有 10 个正品和 2 个次品, 任意抽取两次, 每次抽一个, 抽出后不放回, 则第二次抽出的是次品的概率为多少?

解 记 A 为第一次抽出的是次品, B 为第二次抽取的是次品, 则 $B = AB + \bar{A}B$, 从而

$$p = P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B)$$

$$= \frac{2}{12} \times \frac{1}{11} + \frac{10}{12} \times \frac{2}{11} = \frac{1}{6}$$

同类型的还有抽签等问题。这类问题都是将一个复杂的事件分解成若干个简单事件的和, 再利用加法公式进行计算。

【例 9】 (独立性) 甲、乙两人同时向一敌机炮击, 已知甲击中的概率为 0.6, 乙击中的概率为 0.5, 求敌机被击中的概率。

解法 1 记 A 为事件“甲击中敌机”, B 为事件“乙击中敌机”, C 为事件“敌机被击中”, 则 $C = A \cup B$, 于是

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$= 0.6 + 0.5 - 0.6 \times 0.5 = 0.8$$

解法 2 $P(\bar{C}) = P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$

$$= (1 - 0.6) \times (1 - 0.5) = 0.2$$

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 0.2 = 0.8$$

【例 10】 (独立性) 假设一口袋中装有 4 个球, 其中一个白球, 一个红球, 一个黄