21世纪高等职业教育规划教材

高等应用数学

于 信 主编

GAODENG YINGYONG SHUXUE

中国财政经济出版社

21世纪高等职业教育规划教材

高等应用数学

于信 主编

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等应用数学/于信主编．—北京：中国财政经济出版社，2010.9

21世纪高等职业教育规划教材

ISBN 978－7－5095－1568－6

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①于…　Ⅲ.①应用数学－高等学校：技术学校－教材　Ⅳ.①O29

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第153919号

责任编辑：郭德成　　责任校对：王　英

封面设计：无极书装　　版式设计：董生萍

中国财政经济出版社 出版

URL：http：//www.cfeph.cn

E－mail：jiaoyu@cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲28号　邮政编码：100142

发行处电话：88190406　财经书店电话：64033436

北京金华印刷有限公司印刷　各地新华书店经销

787×1092毫米　16开　18.5印张　435 000字

2010年9月第1版　2010年9月北京第1次印刷

定价：26.00元

ISBN 978－7－5095－1568－6/O.0018

（图书出现印装问题，本社负责调换）

本社质量投诉电话：010－88190744

前言

本书根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程的基本要求》，本着“以应用为目的，必需够用为度”的原则，在认真总结高职高专数学教学改革的经验的基础上，由高职高专院校中长期从事数学教学的资深教师编写．因其模块式的编写方式，本书即可以作为高职高专院校理工类和经济类各专业的通用高等数学教材，也可以作为成人高校各专业的高等数学教材使用．

本教材是“21世纪高等职业教育规划教材”之一，它是为了适应日益发展的高职高专教育的需要，以注重基础，降低理论，加强应用，强化能力为指导思想编写的．在内容编排上，力求体现科学性与实用性的和谐统一，具体表现在：第一，内容上删去了繁琐的推理和证明，代之以形象化的几何解释，降低了抽象性；第二，把不定积分作为定积分的计算方法介绍，加强了实用性；第三，编入了数学模型与数学实验，为应用数学埋下了伏笔；第四，基于高职院校教学课时实况，把讲授内容以基础模块、提高模块和专业选学模块有机地结合在一起，可以满足不同学时，不同专业的高等数学内容需求；这也是我们多年教学经验的总结．由于篇幅所限，本书难以囊括各行各业的实际问题，教师在使用时可以结合不同专业的相关问题加以补充，使教学更具有针对性．

本教材内容包括：函数的极限与连续，微分与积分应用，空间图形与方程，常微分方程，多元函数微积分极其简单应用，无穷级数，线性代数，拉普拉斯变换，数理逻辑，数学模型与数学实验，书后配有习题参考答案．带*号的内容教师可根据不同专业需要选用．

本教材配有活页习题册、电子教案各一套，便于教师作业批改与多媒体教学．

本书由于信、徐史明担任主编，王翠珍、李高波、王文静、甄海燕任副主编，参加编写的还有丁梅、刘林丽、李静梓、王春杰、朱艳艳、刘维会、李秀珍承担了本书的主审工作，并提出了宝贵的意见．

尽管我们尽了很大的努力，但水平所限，加之教学中的许多问题的改革尚在探索中，本书中的不当之处在所难免，恳请读者批评指正，以便进一步修改完善．同时，向支持本书编写和出版的各界同仁表示衷心感谢．

编　者

2010年7月

目录

基础模块

提 高 模 块

专业选学模块

基础模块

第 1 章

函数　极限与连续

内容提要

函数是高等数学的主要研究对象，极限方法是高等数学中研究问题的一种基本方法，本章将在中学已经学过的函数概念的基础上，介绍函数的极限与连续的概念．为后续知识的学习打基础．

1.1　函　　数

1.1.1　预备知识

1. 区间与邻域

数学上常用区间来描述变量的取值范围．

设 a，b 是两个常数，我们把集合$\{x|a<x<b\}$用更为简单的符号(a,b)表示，称为**开区间**，即$(a,b)=\{x/a<x<b\}$，类似的还有**闭区间**$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$、**左闭右开区间**$[a,b)=\{x/a\leqslant x<b\}$及**左开右闭区间**$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

除了上述这些有限区间外，还有一类区间叫做**无穷区间**，如，$(-\infty,+\infty)$，$(-\infty,b)$，$(-\infty,b]$，$(a,+\infty)$，$[a,+\infty)$等，其中$(-\infty,+\infty)$就是实数集 R.

设 δ 是一正数，开区间$(a-\delta,a+\delta)$称为以点 a 为中心，以 δ 为半径的邻域，简称**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即：$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$．其中点 a 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**．如图 1－1(a)所示．

有时候用到的邻域需要把邻域的中心点去掉．点 a 的 δ 邻域去掉中心点 a 后，称为**点 a 的去心 δ 邻域**，记作 $\overset{0}{U}(a,\delta)$. $\overset{0}{U}(a,\delta)=\{x|0<|a-\delta|<x\}$（图 1－1($b$)）．

如，U(3,0.02)＝(2.98,3.02)表示以 3 为中心，以 0.02 为半径的开区间；

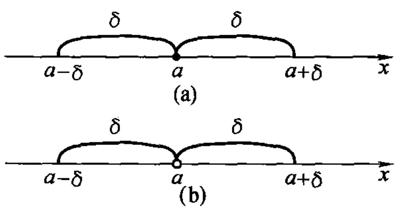


图 1－1

$$U(-1.03,0.03)=(-1.06,-1);\quad \overset{0}{U}(3,0.02)=(2.98,3)\cup(3,3.02).$$

2. 极坐标

在平面上取一点 o，过点 o 引一条射线 ox，同时确定射线上的长度单位和射线绕定点 o 旋转的角度的方向（通常取逆时针方向为正方向），这样就建立了一个极坐标系．其中 o 称为**极点**，射线 ox 称为**极轴**．

设 M 是平面上任意一点，连接 OM，用 ρ 表示线段 OM 的长度，用 φ 表示从 ox 到 OM 的旋转角．那么，有序数对（ρ，φ）可以确定点 M 在极坐标系中的位置，（ρ，φ）叫做点 M 的极坐标．显然，每一个有序数对（ρ，φ）确定一个点的位置．其中，ρ 叫做点 M 的**极径**，φ 叫做点 M 的**极角**（图 1－2）．

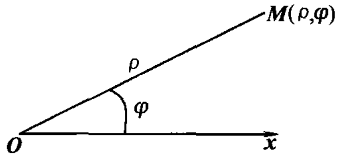
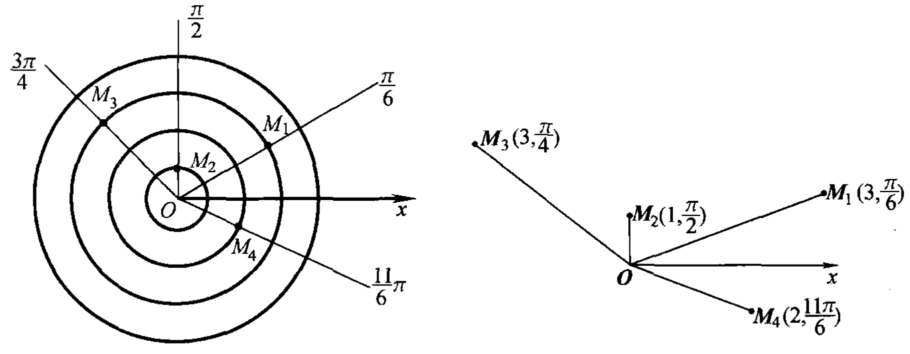


图 1-2

由极径的意义知 $\rho\geqslant 0$，当极角的取值范围是 $[0,2\pi)$ 时，平面上的点 M（除去极点）与极坐标 $(\rho,\varphi)(\rho\neq 0)$ 有一一对应的关系．

为了应用方便，规定极点的极坐标是 $(0,0)$，$(0\leqslant\varphi<2\pi)$．

例如，图（1－3）中，平面上点 M_1、点 M_2、点 M_3、点 M_4 与极坐标 $(3,\frac{\pi}{6})$，$(1,\frac{\pi}{2})$，$(3,\frac{3\pi}{4})$，$(2,\frac{11\pi}{6})$ 具有一一对应关系．



(a) (b)

图 1－3

极坐标系和直角坐标系是两种不同的坐标系，同一个点可以用极坐标表示，也可以用直角坐标表示．为了研究问题方便，有时需要把它们相互转化．

把极坐标系中的极点与直角坐标系中的原点重合；极轴与 x 轴的正半轴重合；两种坐标系取相同的长度单位．则平面上的点 M 的直角坐标 $M(x,y)$ 和极坐标 $M(\rho,\varphi)$ 之间有如下关系（见图 1－4）：

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases};\qquad (1),\qquad \begin{cases}\rho^2=x^2+y^2\\ \tan\varphi=\dfrac{y}{x}(x\neq 0)\end{cases};\qquad (2)$$

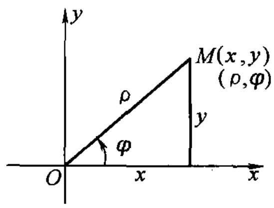


图 1－4

例 1.1 已知点 M 的极坐标为 $(5,\ -\frac{\pi}{3})$，求点 M 的直角坐标．

解 由公式（1）可得

$x=5\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5}{2}, y=5\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{5\sqrt{3}}{2},$

于是点 M 的直角坐标为$\left(\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$.

例 1.2　已知点 M 的直角坐标为（-1，1），求点 M 的极坐标.

解　由公式（2）可得

$\rho=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2},$

$\tan\varphi=\frac{1}{-1}=-1, \varphi=\frac{3}{4}\pi,$

于是点 M 的极坐标为$\left(\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$.

平面上一条曲线可以在直角坐标系中用含有 x 和 y 的方程来表示，这样得出的方程称为**直角坐标方程**；也可以在极坐标系中用含有 ρ 和 φ 的方程来表示，这样得出的方程称为**极坐标方程**. 利用点的直角坐标与极坐标间的互化公式，可将曲线的直角坐标方程与极坐标方程互化.

例 1.3　将圆 $x^2+y^2-2ax=0(a>0)$化为极坐标方程.

解　这是一个圆心在（a，0），半径为 a 的圆（图 1-5）.

由公式（1）可得

$$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi-2a\rho\cos\varphi=0 \text{ 化简得：}$$

$\rho^2-2a\rho\cos\varphi=0$，即 $\rho=0$（舍去）或 $\rho-2a\cos\varphi=0$.

$\therefore$ 所求圆的极坐标方程为 $\rho=2a\cos\varphi$（$a>0$）.

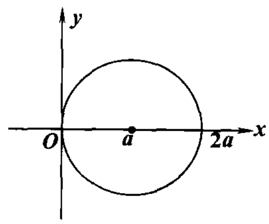


图 1-5

例 1.4　将 $\rho=2a\sin\varphi$（$a>0$）化为直角坐标方程.

解　将方程 $\rho=2a\sin\varphi$ 两端乘以 ρ，得 $\rho^2=2a\rho\sin\varphi$,

$\because \rho^2=x^2+y^2$，$\rho\sin\varphi=y$,

$\therefore x^2+y^2=2ay$,

即 $x^2+(y-a)^2=a^2\quad(a>0)$,

这是一个圆心在点（0，a），半径为 a 的圆（图 1-6）.

容易看出，圆 $x^2+y^2=R^2$ 的极坐标方程为 $\rho=R$（图 1-7）；

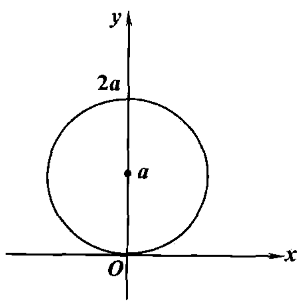


图 1-6

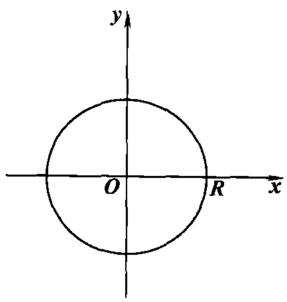


图 1-7

极坐标方程 $\varphi=\varphi_0$ 表示一条过原点，与 x 轴夹角为 φ_0 的直线（图 1-8）.

常见的极坐标方程有：

圆　　　$\rho=2a\cos\varphi\quad(a>0)$（图 1-5）；

$$\rho = 2a\sin\varphi \quad (a>0)(\text{图 } 1-6);$$

$$\rho = R(\text{图 } 1-7);$$

直线 $\varphi = \varphi_0$(图 1 -8),

玫瑰线 $\rho = a\sin n\varphi$ 或 $\rho = a\cos n\varphi$(图 1 -9),

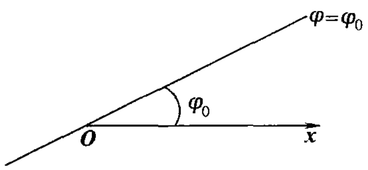


图 1 -8

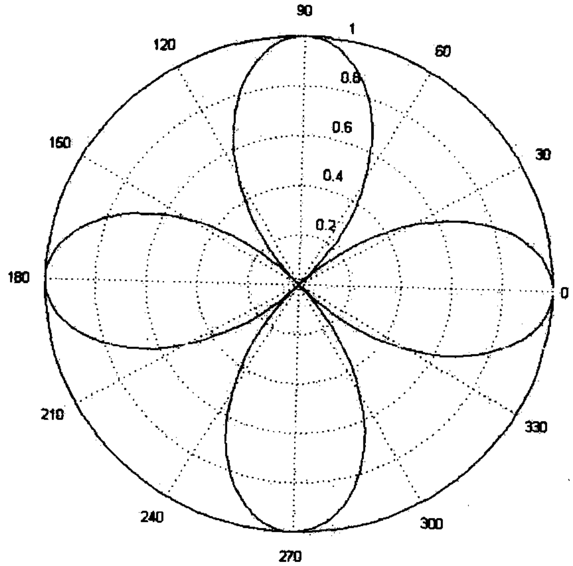


图 1 -9

心脏线 $\rho = a + b\sin\varphi$ 或 $\rho = a + b\cos\varphi$(图 1 -10),

双纽线 $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ 或 $\rho^2 = a^2\sin 2\varphi$(图 1 -11),

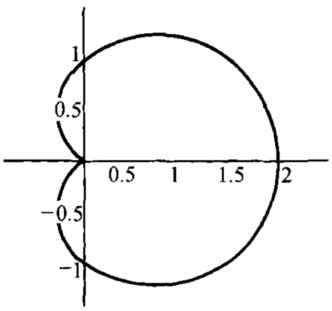


图 1 -10

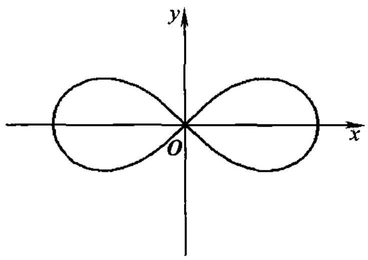


图 1 -11

1.1.2 函数的概念与性质

1. 函数的定义

定义 1.1 设有两个变量 x 和 y，当变量 x 在实数的某一范围 D 内任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的规律 f，有惟一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作

$$y = f(x), \ x \in D$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**函数**（**因变量**），自变量 x 的取值范围 D 称为函数的**定义域**.

对于确定的 $x_0 \in D$，按照对应规律 f，有惟一确定的值 y_0 与之相对应，称 y_0 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作

$$y_0 = y\Big|_{x=x_0} = f(x_0),$$

函数值的集合称为函数的**值域**，记作 $M=\{y|y=f(x),x\in D\}$

显然，一个函数的值域由定义域 D 及对应法则 f 所完全确定，所以，函数的对应法则和定义域称为确定函数的**两要素**.

例如，函数 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 表示不同的函数；因为它们的对应法则不同；$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$ 表示不同的函数，因为它们的定义域不同.

例 1.5 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$，求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right),f\left(\dfrac{1}{x}\right),f(x+1)$.

解 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1}=\dfrac{4}{5}$；

$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+1}=\dfrac{x^2}{1+x^2}$；

$f(x+1)=\dfrac{1}{(x+1)^2+1}=\dfrac{1}{x^2+2x+2}$.

例 1.6 设 $f(x+1)=x^2+2$，求 $f(x)$.

解法① 令 $x+1=t$，则 $x=t-1$，所以，

$$f(t)=(t-1)^2+2=t^2-2t+3.$$

所以 $f(x)=x^2-2x+3$.

解法② $f(x+1)=x^2+2=(x+1-1)^2+2$

$=(x+1)^2-2(x+1)+3$.

所以 $f(x)=x^2-2x+3$.

例 1.7 一圆盘的半径为 r，则其面积 A 为 r 的函数，$A=\pi r^2$.

考虑到该问题的数学意义及实际意义，函数 $A=\pi r^2$ 的定义域为 $[0,+\infty)$.（注意，定义域不是 R）

例 1.8 求函数 $f(x)=\sqrt{2-x^2}+\lg(x+1)$ 的定义域.

解 当 $2-x^2\geqslant 0$ 时，即 $|x|\leqslant\sqrt{2}$ 时，$\sqrt{2-x^2}$ 有意义，

当 $x+1>0$，即 $x>-1$ 时，$\lg(x+1)$ 有意义.

当且仅当 $\sqrt{2-x^2}$ 和 $\lg(x+1)$ 同时都有定义时，函数 $f(x)$ 有意义，所以，所求函数的定义域为：

$$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]\cap(-1,+\infty)=[-1,\sqrt{2}).$$

在同一场合，不同的函数应该用不同的记号，如 $y=g(x)$，$y=h(x)$，$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$，…等分别表示不同的函数.

如果自变量在定义域中任取一个数值时，对应的函数值只有一个，这种函数称为**单值函数**，否则称为**多值函数**.

例如，设变量 x 和 y 之间的对应法则由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出. 显然，对每个 $x\in[-r,r]$，由方程 $x^2+y^2=r^2$，可确定出对应的 y 值，当 $x=r$ 或 $x=-r$ 时，对应 $y=0$ 一个值；当 x 取 $(-r,r)$ 内任一个值时，对应的 y 有两个值. 所以这方程确定了一个多值函数.

对于多值函数，我们可以用限制因变量取值范围的方法将其化为多个单值函数. 例如，在

方程$x^2+y^2=r^2$中，若$y\geqslant 0$，则$y=y_1(x)=\sqrt{r^2-x^2}$；若$y\leqslant 0$，则$y=y_2(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$.

由此可以看出，对于多值函数我们可以把它化为多个单值函数，然后进行讨论．所以，我们约定：以后凡是没有特别说明，函数都是指单值函数．

函数$y=f(x)$的图形一般是平面直角坐标系中的满足一定条件的点的集合，一般是平面上的一条曲线，其定义域是这些点在x轴上投影点的集合．

2. 函数的表示法

常用的函数的表示方法有三种．用数学式子来表示自变量与因变量关系的方法称为**解析法**，其特点是便于进行理论分析和研究；把自变量所取的值和对应的函数值列成表以表示函数关系的方法称为**表格法**．特点是简单明了，便于应用；以图像形式表达函数关系的方法，称为**图像法**，特点是直观性强．

函数的三种表示方法经常配合使用，在高等数学中讨论的函数，大多都是用解析法给出，这是由于对解析式可以进行各种运算，便于研究函数的性质．但为了增强几何直观性，经常把函数的图像画出来帮助分析问题或说明问题．

3. 分段函数

例 1.9 在电子技术中，经常会遇到一种矩形波（图 1－12），图中表示每隔 100μs，产生一个 10V 的电压脉冲，持续时间是 10μs. 电压u随时间t而变，在一个周期内，它们之间的依赖关系可以表示成

$$u=\begin{cases}10 & 0\leqslant t\leqslant 10\\ 0 & 10<t<100\end{cases}$$

这种变量在不同范围内内用不同的解析式表示的函数称为**分段函数**．分段函数的定义域是各段函数定义域的并集．如上面函数的定义域为［0，100］．

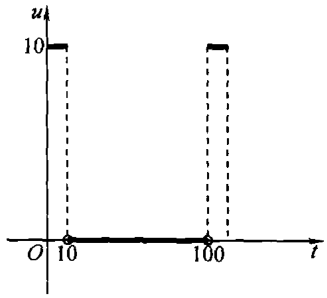


图 1－12

例 1.10 绝对值函数$y=|x|$可以表示为分段函数．

$$y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

它的定义域$D=(-\infty,+\infty)$，值域$W=[0,+\infty)$，图形如图 1－13 所示．

例 1.11 求函数$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 0\\ x+1 & x>0\end{cases}$的定义域和函数值$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$.

解 在区间$(-\infty,0]$内，函数$y=x^2$有意义，在区间$(0,+\infty)$内，函数$y=x+1$有意义．所以函数的定义域为$D=(-\infty,0]\cup(0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$，$f(-1)=(-1)^2=1$；$f(0)=0^2=0$；$f(1)=1+1=2$. 如图 1－14 所示．

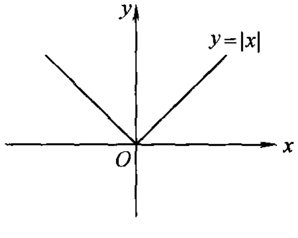


图 1－13

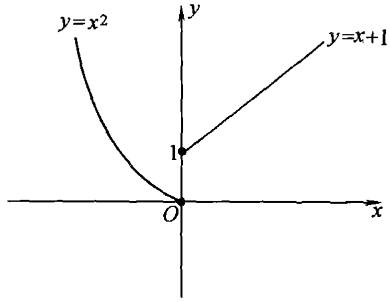


图 1－14

4. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性

设函数$f(x)$的定义域为D，数集$X\subset D$，若存在一个正数M，使得对一切$x\in X$，都有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数$f(x)$在X内**有界**；若不存在这样的正数M，则称函数$f(x)$在X内**无界**.

若函数$f(x)$在X内有界，则函数$y=f(x)$的图形在直线$y=-M$和$y=M$之间. 如图1－15所示. $Z=[a,b]$

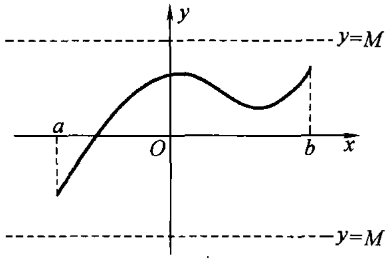


图1－15

例如，因为对任意的$x\in(-\infty,+\infty)$，存在$M=1$，使得$|\sin x|\leqslant 1$. 所以函数$f(x)=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上是有界的. 而函数$f(x)=\frac{1}{x}$在开区间（0，1）内是无界的. 而在区间（1，2）内是有界的.

(2) 函数的单调性

设(a,b)是函数$y=f(x)$定义域内的一个区间，如果对于区间(a,b)内任意两点x_1及x_2，当$x_1<x_2$时，恒有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间(a,b)内是**单调增加的**（或称递增;）如果对于区间(a,b)内任意两点x_1及x_2，当$x_1<x_2$时，恒有$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间(a,b)内是**单调减少的**（或称递减）.

单调增加函数的图形沿x轴正向逐渐上升（如图1－16）；单调减少函数的图形沿x轴正向逐渐下降（如图1－17）.

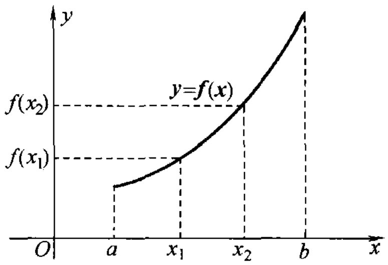


图1－16

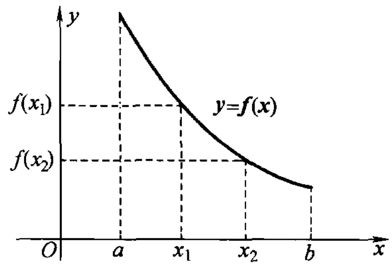


图1－17

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

例如，函数$y=x^2$在区间$(-\infty,0)$上是单调减少的，在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的，在$(-\infty,+\infty)$上不是单调函数.

(3) 函数的奇偶性

设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称（即若$x\in D$，则$-x\in D$）. 如果对于任意$x\in D$，恒有$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为**偶函数**. 如果对于任意$x\in D$，恒有$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为**奇函数**.

偶函数的图形关于y轴对称（如图1－18），奇函数的图形关于原点对称（如图1－19）.

例如，函数$y=x^2$，$y=\cos x$都是偶函数；$y=x^3$，$y=\sin x$都是奇函数；$y=\sin x+\cos x$是非奇非偶函数.

(4) 函数的周期性

设函数$f(x)$的定义域为D. 如果存在一个常数$T\neq 0$，使得对于任一$x\in D$，有$(x\pm T)\in D$，且$f(x\pm T)=f(x)$，则称$f(x)$为**周期函数**，T称为$f(x)$的周期. 通常所说周期

函数的周期是指它的最小正周期．

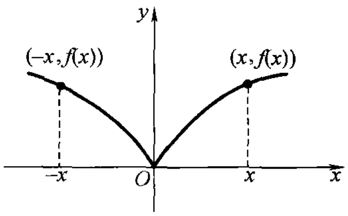


图 1－18

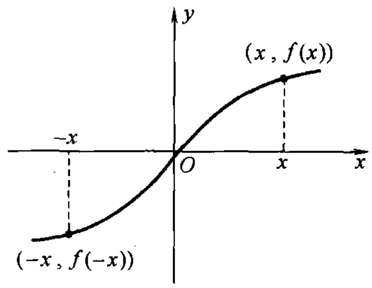


图 1－19

例如，函数 $y=\sin x$，2π，4π，6π，-2π，…，都是它的周期，而 2π 是它的最小正周期，所以称 2π 是它的周期．

【注意】 并非任意周期函数都有最小正周期．如常数函数 $y=c$，任意正实数都是它的周期，由于最小的正数不存在，所以它没有最小正周期．

周期函数的图形特点是自变量每增加或减少一个周期后，图形重复出现．

1.1.3 初等函数

1. 反函数

定义 1.2 设有函数 $y=f(x)$，若变量 y 在函数的值域内任取一值 y_0 时，变量 x 在函数的定义域内必有惟一值 x_0 与之对应，即 $f(x_0)=y_0$，那么变量 x 是变量 y 的函数，这个函数用 $x=f^{-1}(y)$ 来表示，称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**．相应的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**，习惯上，自变量一般用 x 表示，因变量用 y 表示，因此将 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 互换，从而 $y=f(x)$ 的反函数一般表示为 $y=f^{-1}(x)$．

在同一个直角坐标系内，函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称．并且，单调函数必有反函数，并且互为反函数的两个函数的单调性是相同的．

例 1.12 求函数 $y=2x-1$ 的反函数，并在同一个平面直角坐标系中作出它们的图形．

解 由直接函数 $y=2x-1$ $(y=f(x))$ 解出 x，得到所求反函数 $x=\dfrac{y+1}{2}$ $(x=f^{-1}(y))$．

习惯上改写为 $y=\dfrac{x+1}{2}$ $(y=f^{-1}(x))$

直接函数 $y=2x-1$ 的图形为过点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 和点（0，−1）的直线，其反函数 $y=\dfrac{x+1}{2}$ 的图形为过点 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 和点（−1，0）的直线（如图 1－20）．

由图 1－20 可以看出，直接函数 $y=2x-1$ 的图形与反函数 $y=\dfrac{x+1}{2}$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的．

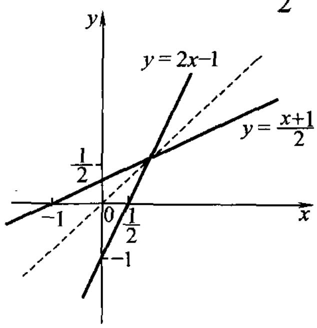


图 1－20

2. 基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这 6 类函数统称为**基本初等函数**．大家要熟悉并掌握