

数学教育学

刘安君 孙全森 汪自安 著



山东大学出版社

世界银行贷款师范教育发展项目改革课题
高师教育课程系列教材之一

课题总负责 董 操
教材总主编

数 学 教 育 学

刘安君 孙全森 汪自安 著

山 东 大 学 出 版 社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学教育学/刘安君, 孙金森, 汪自安著. —济南:
山东大学出版社, 1997. 12 (2000. 8 重印)
ISBN 7-5607-1839-6

I. 数…

I. ①刘…②孙…③汪…

II. 数学-教育学-高等学校: 师范学校-教材

IV. 01-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 42215 号

山东大学出版社出版发行

(山东省济南市山大南路 27 号 邮政编码: 250100)

山东省新华书店经销

山医大印刷厂印刷

850×1168 毫米 1/32 14.5 印张 377 千字

1997 年 12 月第 1 版 2000 年 8 月第 2 次印刷

印数: 3101—8000 册

定价: 18.00 元

前 言

本书是世界银行贷款师范教育改革项目：“高师教育学、心理学、学科教育学课程改革研究课题”的成果之一，是作为高师数学专业教材而编写的。

教育的本质属性是育人。当今，作为人类文化的重要组成部分，数学科学的应用日趋广泛，地位空前提高。教育、心理学科和数学教育领域的研究十分活跃，新的思想、理论、方法和边缘交叉学科不断产生。同时，我国教育正面向 21 世纪实行两个转变：基础教育由应试教育向素质教育转变，高等教育由专业教育向素质教育转变。

为适应这种数学教育改革的新形势，本书突破了传统的单纯阐述知识技能和方法的《数学教学法》的框架，充分吸取新的研究成果，在数学和数学教育发展史的大背景下，就数学观、数学思想方法、数学思维、数学的逻辑基础、数学课程、数学教学、数学学习、数学教育评价等方面的内容进行论述。在处理上，力求打破教育学加数学例子的模式，重在数学自身的特点，内在规律和教育因素的挖掘。在内容编排上力求层次清楚、系统完整，叙述力求严谨准确。每章后配有思考题，节前带 * 号者可作为选学内容。

各章的作者为：刘安君（前言、第一、二、三、四章及通稿工作），孙全森（第五、七、九章），汪自安（第六、八、十章）。

由于我们水平有限，书中难免有不妥和错、谬之处，恳请读者批评指正。

编 者

1997. 7

目 录

第一章 国外数学与数学教育发展概论	(1)
第一节 数学的萌芽时期.....	(2)
第二节 初等数学时期.....	(4)
第三节 近代数学时期	(13)
第四节 现代数学概观	(19)
第五节 20 世纪数学教育改革概观	(30)
思考题	(34)
第二章 中国数学与数学教育发展概论	(36)
第一节 中国数学发展概论	(36)
第二节 中国数学教育发展概论	(48)
第三节 中西数学比较	(51)
思考题	(56)
第三章 数学观	(58)
第一节 数学的研究对象	(59)
第二节 数学的特征	(65)
第三节 数学的地位和作用	(70)
思考题	(73)
第四章 数学思想方法	(74)
第一节 公理化方法	(75)
第二节 化归方法	(78)

第三节	特殊化与一般化方法	(81)
第四节	关系映射反演方法	(88)
第五节	数学模型方法	(95)
思考题		(99)
第五章	数学思维	(100)
第一节	数学思维概述.....	(100)
第二节	数学思维的基本类型.....	(106)
第三节	数学思维的品质.....	(121)
第四节	数学思维的基本方法.....	(130)
第五节	数学创造性思维及其培养.....	(152)
思考题		(166)
第六章	数学的逻辑基础	(168)
第一节	形式逻辑与中学教学.....	(168)
第二节	逻辑思维的基本规律.....	(169)
第三节	数学概念.....	(175)
第四节	数学命题.....	(190)
第五节	推理与证明.....	(206)
思考题		(228)
第七章	数学课程	(231)
第一节	课程概述.....	(231)
第二节	课程计划与数学课程标准.....	(239)
第三节	数学课程内容.....	(251)
* 第四节	国内外数学教材简介	(258)
* 第五节	数学课程改革	(273)
思考题		(289)
第八章	数学教学	(290)
第一节	数学教学过程的最优化.....	(290)
第二节	数学教学原则.....	(317)

第三节	数学教学方法	(323)
第四节	数学基础知识的教学	(333)
第五节	数学基本能力的培养	(341)
思考题		(348)
第九章	数学学习	(350)
第一节	数学学习概述	(350)
第二节	数学学习的认知过程	(359)
第三节	数学概念和数学命题的学习	(364)
第四节	数学技能的形成	(377)
第五节	数学问题解决	(382)
思考题		(398)
第十章	数学教育评价	(400)
第一节	教育评价概述	(401)
第二节	教育评价的功能及原则	(405)
第三节	教育评价的一般方法	(408)
第四节	数学教育评价	(415)
第五节	数学教学评价	(433)
第六节	数学学习评价	(440)
第七节	数学教材评价	(445)
思考题		(447)
参考书目		(449)

第一章 国外数学与数学教育发展概论

数学有一个历史发展过程。

数学教育有一个历史发展过程。

数学的对象、特点、方法、地位和作用,数学的认识观、价值观、真理观,数学教育的目的、内容、方法、手段、体制和结构等,都随着社会的演变而演变,随着生产力水平的提高和社会的进步而不断发展、完善并日益显现出其本质特征。

因此,数学与数学教育发展史是数学教育学的重要组成部分。

历史是一面镜子,是一部教科书。现在是过去的继续,将来是现在的延伸。只有循着数学及数学教育发展的历史的足迹,才能由远而近地看清其产生、发展、演变的规律,才能在历史的大背景下深刻理解数学的教育功能。

数学是人类文化的重要组成部分,它像人类文明、文化一样具有悠久的历史。根据目前考古学的成果,可以追溯到几十万年以前。就它成为一门科学而言,比其他科学也早得多。

如果从欧几里得的《几何原本》(约公元前 300 年)算起,至今也已有 2300 年的历史了。其他科学的历史则晚得多。比如物理学,从伽利略 1632 年的《托勒密和哥白尼的两大体系的对话》算起,才 300 多年;化学如果从拉瓦锡 1739 年的《化学纲要》算起,不过 200 多年;生物学如果从达尔文 1859 年的《物种起源》算起,才只有 100 多年。

按现在比较一致的观点,数学发展通常划分为四个时期:萌芽时期、初等数学时期、近代数学时期和现代数学时期。

第一节 数学的萌芽时期

这一时期大体从远古到公元前6世纪。这一时期又分为两段,一段是史前阶段,从公元前几十万年以前到公元前大约3500年;第二段是古巴比伦和古埃及数学阶段,大约从公元前3500年到公元前6世纪。

一、史前阶段

此时,人类处于蒙昧状态,生产力十分低下,人类只是出于计数物件和测量实物的需要积累了一些最简单的算术知识(简单的自然数和记数法)和几何知识(简单的几何图形),这些知识还未完全脱离和抛弃事物的具体内容,即纯数学的抽象形态还不存在,也还谈不上数学教育。

二、古巴比伦、古埃及数学阶段

1. 古巴比伦数学

亚洲西部的底格里斯河与幼发拉底河之间的地带称为两河流域,古代称为美索不达米亚。

大约公元前4000年,这里居住着苏美尔人和阿卡德人,他们创造了两河流域文化。公元前19世纪,这里建立了巴比伦王国,创造了巴比伦文化(或称美索不达米亚文化),相应的数学称为巴比伦数学。

巴比伦使用一种楔形文字,先用削尖的木笔在泥板上刻写(称为泥板书),然后烧干或晒干,坚硬如石,被埋在地下,数千年不损,现在关于巴比伦的数学知识就来源于这些泥板书。

当时,巴比伦人使用了 60 进制记数法,将圆周分为 360 度来计划天文,用简单乘法表、倒数表、平方表、立方表进行算术运算,已计算出 $\sqrt{2}$ 的近似值为 1.414 215 5,会解决简单的一次、二次方程问题,会计算简单的平面图形面积和立体图形体积,已有了三角形相似和对应成比例的知识。

在两河流域,公元前 3000 年就建立的奴隶制亚述帝国和后来统一的巴比伦王国都办有僧侣学校、宫廷学校和文士学校,培养僧侣和管理人员,数学是教育的主要内容之一,泥板书就是当时的教科书。

2. 古埃及数学

尼罗河流域的古埃及文明起源于公元前 4000 年前,约在公元前 3500 年就形成了统一的奴隶制国家并产生了文字、数学、天文学的萌芽,同时也产生了学校。

被尼罗河泛滥冲毁了的土地的文量分配的需要以及商品交易、宫廷建筑、修建金字塔(法老坟墓)、航海、占星术、绘画及雕塑等的需要产生了数学。已发掘的现存在大英博物馆和莫斯科博物馆的纸草书记载了古埃及灿烂的文化。

古埃及人用象形文字记数,会四则运算,出现了分数,已会解决简单的一次、二次方程的问题和日历推算,已了解一些关于等差、等比数列的初步知识。几何学最早起源于古埃及,当时能计算简单的平面图形面积,掌握了做直角和求圆面积的近似方法及正棱锥、截头棱锥的体积计算。

古埃及也设有宫廷学校、寺庙学校(僧侣学校)和文士学校,数学是教育的主要内容之一。

当时的数学教育是为政教合一的埃及王朝培养官吏和办事人员,完全以实用为目的,拥有数学知识被看作是一种权利,是倍受人尊崇、向往的事业,是脑力劳动和体力劳动分工的标志,这样就造成了一种“唯有读书(学数学)高”的社会风气,这大大刺激了数

学教育的发展。

概括起来,数学萌芽时期,人类在漫长的生产实践中形成了初步的数(自然数、分数)的知识和计算方法,积累了一些简单的几何知识,但这些知识是零碎的,是有关数形的感性知识的积累时期,是数学发展过程中的渐变阶段。

第二节 初等数学时期

这一时期大约从公元前 6 世纪~公元 17 世纪。这一时期又分为两个阶段,第一个是初等数学的开创阶段,第二个是初等数学的交流发展阶段。

一、初等数学的开创阶段

1. 历史的沿革

这一时期大约从公元前 6 世纪~公元 6 世纪。这一时期主要是古希腊数学,一般又划分为两个阶段。

(1)古典时期(公元前 600 年~公元前 330 年,大体相当于中国的春秋时代)

①爱奥尼亚阶段(公元前 600 年~公元前 480 年)

②雅典阶段(公元前 480 年~公元前 330 年)

(2)亚历山大里亚时期(公元前 330 年~公元 600 年,相当于中国的战国至隋朝)

①希腊化阶段(公元前 330 年~公元前 200 年)

②罗马阶段(公元前 200 年~公元 600 年)

古希腊的地理范围包括希腊半岛、爱琴海群岛和小亚细亚西岸一带。古希腊人在这里创造了人类历史上最宏伟影响极其深远的希腊文明,其核心内容就是希腊数学。古希腊与毗邻的古埃及和巴比伦进行贸易和游访,从埃及和巴比伦那里学到数学知识,在此

基础上创造了自己的数学。数学在古希腊发展成真正的科学，古希腊数学成为现代数学的直接前驱。

古希腊数学的特点是形成了诸多的数学学派。每个学派由一二个杰出人物领导本学派的学者开展活动。爱奥尼亚阶段有爱奥尼亚学派，代表人物是古希腊第一个著名数学家，享有希腊科学之父称号的泰勒斯；有毕达哥拉斯学派，代表人物是毕达哥拉斯；有埃利亚学派，代表人物是帕门尼茨和芝诺；有原子论学派，代表人物是德谟克利特。

公元前 480 年之后，雅典成为希腊的政治文化中心。雅典阶段的学派有巧辩学派，又称智人学派，代表人物是执政者佩里克里斯；有柏拉图学派，代表人物是最著名的希腊哲学家之一柏拉图；有欧多克斯学派，代表人物是欧多克斯；有吕园学派，代表人物是博学的亚里士多德。

历史推进到公元前 4 世纪，亚历山大帝国被瓜分成三个帝国，但仍联合在古希腊文化的约束之下，史称希腊化国家，希腊数学进入了希腊化阶段。

这一阶段最突出的是以托勒密一世及以后诸王建立的托勒密王朝时期，以亚历山大里亚城为中心建造了当时世界上最大的博物馆和图书馆，成为当时的科学文化学术中心。这一时期最杰出的代表人物是欧几里得、阿基米德和阿波罗尼奥斯。

随着古希腊被罗马帝国吞并，希腊数学进入了罗马阶段，这一阶段的主要代表人物有海伦、托勒密（并非托勒密王族）、梅内劳斯、帕波斯和丢番图等。亚历山大里亚的黄金时代并不长，罗马统治者只讲实用而轻视理论，数学在他们那里甚至被贬到占星术的地位，但由于这个阶段亚历山大里亚城仍保持着数学中心地位，希腊数学影响尚在，故早期仍出现托勒密、丢番图等杰出的数学家，但后期随着罗马帝国的没落和基督教的兴起，数学地位每况愈下，学者们一般只能评注前代的著作。公元 392 年罗马统治者下令取

缚异教,基督教徒焚毁了幸存在塞拉庇斯神庙的 30 万种书稿,公元 415 年,亚里山大里亚学派的最后一位代表女数学家希帕提亚被基督教徒野蛮杀害,标志着希腊文明的衰落。公元 529 年,东罗马皇帝查封了柏拉图学园,宣告了古希腊数学的结束,从此欧洲数学进入了漫长的荒芜时期。

2. 希腊数学的主要成就

说起古希腊的数学,可以说是人才辈出,成就辉煌、光彩夺目且影响人类文化 2000 多年。无怪后人赞叹:希腊人永远是我们的老师!

他们的主要贡献有:引进逻辑演绎证明(泰勒斯);发现了勾股定理和不可通约量(毕达哥拉斯);提出了几何作图的三大难题——三等分任意角、倍立方、化圆为方(希波克拉茨等)并试图用“穷竭法”(安提芬)去解决化圆为方问题;强调数学特别是几何学培养思维能力的价值、研究无理数理论、一般比例理论、正多面体和圆锥曲线性质(柏拉图);建立了形式逻辑并做为证明的工具(亚里士多德);提出了四个关于运动的悖论(芝诺:二分法、追龟说、飞矢静止说、游行说);提出原子论思想并应用于某些平面图形面积和立体体积的计算(德谟克利特);写出了名垂青史的划时代巨著《几何原本》(欧几里德);根据力学原理探求几何图形的面积、体积,研究螺线、球与圆柱及 π 值的计算(阿基米德);写出了对 17 世纪数学有重大影响的《圆锥曲线论》(阿波罗尼奥斯)。在罗马阶段还有海伦的《度量论》,托勒密的三角术及对后世数学影响巨大的丢番图的代数学名著《算术》。

3. 希腊数学的地位

希腊人崇尚理性,奉行“万物皆数”的信条,认为数学是一切事物的本质,整个有秩序的宇宙就是数及数的关系的和谐系统,自然界是按照数学方式设计安排的,探索数学设计方案与探索宇宙真理是一回事。在古希腊,科学产生于用数学解释自然这一信念,他

的认为数学具有天然的真理性,这时期,数学不是作为工具,而是以其数学观作为指导思想,科学包含在数学之中,数学具有至高无上的主宰地位。

由于希腊人崇尚理性,他们在每种感性活动中都企图寻找理性因素。同时希腊人爱美并将美与理性等同起来。因此,做为集理性思维之大成的数学家、哲学家都具有很高的社会地位,形成了一种万般皆下品唯有数学高的社会风尚。

做为崇尚理性思维的硕果,希腊数学最卓越最光彩夺目的功绩是引进了演绎推理。欧几里得的《几何原本》是其光辉的典范。在《几何原本》中,从公理出发用逻辑推理建立了几何学的演绎系统,把 465 条定理组织成了逻辑的链条。这个演绎系统在长达近 2000 年的时间内一直被奉为楷模。正因为如此,数学在古希腊才发展成为真正的科学,并得以传播永世。

4. 希腊的数学教育

象希腊数学一样,希腊的数学教育达到了相当高的水平。学派教育是古希腊数学教育的独特形式。从泰勒斯的爱奥尼亚学派起,希腊的数学教育——专门化的数学教育已经开始了。数学教育的内容包括著名的四艺:算术(静止的数)、几何(静止的量)、音乐(运动的数)、天文学(运动的量)。教育的目的是训练思维,增长才智协调地发展体力和能力(多么象今天的素质教育),从多方面获得身心的健康,最终培养人上人。

学校教育分为初级教育、中级教育和高级教育。学生 7 岁~14 岁受初级教育(文法学校——阅读、书法、初级实用计算);14 岁~17 岁受中级教育,其中主要的教学内容是几何学与天文学;18 岁~20 岁受高级教育,其中最主要的教育内容是数学。这多么像现代的学校教育!

为了说明数学教育的地位,下面我们再看一下柏拉图理想国的图景:在 18 岁~20 岁受过 3 年的高级教育之后,对于智力上没

有表现出特殊兴趣的学生,在 20 岁那年就必须去军营。对抽象思维表现出才华的学生,则在 20 至 30 岁期间,继续深造,研究哲学、数学。到 30 岁修完这些课程的学生就成为国家的各级管理者,在智力、抽象思维方面能力最强的人则继续在数学、哲学的基础上研究学习辩证法——哲学的最高规律。受满 5 年抽象的哲学教育之后,才能担任国家的要职——哲学王。这样,最高的统治者就是最有学问、抽象思维能力最强,智力最发达的人。要培养这种哲学王,数学教育占主导地位,因为数学是达到辩证法的阶梯。难怪柏拉图学园门口写着:“不懂几何的人不得入内!”

在人类历史上,强调数学教育对于国计民生有如此重大意义,以至于以数学能力——抽象思维能力做为划分社会阶层的标志,希腊的数学教育可以说是决无仅有的。难怪希腊数学和数学教育成为人类文明史上的一座耀眼夺目的明灯,照耀着人类文明发展 2000 年。

总之,以希腊数学为代表的初等数学开创时期,初等数学的两个重要分支——算术、几何已作为演绎系统建立起来(三角学刚刚萌芽),数学已经开始发展成为一门独立科学,建立了真正意义上的数学理论。

二、初等数学的交流发展阶段

从公元 6 世纪至 17 世纪初,是初等数学在各地区之间交流并取得重大进展的时期,由于时间、地域跨度较大,我们大体按时间顺序分地域进行叙述。

1. 印度数学

中国、印度与埃及、巴比伦并称世界四大文明古国,埃及、巴比伦数学已如前述。由于地域和独特的国情,中国数学具有相对独立性和自己的特点,后面专门叙述,下面先谈一下印度数学。

早在公元前 3000 年左右,印度河、恒河流域就存在着具有高

度文明的奴隶制城邦。最早的数学著作《绳法经》属于婆罗门教的经典,其中的数学知识比较零散。之后 1000 多年中,由于缺少可靠史料,数学发展所知甚少。公元 5 世纪~16 世纪,印度数学获得较大发展,特别是 7 世纪~16 世纪,吸收了中国文化(包括造纸术)受中国文化影响很大。这一时期,印度数学成就突出在两方面,一是算术方面,印度最早创立并使用了 10 进位制记数法,用 9 个数学符号和表示零的小圆圈借助于位值制可以写出任何数,并在这个基础上形成了一整套计算技术。这是数学史上也是人类文化史上最主要的发明之一。二是代数方面,印度人使用一些符号表示运算,并用缩写的文字表示未知数,这使得印度代数几乎称得上是符号化的代数。印度人还引进了负数及运算。这样,印度人建立了不仅可以使使用分数,而且可以使使用无理数和负数的代数学,从而奠定了代数学广泛发展的牢固基础。另外,三角学、级数等也在印度取得了进展。

2. 阿拉伯数学

指 8 世纪~15 世纪在中东、北非和西班牙等地的伊斯兰国家里所建立的数学。7 世纪初,伊斯兰教兴起后,阿拉伯人大举扩张,建立了地跨亚、非、欧三洲的庞大的多民族的阿拉伯帝国,史称大食国。它在被征服的国家里普及伊斯兰教,推行通用阿拉伯语、故阿拉伯数学也称伊斯兰数学或用阿拉文写的数学。

阿拉伯人很善于吸收被征服国家的科学文化,并建立智慧馆、招揽人才,繁荣学术,把希腊、印度、伊朗及中亚各族的科学文化精华融合在一起创立了自己别具一格的文化。巴格达成为当时除中国以外的世界科学中心。这样希腊数学和印度数学在这里交汇、继承和发扬光大。

首先是他们大量翻译希腊、印度的数学文献,这就抢救了大量濒临灭绝和失传的数学遗产。在翻译过程中,许多文献被重新校订、考证、勘误、增补和注解,使许多数学名著和成就获得了新生并

得以流传。同时,阿拉伯人引进了印度记数法并改造成为今日的阿拉伯数码,发展了计算技术。在代数方面的代表作是花拉子模的《代数学》。它首先提供了这门学科的名称,系统讨论了一般一次、二次方程的解法,三次方程的几何解法。在三角方面,他们引入了几种新的三角函数,建立了若干三角公式,制造了三角函数表,使三角学开始脱离天文学而成为独立的学科。

总之,在欧洲处于漫长的黑暗时期,阿拉伯人在保存、继承发展古代数学成就的同时,吸取了希腊、印度、中国的科学文化,创造了自己的数学成就。这些后来传入欧洲,为欧洲数学、科学的掘起奠定了基础。阿拉伯数学在数学史上这种承前启后,继往开来的作用,确立了它的独特的地位。

3. 欧洲中世纪后期数学

史称从公元5世纪~13世纪为欧洲中世纪,这是欧洲的封建社会时期。这个时期又分为两个阶段,前600年(罗马帝国灭亡到11世纪)称为中世纪前期,后300年称为中世纪后期。

在中世纪前期,欧洲处于基督教的绝对统治之下,哲学只是宗教的奴婢。生产停滞,经济凋敝,科学文化落后。数学方面,不用说希腊人的数学,连罗马人保留下来的仅有的应用知识也被逐渐放弃。

到公元11世纪,欧洲工商业开始发展,出现了新兴城市并开始出现“大学”。于是科学开始复苏,代表人物是英国的培根,他博学多才,提倡科学,反对教义和经院哲学,重视实验。他特别推崇数学,认为自然界是用几何语言写成的,数学具有必然的真理性并先于其他科学,科学的总基础是数学,一切科学真理之所以珍贵就在于它们用数学形式反映出来。因此他是现代科学知识数学化的先驱。

十字军的东征,使欧洲人进入了阿拉伯人的领地。客观上加速了东西间交流,使欧洲人接触到阿拉伯国家所保留的古代文化的