北京市高等教育精品教材立项项目

# 高等代数（下册）

## ——大学高等代数课程创新教材

丘维声 著

全国首届高等学校国家级教学名师倾力打造

内容精华：重基础，讲想法，理论深刻

典型例题：例题多，题型广，分析透彻

应用小天地：提升能力，开拓视野

用心阅读此书，有助于您在高等代数理论上和科学思维能力上都达到相当的高度！

清华大学出版社

北京市高等教育精品教材立项项目

# 高等代数（下册）

## ——大学高等代数课程创新教材

丘维声　著

清华大学出版社
北　京

## 内容简介

本套书作为大学"高等代数"课程的创新教材，是国家级优秀教学团队（北京大学基础数学教学团队）课程建设的组成部分，是国家级教学名师多年来进行高等代数课程建设和教学改革的成果。

本套书以讲述线性空间和多项式环的结构及其态射为主线，遵循高等代数知识的内在规律和学生的认知规律安排内容体系，按照数学思维方式编写，着重培养数学思维能力。上册内容包括：线性方程组，行列式，$n$ 维向量空间 $K^n$，矩阵的运算，欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$，矩阵的相抵、相似，以及矩阵的合同与二次型。下册内容包括：多项式环，线性空间，线性映射，具有度量的线性空间（欧几里得空间、酉空间、正交空间和辛空间），环、域和群的概念及重要例子，以及多重线性代数。

书中每节均包括内容精华、典型例题、习题，章末有补充题（除第 11 章外），还特别设置了"应用小天地"板块。本书内容丰富、全面、深刻，阐述清晰、详尽、严谨，可以帮助读者在高等代数理论上和科学思维能力上都达到相当的高度。本书适合用作综合大学、高等师范院校和理工科大学的"高等代数"课程的教材，还可作为"高等代数"或"线性代数"课程的教学参考书，也是数学教师和科研工作者高质量的参考书。



**图书在版编目（CIP）数据**

高等代数（下册）——大学高等代数课程创新教材/丘维声著. —北京：清华大学出版社，2010.10

ISBN 978-7-302-23759-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①丘… Ⅲ.①高等代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 168117 号

**责任编辑**：吴颖华
**封面设计**：张 岩
**版式设计**：文森时代
**责任校对**：马军令
**责任印制**：王秀菊
**出版发行**：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
**社 总 机**：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
**投稿与读者服务**：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
**质 量 反 馈**：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
**印 装 者**：清华大学印刷厂
**经　销**：全国新华书店
**开　本**：185×260　**印　张**：43.5　**字　数**：1002 千字
**版　次**：2010 年 10 月第 1 版　**印　次**：2010 年 10 月第 1 次印刷
**印　数**：1～5000
**定　价**：62.00 元

产品编号：032587-01

# 序

高等代数是大学数学科学学院（或数学系，应用数学系）最主要的基础课程之一。本套教材是作者在北京大学进行高等代数课程建设和教学改革的成果，它具有下述鲜明特色。

**1. 主线明确。以研究线性空间和多项式环的结构及其态射（线性映射，多项式环的通用性质）为主线。**自从1832年伽罗瓦（Galois）利用一元高次方程的根的置换群给出了方程有求根公式的充分必要条件之后，代数学的研究对象发生了根本性的转变。研究各种代数系统的结构及其态射（即保持运算的映射）成为现代代数学研究的中心问题。20世纪，代数学研究结构及其态射的观点已经渗透到现代数学的各个分支中。因此，在高等代数课程的教学中贯穿研究线性空间和多项式环的结构及其态射这条主线，就是把握住了代数学的精髓。

本套教材上册的第1,2,3章研究线性方程组的解法、解的情况的判别和解集的结构时，贯穿了研究数域 $K$ 上 $n$ 维向量空间 $K^n$ 及其子空间的结构这条主线。线性方程组是数学中最基础、最有用的知识，$n$ 维向量空间 $K^n$ 是 $n$ 维线性空间的一个具体模型，$n$ 元齐次线性方程组的解空间的维数公式本质上是线性映射的核与值域的维数公式。因此把线性方程组和 $n$ 维向量空间 $K^n$ 作为高等代数课程的开始部分的内容，既符合学生的认知规律，又是高等代数知识的内在规律的体现。上册的第4,5,6章研究矩阵的运算，矩阵的相抵、相似、合同关系及与它们有关的矩阵的特征值和特征向量、二次型。研究矩阵的运算为研究线性映射打下了基础。矩阵的相抵关系在解决有关矩阵的秩的问题中起着重要作用，而矩阵的秩本质上是相应的线性映射的值域的维数。研究矩阵的相似标准形本质上是研究线性变换在一个合适的基下的矩阵具有最简单的形式。研究对称矩阵的合同标准形与研究二次型的化简密切相关，而二次型与线性空间 $V$ 上的双线性函数有密切联系。

本套教材下册的第7章研究一元和 $n$ 元多项式环的结构及其态射（多项式环的通用性质），第8章研究线性空间的结构，第9章研究线性映射，第10章研究具有度量的线性空间的结构及与度量有关的线性变换。第11章研究多重线性代数时，基础概念是多重线性映射，主要工具是线性空间的张量积。

**2. 内容全面。**本套教材包括线性代数，多项式理论，环、域、群的概念及重要例子，多重线性代数，共四部分。在下册第7章从数域 $K$ 上所有一元多项式组成的集合、整数集、数域 $K$ 上所有 $n$ 级矩阵组成的集合都有加法和乘法运算，自然而然地引出了环的概念；从数域 $K$ 上所有分式组成的集合、模 $p$ 剩余类（$p$ 是素数）组成的集合，水到渠成地引出了域的概念。于是我们在下册第8章讲的是任意域上的线性空间，而不只是数域上的线

$$\dim C(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{s} r_i k_i^2,$$

$$C(\boldsymbol{A}) \cong C(\boldsymbol{A}_1) \dotplus C(\boldsymbol{A}_2) \dotplus \cdots \dotplus C(\boldsymbol{A}_s)$$
$$\cong \mathrm{Hom}_{F[\boldsymbol{A}_1]}(W_1, W_1) \dotplus \cdots \dotplus \mathrm{Hom}_{F[\boldsymbol{A}_s]}(W_s, W_s).$$

若 $m(\lambda)$的标准分解式中至少有一个 $l_j>1$,且 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准形中至少有两个有理块的最小多项式不互素,记 $W_i=\mathrm{Ker}\ p_i^{l_i}(\boldsymbol{A})$,$\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{A}|W_i$,$i=1,2,\cdots,s$,则

$$C(\boldsymbol{A}) \cong C(\boldsymbol{A}_1) \dotplus C(\boldsymbol{A}_2) \dotplus \cdots \dotplus C(\boldsymbol{A}_s), \quad \dim C(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{s} \dim C(\boldsymbol{A}_i).$$

求 $C(\boldsymbol{A})$剩下来未解决的情形是:$\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$是一个不可约多项式的方幂 $m(\lambda)=p^l(\lambda)$,且 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形至少有两个 Jordan 块,或者 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准形至少有两个有理块。这时我们解决了 $C^2(\boldsymbol{A})$的结构问题:

$$C^2(\boldsymbol{A}) = F[\boldsymbol{A}], \quad \dim C^2(\boldsymbol{A}) = l \deg p(\lambda),$$

其中 $C^2(\boldsymbol{A}) := \{\boldsymbol{H} \in \mathrm{Hom}(V,V) \mid \boldsymbol{HB}=\boldsymbol{BH}, \forall \boldsymbol{B} \in C(\boldsymbol{A})\}$,显然 $C^2(\boldsymbol{A})$是域 $F$ 上的一个线性空间。

**5. 强调思维。本套教材按照数学的思维方式编写,着重培养数学思维能力。**我们把数学的思维方式概括成:观察客观世界的现象,抓住其主要特征,抽象出概念或者建立模型;通过直觉判断、归纳推理、类比推理、联想推理和逻辑推理等进行探索,作出猜测;然后经过深入分析、逻辑推理和计算等进行论证,揭示出事物的内在规律,从而使纷繁复杂的现象变得井然有序。按照“观察—抽象—探索—猜测—论证”的思维方式编写教学内容,就使得数学比较容易学,而且同学们可以从中受到数学思维方式的熏陶,终身受益。

例如,一元多项式环的通用性质是很深刻的数学内容,而我们从简便计算 $101^2$ 引出:在完全平方公式$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$ 中,$x$ 也可以用 $n$ 级矩阵 $A$ 代入(根据矩阵乘法的分配律直接计算得出)。由此猜测:在数域 $K$ 上的一元多项式环 $K[x]$中,有关加法和乘法的等式,在 $x$ 用矩阵 $A$ 代入后,左右两边保持相等。由此进一步抽象并且经过论证得出一元多项式环的通用性质。这样做就使得一元多项式环的通用性质比较容易理解了。又如,不可约多项式是数域 $K$ 上一元多项式环 $K[x]$的结构中的基本建筑块,复系数不可约多项式只有一次多项式;实系数不可约多项式只有一次多项式和判别式小于零的二次多项式。有理系数不可约多项式有哪些?如何判别?思路是什么呢?我们首先举了一个有理系数多项式的具体例子,把它的各项系数分母的最小公倍数作为分母,提出一个分数,使得括号内的多项式的各项系数都为整数,并且把这些整数的公因数也提出去,这时括号内的多项式的各项系数的最大公因数只有 1 和 −1。这种整系数多项式称为本原多项式。这就自然而然地引出了本原多项式的概念。任何一个有理系数多项式都可以表示成一个本原多项式与一个有理数的乘积,于是一个有理数系数多项式是否不可约与相应的本原多项式是否不可约是一致的。这样我们就找到了思路:去研究本原多项式的不可约的判定。为此需要探索本原多项式的性质。由于本原多项式的各项系数的最大公因数只有 1 和 −1,因此直觉判断两个本原多项式如果能够互相整除(此时称它们相伴),那么它们只相差一个正负号;然后证明这一猜测是正确的。由于因式分解涉及到乘法,因此自然要问:两个本原多项式的乘积是否还是本原多项式?这在直观上不容易看出,可以尝

试假设两个本原多项式的乘积不是本原多项式，去进行逻辑推理，得出了矛盾，因此两个本原多项式的乘积仍是本原多项式。这就自然而然地得出了高斯引理。想寻找本原多项式不可约的充分条件，这犹如大海捞针，我们可以反过来思考：如果一个次数大于 0 的本原多项式可约，那么它可以分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，从高斯引理我们可以进一步直觉判断它可以分解成两个次数较低的本原多项式的乘积。经过证明，这个猜测是正确的。由于任何一个素数都不可能整除本原多项式的各项系数，因此为了从一个本原多项式可约推出进一步的结论，我们考虑这样一种情形：对于一个次数大于 0 的本原多项式 $f(x)$，存在一个素数 $p$，$p$ 能够整除$f(x)$的首项系数以外的其他各项系数，但是 $p$ 不能整除首项系数，如果 $f(x)$可约，那么它可以分解成两个次数较低的本原多项式的乘积。由此经过逻辑推理，得出：$p$ 的平方能整除$f(x)$的常数项。因此对于这种本原多项式 $f(x)$，如果 $p$ 的平方不能整除常数项，那么$f(x)$不可约。这就自然而然地得出了本原多项式不可约的充分条件：存在一个素数 $p$ 满足上述三个条件。这就是著名的 Eisenstein 判别法。我们经过探索和论证得出 Eisenstein 判别法，不仅使同学们对于素数 $p$ 满足的三个条件印象很深刻，而且让他们知道了 Eisenstein 判别法是怎么来的，受到了数学思维方式的熏陶。

又如，在实数域上的线性空间 $V$ 中引进度量概念的办法是：在 $V$ 上定义一个正定的对称双线性函数，称为内积，这时 $V$ 称为一个实内积空间。在复数域上的线性空间 $V$ 中引进度量概念的方法与实数域不同，这是因为复线性空间 $V$ 上的双线性函数不可能满足正定性。为了能定义向量的长度，需要有正定性。为此，复线性空间 $V$ 上的内积的定义为：$V$ 上的一个二元函数如果满足 Hermite 性、对第一个变量线性、正定性，那么这个二元函数称为 $V$ 上的一个内积，此时称 $V$ 是酉空间。对于任意一个域 $F$ 上的线性空间 $V$，能不能引进度量概念？关键是要有内积的概念。由于在一般的域中，没有“正”元素的概念，因此不可能谈论正定性，于是长度、角度、距离的概念也就没有了。但是正交这个概念还是可以推广到任意域上线性空间中。内积应当是 $V$ 上的一个二元函数 $f$，为了能充分利用线性空间有加法和纯量乘法的特性，$f$ 应当是 $V$ 上的双线性函数。由于两个向量 $\alpha$ 与 $\beta$ 正交应当是相互的，因此 $f$ 应当是对称或斜对称的。从而 $V$ 上可以指定一个对称双线性函数 $f$ 作为内积，此时$(V;f)$称为**正交空间**。$V$ 上也可以指定一个斜对称双线性函数 $g$ 作为内积，此时$(V,g)$称为**辛空间**。即使在实数域上的线性空间中，在某些问题里，也不用正定的对称双线性函数作为内积，而指定一个非退化的对称双线性函数作为内积。例如，在爱因斯坦的狭义相对论中，从光速不变原理导出了时间-空间的新的坐标变换公式，称它为**洛伦兹**(Lorentz)**变换**。爱因斯坦的**狭义相对性原理**指出：“所有的基本物理规律都应在任一惯性系中具有相同的形式。”一个点 $P$ 在给定的惯性系 $Oxyz$ 中的时间-空间坐标 $(t,x,y,z)'$ 是 4 维实线性空间 $\mathbf{R}^4$ 的一个向量。类比欧几里得空间中，$(\alpha-\beta,\alpha-\beta)$是 $\alpha$ 与 $\beta$ 的距离的平方，如果在 $\mathbf{R}^4$ 中指定一个非退化的对称双线性函数 $f$，那么把$f(\alpha-\beta,\alpha-\beta)$称为 $\alpha$ 与 $\beta$ 的**时-空间隔的平方**。根据狭义相对性原理，洛伦兹变换 $\sigma$ 保持任意两个向量的时-空间隔的平方不变。若令

$$f(\alpha,\beta)=-c^2t_1t_2+x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

其中 $c$ 是光速，$\alpha=(t_1,x_1,y_1,z_1)'$，$\beta=(t_2,x_2,y_2,z_2)$。则可以证明 $f(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha))=$

$f(\alpha,\alpha)$。从而

$$f(\sigma(\alpha)-\sigma(\beta),\sigma(\alpha)-\sigma(\beta)) = f(\alpha-\beta,\alpha-\beta)$$

因此在 $\mathbf{R}^4$ 中把上述非退化的对称双线性函数 $f$ 作为内积,此时称($\mathbf{R}^4,f$)是一个**闵柯夫斯基**(Minkowski)**空间**。假如在 $\mathbf{R}^4$ 中指定一个正定的对称双线性函数作为内积,那么洛伦兹变换不可能保持任意两个向量的距离的平方不变。因此在 $\mathbf{R}^4$ 中应当指定上述非退化的对称双线性函数 $f$ 作为内积。闵柯夫斯基空间就是一个正交空间。这是需要讨论正交空间的物理背景。

再如,关于线性空间的张量积,我们不是一开始就给出线性空间的张量积的定义,而是先在 11.1 节例 5 的点评中指出,设 $V,U$ 分别是域 $F$ 上 $n$ 维、$m$ 维线性空间,用 $\mathscr{T}(V^*,U^*)$表示 $V^*\times U^*$ 上的所有双线性函数组成的线性空间,则存在 $V\times U$ 到 $\mathscr{T}(V^*,U^*)$的一个双线性映射 $\tau$(可具体写出)。在 11.2 节中深入分析 $\mathscr{T}(V^*,U^*)$和 $\tau$ 的性质,发现从 $V\times U$ 到域 $F$ 上任一线性空间 $W$ 的任一双线性映射 $\mathbf{A}$,存在 $\mathscr{T}(V^*,U^*)$到 $W$ 的唯一的线性映射 $\varphi$,使得 $\mathbf{A}=\varphi\tau$。由此引出了线性空间 $V$ 和 $U$ 的张量积的概念,这时水到渠成地得出了 $V$ 与 $U$ 的张量积的定义。这就使得张量积这一原本深奥难懂的概念变得清晰,成为同学们能够把握的一个概念,因为($\mathscr{T}(V^*,U^*),\tau$)就是 $V$ 与 $U$ 的一个张量积。

我们不仅在每一节的内容精华部分按照数学思维方式编写,而且在典型例题部分也着力于培养数学思维能力。我们在例题的解法或点评中,讲清楚关键的想法,以及这个想法是怎么想出来的,让学生从中学习怎样科学地思考。我们还编写了一些由内容精华拓展而来的例题,让学生从中学会提出问题。例如,实内积空间 $V$ 上的正交变换一定保持向量的长度不变,保持向量间的距离不变,保持正交性不变等。那么反过来,$V$ 到自身的满射 $\mathbf{A}$ 如果保持向量的长度不变,那么 $\mathbf{A}$ 是不是正交变换?保持向量间的距离不变呢?保持正交性不变呢?这些在第 10 章 10.4 节典型例题的例 3、例 23、例 22 进行了讨论。

**6. 例题丰富。每一节除了“内容精华”外,还专门设置了“典型例题”的栏目。**这些例题有的是“内容精华”中理论的延伸,有的是给同学们呈现如何解题的范例,有的是为了培养同学们分析问题和解决问题的能力,旨在帮助同学们在高等代数理论上和科学思维能力上都达到相当的高度。

**7. 展示应用。本套书开辟了“应用小天地”栏目。**同学们常问:学习高等代数有什么具体应用?我们在每一章后面都写了一个方面的应用。例如,第 5 章写了矩阵的特征值在实际问题中的应用。第 6 章写了二次曲面的类型。第 7 章写了序列密码和 $m$ 序列。第 8 章写了线性空间在编码中的应用。20 世纪物理学取得的两个划时代的进展是建立了相对论和量子力学。我们在第 10 章 10.6 节由爱因斯坦的狭义相对性原理引出了闵柯夫斯基空间。在第 10 章的“应用小天地”栏目里写了“酉空间在量子力学中的应用”。详细介绍了历史上量子力学的建立过程,阐述了一个量子体系的所有量子态(可归一化)组成的集合 $\mathscr{H}$ 可形成一个酉空间,与这个量子体系的力学量 $A$(例如,位置、动量、角动量、动能和势能等)相应的算符 $\hat{A}$ 都是酉空间 $\mathscr{H}$ 上的线性变换,而且一定是 Hermite 变换。当量子体系处于一个量子态,人们去测量力学量 $A$ 时,一般说来,可能出现不同的结果,各有一定的概率。如果量子体系处于一种特殊的状态下,那么测量力学量 $A$ 所得的结果是

唯一确定的，这种特殊的状态称为力学量 $A$ 的本征态。可以证明：$\psi$ 是力学量 $A$ 的本征态当且仅当 $\psi$ 是相应算符 $\hat{A}$ 的一个特征向量，其所属的特征值就是测量 $A$ 所得的唯一结果。第 11 章的"应用小天地"栏目里写了"张量积在量子隐形传态中的应用"。发送者要把一个具有自旋的粒子 1 的自旋状态传送给接收者，而粒子 1 本身不传给接收者，这能办到吗？1993 年 C. H. Bennett 等人提出了一个传递方案，关键是把粒子 2 和 3 制备成为 EPR 对处于纠缠态，然后把粒子 2 传递给发送者，同时把粒子 3 传送给接收者，最终粒子 1 的自旋态传送给了粒子 3，实现了量子隐形传态，这在量子信息论中起着重要作用。之所以能把粒子 1 的自旋态隐形传送给粒子 3，关键是利用了张量积，本书详细阐述了其中的道理。

**8. 可读性强。**本套教材按照数学的思维方式编写，叙述清晰、详尽、严谨，对于后文要用到的结论，前面章节均作了铺垫，环环相扣，层层深入，可读性强。

本套教材适合用作综合大学、高等师范院校和理工科大学"高等代数"课程的教材，上册供第一学期使用，下册供第二学期使用。每一节的"内容精华"（除去打 * 号的和用楷体字排印的以外）在大课中讲授；"典型例题"中的一部分在大课中讲授，一部分在习题课中进行，一部分作为课外作业，一部分供同学们自己思考和阅读；"习题"留给同学们课外作业。书末有习题解答或提示。想了解习题详细解答的同学，可以参阅《高等代数学习指导书（上册、下册）》（丘维声编著，北京：清华大学出版社，2005 年、2009 年）中相应章节的典型例题的解答或习题解答。本套教材还可作为"高等代数"或"线性代数"课程的教学参考书，也是数学教师和科研工作者高质量的参考书。

本套教材荣获 2009 年"北京市高等教育精品教材立项项目"，被评为重大支持项目，特此向北京市教育委员会表示感谢！

感谢本套教材的责任编辑吴颖华，她为本书编辑出版付出了辛勤劳动。

我们坦诚欢迎广大读者对本套教材提出宝贵意见。

丘维声
北京大学数学科学学院
2010 年 8 月

# 目　　录

# 第7章　多项式环

我们在中学时就知道列方程和解方程对于解决实际问题很有用，而解一元高次方程 $f(x)=0$就是求一元多项式 $f(x)$的根，于是求一元多项式的根便成为古典代数学研究的中心问题。求一元多项式的根的基本思路是把一元多项式因式分解，为此需要研究一元多项式组成的集合的结构。本章就来研究这个问题。

一元多项式诱导的多项式函数是初等函数中最简单的一种，因此在数学分析中，常用多项式函数逼近一般的 $n$ 阶可微函数。在具有加法和乘法运算的数学对象中，除了整数以外，一元多项式的形式最简洁、运算最简捷，因此成为基础的数学对象。通过研究一元多项式的运算性质，可以得到其他具有加法和乘法运算的数学对象的相应性质，即所谓的一元多项式的通用性质。在当今信息时代，多项式在计算机科学、现代通信、编码和密码等许多领域都有应用。

本章以研究数域 $K$ 上一元多项式环的结构和通用性质为主线。此外，还将介绍 $n$ 元多项式环的结构。

## 7.1　一元多项式环

### 7.1.1　内容精华

**一、一元多项式的概念和运算**

我们在初中就学过多项式；在大学数学分析课程中学过一元多项式函数：$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$，其中 $x$ 是变量，可以取任意实数，$a_i(i=0,1,\cdots,n)$都是给定的实数(即实常数)。现在我们要把多项式的概念加以推广，使其有更广泛的应用。除了用任意数域 $K$ 代替实数域 $\mathbf{R}$ 外，最本质的推广是：$x$ 不仅可以用数域 $K$ 中任意数代入，而且还可以用 $n$ 级矩阵或多项式等代入。

1. 数域 $K$ 上一元多项式的定义：

**定义 1　数域 $K$ 上的一元多项式**是指形如下述的表达式：

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, \tag{1}$$

其中 $x$ 是一个符号(它不属于 $K$)；$n$ 是非负整数；$a_i\in K(i=0,1,\cdots,n)$，称为**系数**；$a_ix^i$ 称为 **$i$ 次项**$(i=1,2,\cdots,n)$；$a_0$ 称为**零次项**或**常数项**。两个这种形式的表达式相等规定为它们含有完全相同的项(除去系数为 0 的项外，系数为 0 的项允许任意删去和添加)。此时，

符号 $x$ 称为**不定元**。

系数全为 0 的多项式称为**零多项式**，记作 0。

从定义立即得出：数域 $K$ 上两个一元多项式相等当且仅当它们的同次项的系数都对应相等。即，一元多项式的表示方式是唯一的。

我们常常用 $f(x),g(x),h(x),\cdots$ 或 $f,g,h,\cdots$ 表示一元多项式。

2. 一元多项式的重要特点是它有"次数"的概念。

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，如果 $a_n\neq 0$，那么称 $a_nx^n$ 是 $f(x)$ 的**首项**，称 $n$ 是 $f(x)$ 的**次数**，记作 $\deg f(x)$ 或 $\deg f$。

零多项式的次数定义为 $-\infty$，并且规定：

$$(-\infty)+(-\infty):=-\infty,$$
$$(-\infty)+n:=-\infty,\ \forall n\in\mathbf{N},$$
$$-\infty<n,\ \forall n\in\mathbf{N}.$$

其中 $\mathbf{N}$ 表示自然数集（注意：$0\in\mathbf{N}$）。

**注意**：*零多项式与零次多项式不要混淆，零次多项式是形如 $a$，其中 $a\in K^*$。我们用 $K^*$ 表示 $K$ 中所有非零数组成的集合。*

3. 数域 $K$ 上所有一元多项式组成的集合记作 $K[x]$。从中学学过的多项式的加法和乘法运算受到启发，在 $K[x]$ 中可以定义加法和乘法运算：

设 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i,g(x)=\sum\limits_{i=0}^{m}b_ix^i$，不妨设 $m\leqslant n$，令

$$f(x)+g(x):=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i, \tag{2}$$

$$f(x)g(x):=\sum_{s=0}^{n+m}\Big(\sum_{i+j=s}a_ib_j\Big)x^s. \tag{3}$$

称 $f(x)+g(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**和**，称 $f(x)g(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**积**。

容易验证：一元多项式的加法满足交换律、结合律，且

$$f(x)+0=0+f(x)=f(x),\qquad \forall f(x)\in K[x];$$
$$f(x)+[-f(x)]=[-f(x)]+f(x)=0,\qquad \forall f(x)\in K[x],$$

其中 $-f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}(-a_i)x^i$。

容易验证：一元多项式的乘法满足交换律、结合律，以及对于加法的分配律，且

$$1\cdot f(x)=f(x)\cdot 1=f(x),\qquad \forall f(x)\in K[x].$$

$K[x]$ 中还可定义减法：

$$f(x)-g(x):=f(x)+[-g(x)]. \tag{4}$$

4. 一元多项式的和与积的次数公式：

**命题 1** 设 $f(x),g(x)\in K[x]$，则

$$\deg(f\pm g)\leqslant\max\{\deg f,\deg g\}, \tag{5}$$

$$\deg(fg)=\deg f+\deg g. \tag{6}$$

**证明** 如果 $f=0$ 或 $g=0$，那么(5)、(6)式显然成立。下面来看看 $f\neq 0$ 且 $g\neq 0$ 时的

情况。设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,\qquad g(x)=\sum_{i=0}^{m}b_ix^i,$$

其中 $a_n\neq 0, b_m\neq 0$，于是 $\deg f=n, \deg g=m$。不妨设 $n\geqslant m$。由于

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i\pm b_i)x^i,$$

因此
$$\deg(f\pm g)\leqslant n=\max\{\deg f,\deg g\}.$$

由于 $a_nb_m\neq 0$，因此 $a_nb_mx^{n+m}$ 是 $f(x)g(x)$ 的首项。从而

$$\deg(fg)=n+m=\deg f+\deg g.$$ ■

从公式(6)的证明过程可以看出，一元多项式具有下述性质：

$$f(x)\neq 0 \text{ 且 } g(x)\neq 0 \Longrightarrow f(x)g(x)\neq 0. \tag{7}$$

由此得出，一元多项式的乘法适合**消去律**，即

$$f(x)g(x)=f(x)h(x),\text{且 } f(x)\neq 0\Longrightarrow g(x)=h(x).$$

从公式(6)的证明过程还可看出：两个非零多项式乘积的首项系数等于这两个多项式的首项系数的乘积。

一元多项式的积的次数公式(6)是十分重要的，它有许多应用。

## 二、环的基本概念

从 $\mathbf{Z}, K[x], M_n[K]$ 的共同性质——都有加法和乘法运算，并且加法满足交换律、结合律，有零元素，每个元素有负元素，乘法满足结合律和对于加法的左、右分配律，抽象出环的概念。集合 $S$ 上的一个**代数运算**，是指 $S\times S$ 到 $S$ 的一个映射。

1. 环的定义：

**定义 2** 设 $R$ 是一个非空集合，如果它有两个代数运算，一个叫做**加法**，记作 $a+b$，另一个叫做**乘法**，记作 $ab$；并且这两个运算满足下列 6 条运算法则（$\forall a,b,c\in R$）：

1° 加法结合律，即 $(a+b)+c=a+(b+c)$；

2° 加法交换律，即 $a+b=b+a$；

3° 在 $R$ 中有元素 0，使得 $a+0=a$，称 0 是 $R$ 的**零元素**；

4° 对于 $a$，在 $R$ 中有元素 $d$，使得 $a+d=0$，称 $d$ 是 $a$ 的**负元素**，记作 $-a$；

5° 乘法结合律，即 $(ab)c=a(bc)$；

6° 乘法对于加法的左、右分配律，即

$$a(b+c)=ab+ac,$$
$$(b+c)a=ba+ca,$$

那么称 $R$ 是一个**环**。

容易证明，环 $R$ 中的零元素是唯一的；$R$ 中元素 $a$ 的负元素是唯一的；$-(-a)=a$。

环 $R$ 中可以定义减法：

$$a-b:=a+(-b). \tag{8}$$

$\mathbf{Z}, K[x], M_n[K]$ 都是环，它们分别称为**整数环**，**数域 $K$ 上一元多项式环**，**数域 $K$ 上 $n$ 级全矩阵环**。任意一个数域 $K$ 也是环。

2. 常见的特殊类型的环

若环 $R$ 中的乘法还满足交换律，则称 $R$ 为**交换环**。

若环 $R$ 中有一个元素 $e$ 具有性质：

$$ea = ae = a, \forall a \in R.$$

则称 $e$ 是 $R$ 的**单位元**，此时称 $R$ 是**有单位元的环**。容易证明，在有单位元的环 $R$ 中，单位元是唯一的，通常把单位元记成 1。

环 $R$ 中的元素 $a$ 称为一个**左零因子**（**右零因子**），如果 $R$ 中有元素 $b \neq 0$，使得 $ab=0$ ($ba=0$)。左零因子和右零因子都简称为**零因子**。据本节例 7，$0a=a0=0, \forall a \in R$，因此 0 既是左零因子，又是右零因子，称 0 是**平凡的零因子**；其余的零因子称为**非平凡的零因子**。

如果环 $R$ 没有非平凡的零因子，那么称 $R$ 是**无零因子环**。有单位元 $1(\neq 0)$ 的无零因子的交换环称为**整环**。$\mathbf{Z}, K, K[x]$ 都是整环；$M_n(K)$ 不是整环，因为它不满足乘法交换律，且它有非平凡的零因子。

3. 子环

如果环 $R$ 的一个非空子集 $R_1$ 对于 $R$ 的加法和乘法也成为一个环，那么称 $R_1$ 是 $R$ 的一个**子环**。由子环的定义立即得出：子环 $R_1$ 对于 $R$ 的加法和乘法都封闭，即

$$a, b \in R_1 \quad \Longrightarrow \quad a+b \in R_1, ab \in R_1.$$

反过来，需要把 $R_1$“对加法封闭”改成“对减法封闭”，$R_1$ 才能成为 $R$ 的一个子环。见下面的命题：

**命题 2** 环 $R$ 的一个非空子集 $R_1$ 为一个子环的充分必要条件是 $R_1$ 对于 $R$ 的减法与乘法都封闭，即

$$a, b \in R_1 \quad \Longrightarrow \quad a-b \in R_1, ab \in R_1.$$

**证明** 必要性显然。

充分性。由于 $R_1$ 非空集，因此存在 $c \in R_1$。由已知条件得，$c-c \in R_1$，于是 $0 \in R_1$。

任给 $b \in R_1$，由已知条件得，$0-b \in R_1$，于是 $-b \in R_1$。

任给 $a, b \in R_1$，则 $-b \in R_1$，由已知条件得

$$a+b = a-(-b) \in R_1, ab \in R_1.$$

因此 $R$ 的加法和乘法可看成是 $R_1$ 的加法和乘法，显然 $R_1$ 的加法满足交换律、结合律，上面已证 $0 \in R_1$；对于任意 $b \in R_1$，有 $-b \in R_1$。显然 $R_1$ 的乘法满足结合律，以及对于加法的左、右分配律，所以 $R_1$ 成为一个环，从而 $R_1$ 是 $R$ 的一个子环。 ■

$K[x]$ 中所有零次多项式添上零多项式组成的集合 $S$，对于一元多项式的减法与乘法封闭，因此 $S$ 是 $K[x]$ 的一个子环。显然 $K[x]$ 中的单位元 $1 \in S$，数域 $K$ 到 $S$ 有一个对应法则 $\tau$：非零数 $a$ 对应到零次多项式 $a$，数 0 对应到零多项式 0。显然 $\tau$ 是双射，且 $\tau$ 保持加法与乘法运算，即

$$\tau(a+b) = \tau(a) + \tau(b), \qquad \forall a, b \in K;$$

$$\tau(ab) = \tau(a)\tau(b), \qquad \forall a, b \in K.$$

给定 $A \in M_n(K)$，形如下述的表达式称为数域 $K$ 上矩阵 $A$ 的多项式：

$$a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I,$$