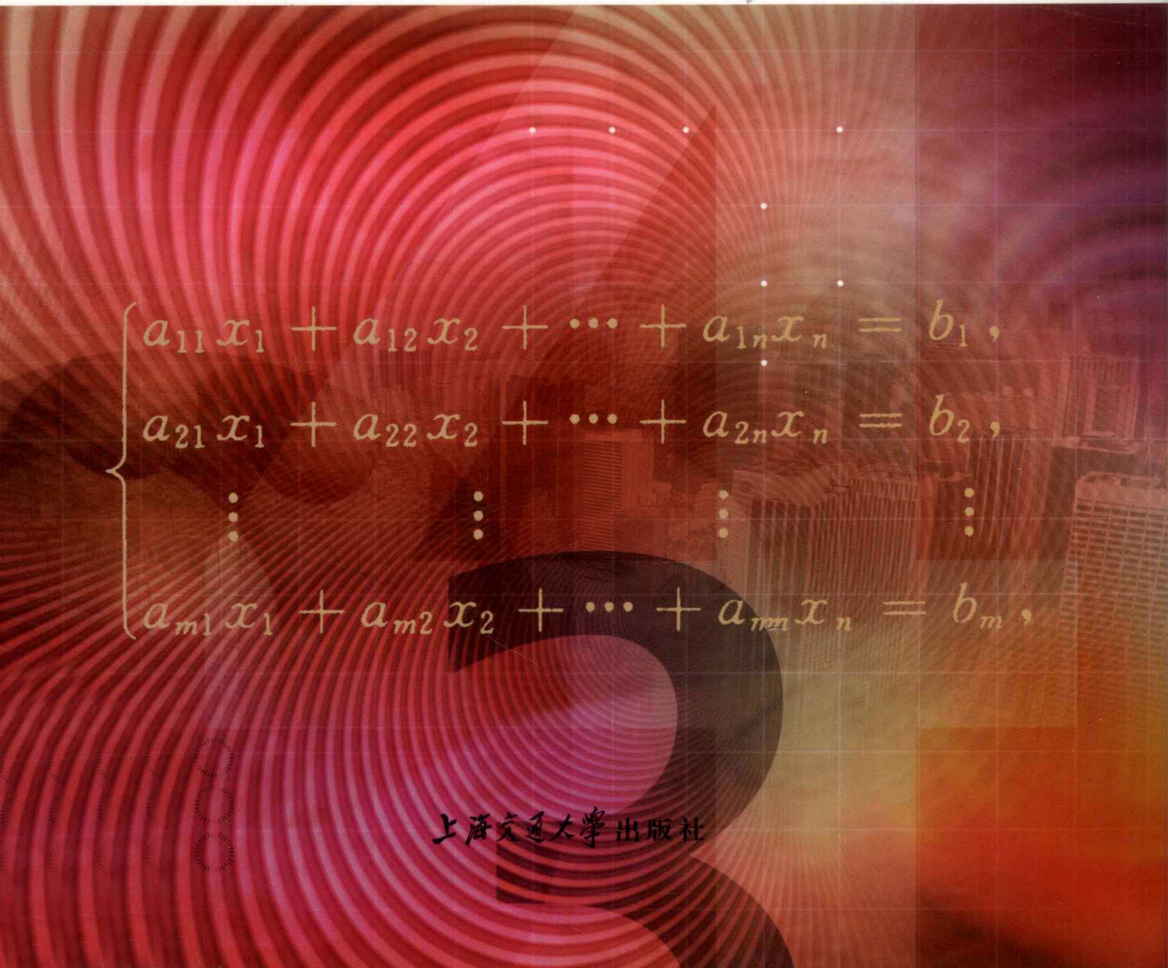
● 21世纪应用型本科教材
● 上海市教育委员会高校重点教材建设项目

（第二版）

线性代数及其应用

ANXINGDAISHUJIQIYINGYON

● 上海市教育委员会 组编
● 主编 王建军



$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

上海交通大学出版社

21 世纪应用型本科教材
上海市教育委员会高校重点教材建设项目

线性代数及其应用

（第二版）

上海市教育委员会　组编
王建军　主编

上海交通大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用/上海市教育委员会组编. —2版. —上海:上海交通大学出版社,2008

ISBN978-7-313-04035-0

Ⅰ. 线…　Ⅱ. 上…　Ⅲ. 线性代数—高等学校:技术学校—教材　Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第052331号

线性代数及其应用

(第二版)

王建军　**主编**

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路877号　邮政编码200030)

电话:64071208　出版人:韩建民

昆山市亭林印刷有限责任公司 印刷　全国新华书店经销

开本:787mm×960mm 1/16　印张:12.5　字数:230千字

2005年1月第1版　2008年7月第2版　2008年7月第3次印刷

印数:3050

ISBN978-7-313-04035-0/O·173　定价:21.00元

前　言

线性代数理论有着悠久的历史和丰富的内容。近年来，随着科学技术的发展，特别是电子计算机使用的日益普遍，作为重要的数学工具之一，线性代数的应用已经深入到自然科学、社会科学、工程技术、经济和管理等各个领域，以至于各大学许多院系都将线性代数作为必须开设的基础课程之一，同时向加强基础、计算与应用的方向推进，因而也对线性代数的教学内容和教学形式提出了更高的要求。

如何掌握好线性代数课程的基本理论知识，熟练掌握其方法，并能灵活应用到实践中去，是线性代数教学的主要任务。如何对线性代数这门工科数学中的重要课程实行改革是一个值得研究的课题。基于这些认识，我们编写了《线性代数及其应用》这本教材。本书既重视理论基础又注重应用，既适应于应用型本科大学生的发展要求，也可作为其他类型大学生或在职人员的参考用书。

本书前六章的内容涵盖了线性代数课程基本要求规定的全部内容；后两章介绍了线性代数中常见的应用问题，介绍并运用 MATLAB 软件进行线性代数运算，为应用型本科院校的学生培养提供了新的尝试。希望通过这些内容的学习，提高学生对已学过的知识在应用中分析、解决实际问题的能力。

本书由上海应用技术学院数理教学部工程数学教研室编写，主编王建军，副主编庄海根，周家华、朱军、黄煦艳、沈崇圣和许建强等参加编写，高璟、侯志芳两位教师对本书的习题作了解答。

岳荣先教授（上海师范大学）、许庆祥教授（上海师范大学）、刘剑平副教授（华东理工大学）对本书初稿作了仔细的审阅并提出许多宝贵意见，在此表示衷心感谢。

最后，我们要感谢上海市教委“十五”规划教材建设委员会、上海应用技术学院教材建设委员会、上海交通大学出版社对本书出版所给予的大力支持。

由于编者的见闻和水平有限，书中难免存在不足和疏漏之处，敬请专家、读者批评指正。

编　者

2005 年 3 月

目　　录

第 1 章 行 列 式

行列式是线性代数中的一个基本概念，其理论起源于解线性方程组，它在自然科学的许多领域都有广泛的应用。

本章的学习要点：理解行列式的概念和性质；掌握行列式的计算方法；会用克莱姆法则求解系数行列式不为零的线性方程组。

1.1 行列式的定义与性质

1.1.1 二阶、三阶行列式

行列式的概念首先是在求解方程个数与未知量个数相同的一次方程组时提出来的（一次方程组通常称为线性方程组）。例如，用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，得其解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

从式(1.2)中可发现，其分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得。其中分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是由方程组(1.1)的四个系数确定的，将这四个数按它们在方程组(1.1)中的位置，排成二行二列如式(1.3)所示的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1.3}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表(1.3)所确定的二阶行列式，它也称为线性方程组(1.1)的系数行列式，记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为二阶行列式(1.4)的元素。上述二阶行列式的定义，可用对角线法则来记忆。把 a_{11} 到 a_{22} 的实联线称为主对角线，a_{12} 到 a_{21} 的虚联线称为副对角线，则二阶行列式即为主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差（见图 1.1）。

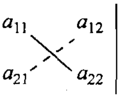


图 1.1

由二阶行列式的概念，式(1.2) 可以表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

定义 1.1 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1.5}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.6}$$

称式(1.6)为数表(1.5) 所确定的三阶行列式(横为行，竖为列)。数 a_{ij} $(i=1,2,3;j=1,2,3)$称为三阶行列式(1.6) 的元素。

式(1.6)中等号右端的 6 项也可以按对角线法则得到的(称为沙路法)(见图 1.2)。

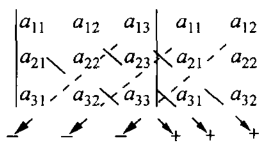


图 1.2

例 1.1 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

解 按对角线法则，有

$$D=1\times2\times(-2)+(-2)\times4\times(-4)+(-3)\times2\times1 \\ -1\times4\times1-(-2)\times2\times(-2)-(-3)\times2\times(-4)=-14$$

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式，对于四阶或更高阶的行列式又是如何的呢？为此，我们先观察二阶行列式与三阶行列式的特征：

(1) 有 2^2 和 3^2 个数(元素) 排成一个行数与列数相等的数表。

(2) 二阶行列式与三阶行列式最终得到的是一个数值。

(3) 每一个求和项为不同行，不同列元素的乘积。

上面分别从形式上和实质上分析了二阶行列式与三阶行列式。这是二阶行列式与三阶行列式最基本的特征。对于 n 阶行列式，它是否具有与二阶行列式或三阶行列式相同的基本特征？下面首先介绍全排列和逆序数的知识。

1.1.2　全排列及其逆序数

引例　将红、黄、绿三个信号灯排成一列，有多少种不同的排法？

解　在此我们可以列出所有的排法：红，黄，绿；黄，绿，红；绿，红，黄；红，绿，黄；黄，红，绿；绿，黄，红。

我们设想给 3 个信号灯编号：红灯为 1 号，黄灯为 2 号，绿灯为 3 号。这样上述不同的排法可以表示成

$$123,231,312,132,213,321$$

在数学中，把考察的对象，如引例中的红、黄、绿信号灯称为元素。引例的问题即为：把 3 个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法？

把上述这个问题进行推广：把 n 个不同的元素排成一列，称为这 n 个元素的全排列。显然共有 $n!$ 种排法。

每一种排法都规定了各个元素之间的先后次序，我们习惯上把正整数从小到大的排列次序称为标准次序。

对于 n 个不同的元素的任意一种排列，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有 1 个逆序。一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数。

逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列。

计算一个排列的逆序数一般有如下方法：

向前取大法。不失一般性，不妨设 n 个元素为 1 至 n 这 n 个正整数，并规定由小到大的排列次序为标准次序，如果 $p_1p_2\cdots p_n$ 为这 n 个正整数的一个排列，对于元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，若比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个，就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i。全体元素的逆序数之总和

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i$$

即是排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数。

例 1.2　求排列 642315 的逆序数。

解　在排列 642315 中，6 排在首位，逆序数为 0；4 的前面比 4 大的数有 1 个（6），逆序数为 1；2 的前面比 2 大的数有 2 个（4、6），逆序数为 2；3 的前面比 3 大的数有 2 个（4、6）逆序数为 2；1 的前面比 1 大的数有 4 个（4、6、2、3），逆序数为 4；5 的前面比 5 大的数有 1 个（6），逆序数为 1，所以该排列的逆序数为

$$t=0+1+2+2+4+1=10$$

1.1.3 对换

为了更好地理解行列式的概念和进一步研究行列式的性质，下面讨论对换以及它与排列奇偶性的关系。

在排列中将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的手续叫做对换。将相邻的两个元素对换，叫做相邻对换。

定理 1.1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性。

证 先证相邻对换的情况。

设排列 $a_1a_2\cdots a_l abb_1b_2\cdots b_m$，对换 a 和 b，得到排列 $a_1a_2\cdots a_l bab_1b_2\cdots b_m$。当 $a<b$ 时，经过对换后得到的排列比原来排列的逆序数增加了 1；当 $a>b$ 时，经过对换后得到的排列比原来排列的逆序数减少了 1。这样经过了相邻对换之后排列改变了奇偶性。

再证一般对换的情况。

设排列 $a_1a_2\cdots a_l ab_1b_2\cdots b_m bc_1c_2\cdots c_n$，将 a 作 m 次相邻对换，得到排列 $a_1a_2\cdots a_l b_1b_2\cdots b_m abc_1c_2\cdots c_n$，再将 b 作 $m+1$ 次相邻对换，得到排列 $a_1a_2\cdots a_l bb_1b_2\cdots b_m ac_1c_2\cdots c_n$，这样经过了 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1a_2\cdots a_l ab_1b_2\cdots b_m bc_1c_2\cdots c_n$ 与排列 $a_1a_2\cdots a_l bb_1b_2\cdots b_m ac_1c_2\cdots c_n$ 的奇偶性相反。

推论 奇排列对换成标准排列的对换次数为奇数，偶排列对换成标准排列的对换次数为偶数。

1.1.4 n 阶行列式

为了给出 n 阶行列式的定义，我们再一次分析三阶行列式。三阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.6}$$

首先，式(1.6)右边每一项都恰好是三个元素的乘积，每一项的三个元素分别是取自不同行与不同列的元素。如果不考虑其正负号，则每一项都可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，其行标排成标准次序，列标排成 $p_1p_2p_3$，它是数 1、2、3 的某个排列。由于这样的排列有 3！＝6 种，故对应式(1.6)右边的和项共有 6 项。

其次，带正号的三项列标排列是：123，231，312；带负号的三项列标排列是：132，213，321。发现带正号的三项列标排列都是偶排列，带负号的三项列标排列都是奇排列。

因此,三阶行列式也可以定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

其中 t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数, $\sum$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 取和。

仿此,可对一般 n 阶行列式定义如下:

定义 1.2 设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行、不同列的 n 个数的乘积,并冠以符号 $(-1)^t$,得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{1.7}$$

的项,其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为正整数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 为这个排列的逆序数。由于这样的排列共有 $n!$ 个,因而形如式(1.7)的项共有 $n!$ 项。所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

称为 n 阶行列式,记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作 $\det(a_{ij})$。数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的位于第 i 行第 j 列的元素。

当 $n=1$ 时,一阶行列式 $|a|=a$,注意不要将行列式 $|a|$ 与绝对值相混淆。

我们需要对定义 1.2(即 n 阶行列式的定义) 给出解释。

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

t 是排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数。

上式左端所表达的是 n 阶行列式的形式,而右端表达的恰恰是 n 阶行列式的实质。右端表达式表明 n 阶行列式实质是一个 $n!$ 项的代数和,是一个数值。

上面给出了 n 阶行列式的定义,在此定义中行标排列是数 $1,2,\cdots,n$ 的标准排

列，列标排列是数 1，2，…，n 的一个排列 $p_1p_2\cdots p_n$。在 $D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中，每一项使用乘法的交换律，将 $D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 换成 $D=\sum(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$，其中 s 是排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数。显然，由定理 1.1 的推论可知，排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 的奇偶性不变。由此，我们可以给出 n 阶行列式的另一种定义：

定义 1.3 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})=\sum(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$，其中 n 是排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数。

例 1.3 根据行列式的定义，计算

$$D_1=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}0 & \cdots & 0 & \lambda_1\\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}$$

解 D_1 中可能不为零的只有一项 $(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，其中 $t=0$。又 $a_{ii}=\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$，所以得 $D_1=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$。

若记 $\lambda_i=a_{i,n-i+1}(i=1,2,\cdots,n)$，则由行列式定义

$$D_2=\begin{vmatrix}0 & \cdots & 0 & \lambda_1\\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & \cdots & 0 & a_{1n}\\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}=(-1)^t a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

其中 t 为排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数，而且

$$t=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

所以 $D_2=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$。

形如例 1.3 中的行列式称为对角行列式（其中对角线上的元素为 λ_i，而其余元素都为 0）。

对角线之下（上）的元素都为 0 的行列式叫做上（下）三角形行列式。这是行列式计算中非常重要的一类行列式。

例 1.4 证明：上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证 当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$，故 D 中可能不为零的元素 a_{ip_i}，其下标应有 $p_i\geqslant i$，即 $p_1\geqslant 1, p_2\geqslant 2, \cdots, p_n\geqslant n$。

在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一个标准排列 $12\cdots n$，这样 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，其逆序数为 0，所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

1.1.5 行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 D^{T} 为行列式 D 的转置行列式。

换一个角度看，也可以把 D 看成 D^{T} 的转置行列式。

性质 1.1 行列式与它的转置行列式相等。

证 记 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，由行列式的定义

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}=D$$

性质 1.1 表明行列式中的行与列具有同等的地位，凡是有关行列式中行的性质对列也同样成立。

性质 1.2 互换行列式的任意两行（或两列），行列式改变符号。

证 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$$

其中 t 是排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数。

互换行列式 D 中第 i,j 两行，得行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^s a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

其中 s 是排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数。

而排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 可看作是由排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 中的两个元素 p_i，p_j 对换而得到，由定理 1.1 可知它们的奇偶性相反，即 s 与 t 的奇偶性相反。所以

$$D_1=-D$$

以 r_i 表示行列式的第 i 行，$r_i\leftrightarrow r_j$ 表示交换行列式的第 i 行与第 j 行。以 c_i 表示行列式的第 i 列，$c_i\leftrightarrow c_j$ 表示交换行列式的第 i 列与第 j 列。

推论 如果行列式的任意两行(或两列)元素完全相同，则此行列式的值为零。

证 互换元素相同的两行，利用性质 1.2，有 $D=-D$，故 $D=0$。

性质 1.3 行列式的某一行(或列)中所有元素都乘以同一个数 k，等于用数 k 乘以此行列式。

kr_i 表示行列式的第 i 行所有元素乘以 k，kc_i 表示行列式的第 i 列所有元素乘以 k。

推论 若行列式的某一行(或列)的所有元素有公因子，则公因子可以提到行列式符号外面。

$r_i\div k$ 表示行列式的第 i 行提出公因子 k，$c_i\div k$ 表示行列式的第 i 列提出公因子 k。

性质 1.4 行列式中如果有任意两行(或两列)元素对应成比例，则此行列式的值等于零。

性质 1.5 若行列式的某一列(或行)的元素都是两数之和，例如第 i 列的元素都是两数之和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两个行列式之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对于行的情况也类似可得。

性质 1.6 把行列式某一行(或列) 的各元素乘以同一个数 k 然后加到另一行(或列) 的对应元素上去，行列式的值不变。

r_j+kr_i 表示第 i 行所有元素乘以 k 加到第 j 行上去(此时行列式第 i 行不变，变化的是第 j 行)。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_j+kr_i}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

同样，c_j+kc_i 表示第 i 列所有元素乘以 k 加到第 j 列上去(此时行列式第 i 列不变，变化的是第 j 列)。

性质 1.3 至性质 1.6 的证明请读者自己完成。下面举例说明怎样使用行列式的性质计算行列式。常用的一种方法就是利用行列式的性质先把行列式化成三角形行列式从而计算得到行列式的值。

例 1.5 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

解 $D\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\1&-5&3&-4\\0&2&1&-1\\-5&1&3&-3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1}-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&-8&4&-6\\0&2&1&-1\\0&16&-2&7\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&-8&4&-6\\0&16&-2&7\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&-10&15\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4\div 5]{r_3\div 2}10\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&4&-5\\0&0&-2&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+\frac{1}{2}r_3}10\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&4&-5\\0&0&0&\frac{1}{2}\end{vmatrix}=40$$

例 1.6 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&2\\1&1&2&1\\1&2&1&1\\2&1&1&1\end{vmatrix}$

解 这个行列式的特点是各列的 4 个数之和都是 5。将 2、3、4 行依次加到第 1 行，提取公因子 5，然后各行减去第 1 行，可以得到

$$D=\begin{vmatrix}5&5&5&5\\1&1&2&1\\1&2&1&1\\2&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\div 5}5\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&2&1\\1&2&1&1\\2&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3+(-1)r_1\\r_4+(-2)r_1}]{r_2+(-1)r_1}5\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&-1&-1&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2\leftrightarrow r_3]{r_4\div(-1)}5\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+(-1)r_3]{r_4+(-1)r_2}5\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=5$$

例 1.7 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&n&n&\cdots&n\\n&2&n&\cdots&n\\n&n&3&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&n&\cdots&n\end{vmatrix}$

解 将第 n 行乘以 -1 依次加到前面各行可得一个下三角形行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & n & n & \cdots & n\\ n & 2 & n & \cdots & n\\ n & n & 3 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-n & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 2-n & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 3-n & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}n!$$

例 1.8 设 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0\\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix}$，记 $D_1=\det(a_{ij})=$

$\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mm}\end{vmatrix}$，$D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix}$，证明 $D=D_1D_2$

证 用数学归纳法不难证明(这里不证)：任何 n 阶行列式总能利用运算 r_j+kr_i 化为下三角形(或上三角形)行列式。

对 D_1 作运算 r_j+kr_i，把 D_1 化为下三角形行列式，设

$$D_1=\begin{vmatrix}p_{11} & & 0\\ \vdots & \ddots & \\ p_{m1} & \cdots & p_{mm}\end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{mm}$$

对 D_2 作运算 c_j+kc_i，把 D_2 化为下三角形行列式，设

$$D_2=\begin{vmatrix}q_{11} & & 0\\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn}\end{vmatrix}=q_{11}\cdots q_{nn}$$

对 D 的前 m 行作运算 r_j+kr_i，再对 D 的后 n 列作运算 c_j+kc_i，将 D 化为下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix}p_{11} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ p_{m1} & \cdots & p_{mm} & 0 & \cdots & 0\\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & q_{11} & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & q_{n1} & \cdots & q_{nn}\end{vmatrix}$$

故 $$D=p_{11}\cdots p_{mm}q_{11}\cdots q_{nn}=D_1D_2$$