全国硕士研究生入学统一考试

历届考题

名家解析

经济数学三

黄先开　曹显兵
施明存　殷先军　编

2005

东方龙文化
考研系列

世界图书出版公司

全国硕士研究生入学统一考试

历届考题名家解析

经济数学三

黄先开　曹显兵
施明存　编

2005

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学统一考试历届考题名家解析.经济数学三/黄先开等编.
—西安:世界图书出版西安公司,2004.3
ISBN 7-5062-5325-9

Ⅰ.全… Ⅱ.黄… Ⅲ.经济数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ.G643

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第009148号

全国硕士研究生入学统一考试历届考题名家解析——经济数学三
编　著　黄先开等
责任编辑　焦毓本
总 策 划　谭隆全
封面设计　东　方
世界图书出版西安公司 出版发行
(西安市南大街17号　邮编710001)
北京建工印刷厂印刷
各地新华书店经销
开本:787×1092(毫米)　1/16　印张:84(总)　字数:2086千字(总)
2004年2月修订　2004年2月第1次印刷
印数:1~3000册
ISBN 7-5062-5325-9
H·373 共6册 定价:108.00元

出版说明

历届考题就是最好的模拟试题。因为,**历史是一面镜子**。懂得昨天,才会明白今天;掌握了历史和现实,才能驾驭未来。

本套丛书具有**资料完整、分析详细、解剖透彻、技巧灵活**的特点。首先,汇集了1989～2004年数学,1998～2004年政治理论,1994～2004年英语的历届研究生入学考试试题,包括政治理论、英语、理工数学一、理工数学二、经济数学三、经济数学四,共6册;其次,真正做到了逐题解析,分析详尽,解答规范,特别是填空题和选择题均给出了详细的解答过程,另外针对近几年的考题,做到先是分析——解题的基本思路、方法,然后是详解——详细、规范的答题过程,再就是评注——解题思路、方法和技巧的归纳总结,所涉及到的知识点、命题意图和可能延伸的考查情形。这种对命题思路、解题的重点、难点进行深入细致的解析,相信有助于考生把握解题规律、扩展分析思路、提炼答题技巧,从而大大提高应试水平。

自从1987年全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试以来,至今已有18年,共命制试卷100余份,数千道试题。这些试题是广大参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶,它既反映了《考试大纲》对考生数学、英语和政治理论方面知识、能力和水平的要求,展示出统考以来三门基础课考试的全貌,又蕴涵着命题专家在《考试大纲》要求下的命题思想,是广大考生和教师了解、分析、研究全国硕士研究生入学统一考试最直接、最宝贵的第一手资料。

鉴于研究生入学统一考试已超过10届,所以很难保证每年的试题都是最新编制的。事实上,近几年的考题都与往年的试题有相当一部分是雷同的。比如:**2004年**数学一第(17)题与1996年数学一第四大题,**2004年**数学一第(23)题与1997年数学一第十大题,**2004年**数学一第(20)题与2003年数学三第九大题;**2004年**数学一第(15)题与1993年数学一第六大题,**2004年**数学一第(11)题与1997年数学一第八大题,**2004年**数学一第(12)题与1993年数学一第二大题第(5)小题,**2004年**数学二第(9)题与2002年数学二第一大题第(4)小题,**2004年**数学二第(22)题与2003年数学三第九大题,**2004年**数学三、四第(18)题与1992年数学四、2002年数学四第七大题,**2004年**数学三第(19)题与2002年数学第七大题,**2004年**数学三第(20)题与2000年数学三、四第九大题,**2004年**数学四第(21)题与1997年数学三第十大题,2004年数学一、三、四第(22)题与2003年数学四第十二大题,**2003年**数学一的第一大题第(3)小题与1993年数学一的第一大题第(3)小题,**2003年**数学一的第一大题第(5)小题与1996年数学三的第一大题第(5)小题,**2003年**数学一的第三大题与2001年数学三的第六大题,**2003年**数学四的

第四大题与 2001 年数学一的第五大题,**2003 年**数学一的第十大题与 1994 年数学三的第九大题,**2003 年**数学一的第十一大题与 1992 年数学三的第十三大题,**2003 年**数学二的第七大题与 1997 年数学二的第八大题,**2003 年**数学二的第十一大题与 1999 年数学四的第九大题,**2003 年**数学三的第九大题与 2002 年数学三的第九大题,**2003 年**数学四的第七大题与 1998 年数学三的第八大题,**2003 年**数学四的第十大题与 1999 年数学三的第九大题等等都是相同或非常相似的,且解题思路几乎完全一样,可见仅在**最近** 2 **年**的数学考题中就有**多达** 20 **余道题**是与往届考题雷同的。考生若把这些历届考题全部消化巩固,将为考研成功打下坚实的基础。正因为如此,广大准备考研的同学和教师都迫切希望有一套完整的历届考试资料作为参考,共享这些优秀的试题。编者们多年来一直在做这方面的收集、整理工作,现在出版的这套丛书相信能满足大家的要求。

本套丛书按时间顺序成套题形式编排,目的是便于广大考生完成基础知识复习后进行模拟训练。尽管每题均有详尽规范的解答,但不希望读者轻易去查看答案和评注,而一定要自己先动手去进行演练。通过做成套的真题,一方面达到深化知识理解,提升思维水平的目的;另一方面可掌握做题节奏和调整考试心态。可能的话,相邀几个一起准备考研的朋友,在规定的三个小时之内真刀真枪地进行一番演习,刻意给自己制造一个紧张的气氛,去体会那种让人怦怦心跳的考试环境。通过对历年试题的真实模拟,把握好做题的节奏,分配好各部分的时间,从而不断提升自己的应试水平。

在每套题做完后,再回过头去看书中的分析、详解和评注,仔细回顾研究一下自己的思路和解答过程与书中的答案有什么异同,了解自己在基础知识、分析思路及求解推理过程中存在哪些不足,与前面已做过的题比较是否有了提高……,等等,注意这样的归纳总结过程是必不可少的,其重要性甚至超过做题本身。整本书都这样复习下来后,在掌握基本概念、基本理论和基本方法上,在灵活运用知识和思维能力的训练上,相信读者一定会有本质的提高。

由于时间比较仓促,难免还有不足之处,恳请广大读者朋友批评指正,以使本系列丛书能不断完善。

全国硕士研究生入学考试试题研究组

目　　次

1989 年全国硕士研究生入学统一考试
经济数学三试题

一、填空题(本题满分 15 分,每小题 3 分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 曲线 $y=x+\sin^2 x$ 在点$(\frac{\pi}{2},1+\frac{\pi}{2})$处的切线方程是__________.

(2) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ 的收敛域是__________.

(3) 齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+x_3=0,\end{cases}$ 只有零解,则 λ 应满足的条件是__________.

(4) 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ A\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 1, & x>\frac{\pi}{2},\end{cases}$$

则 $P\{|X|<\frac{\pi}{6}\}=$__________.

(5) 设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=\mu$,方差 $D(X)=\sigma^2$,则由切比雪夫(Chebyshev)不等式,有 $P\{|X-\mu|\geqslant 3\sigma\}\leqslant$__________.

二、选择题(本题满分 15 分,每小题 3 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $f(x)=2^x+3^x-2$,则当 $x\to 0$ 时

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小量.

(B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量.

(C) $f(x)$ 是比 x 较高阶的无穷小量.

(D) $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小量.

【 】

(2) 在下列等式中,正确的结果是

(A) $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)$. (B) $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)$.

(C) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$. (D) $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$.

【 】

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵且 $|\boldsymbol{A}|=0$,则

(A) $\boldsymbol{A}$ 中必有两行(列)的元素对应成比例.

(B) $\boldsymbol{A}$ 中任意一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合.

(C) $\boldsymbol{A}$ 中必有一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合.

(D) $\boldsymbol{A}$ 中至少有一行(列)的元素全为 0.

【　】

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 $n \times n$ 矩阵,则必有

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$.　　(B) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

(C) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$.　　(D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.

【　】

(5) 以 A 表示事件"甲种产品畅销,乙种产品滞销",则其对立事件 $\overline{A}$ 为

(A)"甲种产品滞销,乙种产品畅销".　　(B)"甲、乙两种产品均畅销".

(C)"甲种产品滞销".　　(D)"甲种产品滞销或乙种产品畅销".

【　】

三、计算题(本题满分 15 分,每小题 5 分)

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

(2) 已知 $z=f(u,v)$, $u=x+y$, $v=xy$, 且 $f(u,v)$ 的二阶偏导数都连续. 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(3) 求微分方程 $y''+5y'+6y=2\mathrm{e}^{-x}$ 的通解.

四、(本题满分 9 分)

设某厂家打算生产一批商品投放市场. 已知该商品的需求函数为

$$P=P(x)=10\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}},$$

且最大需求量为 6,其中 x 表示需求量,P 表示价格.

(1) 求该商品的收益函数和边际收益函数.　(2 分)

(2) 求使收益最大时的产量、最大收益和相应的价格.　(4 分)

(3) 画出收益函数的图形.　(3 分)

五、(本题满分 9 分)

已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$ 试计算下列各题:

(1) $S_0=\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;　(4 分)

(2) $S_1=\displaystyle\int_2^4 f(x-2)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;　(2 分)

(3) $S_n=\displaystyle\int_{2n}^{2n+2} f(x-2n)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\,(n=2,3,\cdots)$;　(1 分)

(4) $S=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}S_n$.　(2 分)

六、(本题满分 6 分)

假设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续、在 (a,b) 内可导,且 $f'(x)\leqslant 0$. 记

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

证明在(a,b)内,$F'(x)\leqslant 0$.

七、(本题满分5分)

已知 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{pmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

八、(本题满分6分)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,t)$.

(1) 问当 t 为何值时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关? (3分)

(2) 问当 t 为何值时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关? (1分)

(3) 当向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关时,将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合. (2分)

九、(本题满分5分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}$.

(1) 试求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值; (2分)

(2) 利用(1)小题的结果,求矩阵 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值,其中 $\boldsymbol{E}$ 是三阶单位矩阵. (3分)

十、(本题满分7分)

已知随机变量 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x+y)}, & 0<x<+\infty,0<y<+\infty,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求:(1)$P\{X<Y\}$; (5分)

(2)$E(XY)$. (2分)

十一、(本题满分8分)

设随机变量 X 在$[2,5]$上服从均匀分布,现在对 X 进行三次独立观测,试求至少有两次观测值大于3的概率.

1989年全国硕士研究生入学统一考试 经济数学三试题分析、详解及评注

一、填空题

(1) 曲线 $y=x+\sin^2 x$ 在点$(\frac{\pi}{2},1+\frac{\pi}{2})$处的切线方程是 $\underline{\quad y=x+1\quad}$.

[分析] 利用导数的几何意义和直线方程的点斜式即得.

[详解] 因为

$$y'\big|_{\frac{\pi}{2}}=(1+2\sin x\cos x)\big|_{\frac{\pi}{2}}=1,$$

故曲线在点$(\frac{\pi}{2},1+\frac{\pi}{2})$处的切线方程是

$$y-(1+\frac{\pi}{2})=1\cdot(x-\frac{\pi}{2}),\text{即 } y=x+1.$$

[评注] 本题主要考查导数的几何意义、$y=f(x)$所表示的曲线的切线及直线的点斜式. 属于基本题.

(2) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ 的收敛域是 $\underline{\quad[-1,1)\quad}$.

[分析] 直接利用幂级数的收敛半径公式求 R,然后讨论左、右端点处的情况即可.

[详解] 因该级数的收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n+2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}=1,$$

当 $x=1$ 时,级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$是发散的;

当 $x=-1$ 时,级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}$收敛(交错级数满足莱布尼茨条件).

故级数的收敛域是$[-1,1)$.

[评注] 本题主要考查幂级数收敛域的求法. 注意当$R>0$时,必须进一步讨论$x=R$和$x=-R$时幂级数是否收敛. 收敛区间$(-R,R)$加上使幂级数收敛的端点构成幂级数的收敛域.

(3) 齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+x_3=0,\end{cases}$只有零解,则 λ 应满足的条件是 $\underline{\quad\lambda\neq 1\quad}$.

[分析] 因为方程个数和未知数个数相等的齐次线性方程组只有零解的充分必要条件

是系数行列式不等于 0，直接由系数行列式不为零即得.

[详解] 齐次线性方程组只有零解，则

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{即} (1-\lambda)^2 \neq 0,$$

故 $\lambda \neq 1$.

[评注] 本题主要考查齐次线性方程组解的性质. 注意，当方程个数和未知数个数不相等时，只能用系数矩阵的秩来判定.

(4) 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ A\sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

则 $P\{|X| < \frac{\pi}{6}\} = \underline{\quad \frac{1}{2} \quad}$.

[分析] 利用分布函数的右连续性先求出 A，然后利用分布函数计算概率即可.

[详解] 由题设知

$$F(\frac{\pi}{2}) = A\sin\frac{\pi}{2} = A, \quad \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^+} F(x) = 1,$$

因 $F(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处右连续，所以

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^+} F(x) = F(\frac{\pi}{2}),$$

从而 $A = 1$.

因 $F(x)$ 在 $x = -\frac{\pi}{6}$ 处连续. 于是

$$P\left\{|X| < \frac{\pi}{6}\right\} = P\left\{-\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{6}\right\} = F(\frac{\pi}{6} - 0) - F(-\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} - 0 = \frac{1}{2}.$$

[评注] 本题主要考查分布函数的基本性质，及利用分布函数来求事件的概率. 注意，题目未说 X 是连续型随机变量，因此求 A 时只能利用分布函数的右连续性 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} F(x) = F(\frac{\pi}{2})$，而不能用 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} F(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} F(x)$.

(5) 设随机变量 X 的数学期望 $E(X) = \mu$，方差 $D(X) = \sigma^2$，则由切比雪夫(Chebyshev)不等式，有 $P\{|X - \mu| \geqslant 3\sigma\} \leqslant \underline{\quad \frac{1}{9} \quad}$.

[分析] 在切比雪夫不等式中令 $\varepsilon = 3\sigma$ 即得.

[详解] 由于 $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$，根据切比雪夫不等式 $P\{|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$，知

$$P\{|X-\mu|\geqslant 3\sigma\}\leqslant \frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2}=\frac{1}{9}.$$

[评注] 本题主要考查切比雪夫不等式.

二、选择题

(1) 设 $f(x)=2^x+3^x-2$,则当 $x\to 0$ 时

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小量.

(B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量.

(C) $f(x)$ 是比 x 较高阶的无穷小量.

(D) $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小量.

【　】

[答] 应选(B).

[分析] 要比较两个无穷小的关系,只要求它们比的极限就可得出.

[详解] 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}\left(\frac{0}{0}\text{ 型}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{1}=\ln 2+\ln 3\neq 1,$$

故 $f(x)$ 与 x 是同阶而非等价无穷小量,(B) 为正确选项.

[评注] 本题考查无穷小量阶的比较及洛必达法则求极限.

(2) 在下列等式中,正确的结果是

(A) $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)$.　　(B) $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)$.

(C) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$.　　(D) $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$.

【　】

[答] 应选(C).

[分析] 由不定积分的概念易知(C) 正确.

[详解] 设 $F'(x)=f(x)$,

则 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$,

从而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F(x)+C)=F'(x)=f(x)$.

[评注] 本题考查不定积分的基本概念,其中

$$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C,\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C,\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵且 $|\boldsymbol{A}|=0$,则

(A) $\boldsymbol{A}$ 中必有两行(列) 的元素对应成比例.

(B) $\boldsymbol{A}$ 中任意一行(列) 向量是其余各行(列) 向量的线性组合.

(C) $\boldsymbol{A}$ 中必有一行(列) 向量是其余各行(列) 向量的线性组合.

(D) $\boldsymbol{A}$ 中至少有一行(列) 的元素全为 0.

【　】

[答] 应选(C).

[分析] $|A|=0 \Leftrightarrow A$ 的行(列)向量组线性相关,再由向量组的线性关系即得.

[详解] 对于 n 阶方阵 A,由于 $|A|=0$,所以 A 的 n 个行(或列)向量必线性相关,即至少有一个行(或列)向量是其余向量的线性组合,故应选(C).

[评注] (1)(A)、(B)、(D) 均为 $|A|=0$ 的充分条件,而非必要条件.

(2)n 阶方阵 $|A|=0 \Leftrightarrow A$ 不可逆 $\Leftrightarrow Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ 秩 $r(A)<n \Leftrightarrow A$ 的行(列)向量组线性相关.

(4) 设 A 和 B 均为 $n \times n$ 矩阵,则必有

(A) $|A+B|=|A|+|B|$.　　(B) $AB=BA$.

(C) $|AB|=|BA|$.　　(D) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$.

【　】

[答] 应选(C).

[分析] (C) 为方阵的行列式的性质.

[详解] 由于

$$|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|,$$

所以(C) 成立.

对于(A)、(B)、(D) 容易举反例说明均不成立.

[评注] 本题考查行列式、矩阵运算与代数运算的差异.

(5) 以 A 表示事件"甲种产品畅销,乙种产品滞销",则其对立事件 $\overline{A}$ 为

(A)"甲种产品滞销,乙种产品畅销".　　(B)"甲、乙两种产品均畅销".

(C)"甲种产品滞销".　　(D)"甲种产品滞销或乙种产品畅销".

【　】

[答] 应选(D).

[分析] 利用狄·摩根(De·Morgan)律即得.

[详解] 设 $B=\{$甲产品畅销$\}$,$C=\{$乙产品滞销$\}$,

则由题设 $A=BC$,于是对立事件 $\overline{A}$ 为:

$$\overline{A}=\overline{BC}=\overline{B}\cup\overline{C}=\{\text{甲产品滞销或乙产品畅销}\}.$$

故(D) 为正确选项.

[评注] 本题考查逆事件及狄·摩根律.

三、计算题

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

[分析] 本题属"1^∞"型未定式,可用第二类重要极限或转化为指数函数后用洛必达法则求解.考虑到 $x\to\infty$ 时,函数表达式中含有 $\frac{1}{x}$ 的项,可作代换 $x=\frac{1}{t}$ 简化运算.

[详解 1] $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^2\right]^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[(1+\sin\frac{2}{x})^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}}\right]^{\sin\frac{2}{x}\cdot\frac{x}{2}} = \mathrm{e}.$$

[详解 2] 原式 $= \lim_{x\to\infty}[1+(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)]^x$.

因为 $\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}+\frac{\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}\right) = 1+\lim_{x\to\infty}\frac{-\sin\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}$

$$= 1-\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x} = 1,$$

所以原式 $= \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

[详解 3] $\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x \xlongequal{\frac{1}{x}=t} \lim_{t\to 0}(\sin t+\cos t)^{\frac{1}{t}}$

$$= \lim_{t\to 0}\exp\{\frac{1}{t}\ln(\sin t+\cos t)\}$$

$$= \exp\{\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}\}$$

$$= \exp\{\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$

[评注] 本题主要考查“1^∞”型极限求法和重要极限 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}$. 对于“$1^\infty$”型极限，有

$$\lim f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim g(x)[f(x)-1]},$$

这里 $f(x)\to 1, g(x)\to\infty$.

(2) 已知 $z = f(u,v), u = x+y, v = xy$，且 $f(u,v)$ 的二阶偏导数都连续. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

[分析] 应用复合函数求偏导数的链式法则或一阶全微分的形式不变性即可求得.

[详解 1] 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v}$，所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v})$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}+y(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y})$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial f}{\partial v}+y\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(x+y)\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v}.$$

[详解 2] 由一阶全微分形式不变性得

$$\mathrm{d}z = f'_1\mathrm{d}(x+y)+f'_2\mathrm{d}(xy) = f'_1(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+f'_2(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$$
$$= (f'_1+yf'_2)\mathrm{d}x+(f'_1+xf'_2)\mathrm{d}y,$$

于是 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1+yf'_2$. 因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=(f'_1)'_y+y(f'_2)'_y+f'_2=f''_{11}+xf''_{12}+y(f''_{21}+xf''_{22})+f'_2$$
$$=f''_{11}+(x+y)f''_{12}+xyf''_{22}+f'_2.$$

[评注] 因为 $f(u,v)$ 的二阶偏导数连续，故有 $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}=\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$，即 $f''_{12}=f''_{21}$.

(3) 求微分方程 $y''+5y'+6y=2e^{-x}$ 的通解.

[分析] 本题属于二阶常系数线性非齐次微分方程，其通解是它的一个特解 y^* 与其对应齐次方程的通解 Y 之和.

[详解] 先求对应齐次方程 $y''+5y'+6y=0$ 的通解.

特征方程 $\lambda^2+5\lambda+6=0$，特征根 $\lambda_1=-2,\lambda_2=-3$.

故对应齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}(C_1,C_2\text{ 为任意常数}).$$

再求非齐次方程 $y''+5y'+6y=2e^{-x}$ 的一特解.

这里 $f(x)=2e^{-x}$，$\alpha=-1$ 不是特征根，故可设特解为

$$y^*=Ae^{-x}(A\text{ 为待定常数}).$$

将 y^* 代入原方程，可得 $A=1$，由此，得

$$y^*=e^{-x},$$

故所求通解为

$$y=Y+y^*=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}+e^{-x}.$$

[评注] 本题属于基本题，主要考查线性常系数非齐次微分方程的解法.

四、设某厂家打算生产一批商品投放市场. 已知该商品的需求函数为

$$P=P(x)=10e^{-\frac{x}{2}},$$

且最大需求量为 6，其中 x 表示需求量，P 表示价格.

(1) 求该商品的收益函数和边际收益函数. (2 分)

(2) 求使收益最大时的产量、最大收益和相应的价格. (4 分)

(3) 画出收益函数的图形. (3 分)

[分析] 这是常见的经济数学问题，利用导数即得.

[详解] (1) 收益函数为

$$R(x)=Px=10xe^{-\frac{x}{2}},0\leqslant x\leqslant 6,$$

边际收益函数为

$$MR=\frac{dR}{dx}=5(2-x)e^{-\frac{x}{2}}.$$

(2) 由 $\frac{dR}{dx}=5(2-x)e^{-\frac{x}{2}}=0$，得驻点 $x=2$.

由于 $\left.\frac{d^2R}{dx^2}\right|_{x=2}=\left.\frac{5}{2}(x-4)e^{-\frac{x}{2}}\right|_{x=2}=-5e^{-1}<0$，

因此 $R(x)$ 在 $x=2$ 处达到极大值，因为极值点惟一，故此极大值必为最大值：

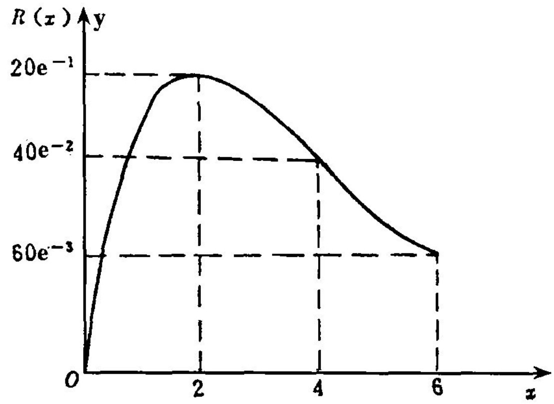
$$R(2)=10xe^{-\frac{x}{2}}\Big|_{x=2}=20e^{-1}.$$

所以，当产量为 2 时，收益取最大值 $20e^{-1}$，而相应的价格为 $10e^{-1}$.

(3) 由上面的计算结果，易得下表：

x	$[0,2)$	2	$(2,4)$	4	$(4,6]$
R'	$+$	0	$-$		$-$
R''	$-$	$-$	$-$	0	$+$
R	$\nearrow$	极大值 $\dfrac{20}{e}$	$\searrow$	拐点 $\left(4,\dfrac{40}{e^2}\right)$	$\searrow$

图形：



[评注] 本题主要考查常用经济函数及导数的应用，[illegible]

五、已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2. \end{cases}$ 试计算下列各题：

(1) $S_0=\int_0^2 f(x)e^{-x}dx$； (4 分)

(2) $S_1=\int_2^4 f(x-2)e^{-x}dx$； (2 分)

(3) $S_n=\int_{2n}^{2n+2} f(x-2n)e^{-x}dx\,(n=2,3,\cdots)$； (1 分)

(4) $S=\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n$. (2 分)

[分析] $f(x)$ 是分段函数，因此积分应分段进行. (2)，(3) 中被积函数含有中间变量，应进行变量代换化为(1) 的情形.

[详解] (1) $S_0=\int_0^1 xe^{-x}dx+\int_1^2(2-x)e^{-x}dx$,

用分部积分法分别求积分，得

$$\int_0^1 xe^{-x}dx=-xe^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=1-2e^{-1},$$

$$\int_1^2(2-x)e^{-x}dx=-(2-x)e^{-x}\Big|_1^2-\int_1^2 e^{-x}dx=e^{-2},$$