

中学物理中的 数学方法

冯建跃 寒 冰 编著

宇航出版社

中学物理中的数学方法

冯建跃 寒 冰 编著

宇航出版社

内 容 简 介

本书是根据现行高中物理课本的基本精神编写的。全书共七章，阐述了中学物理中常用的数学方法和技巧。主要内容有：向量、极值、数列问题和有关空间结构问题的处理方法，振动、波、交流电等正弦规律，几种常用函数及其图象的特点和应用，微积分的应用等。各章自成体系，条理清楚。先扼要介绍数学知识，转而即用之于研究物理问题，分析深入浅出，阐述通俗易懂。各章配有适量的例题和习题，书末还附有答案。

本书适作普通高中、中等职业技术学校、师范学校学生学习物理的辅导书，也可供有关教师作教学参考书。

中学物理中的数学方法

冯建跃 寒 冰 编著

责任编辑：倪汉昌

*

宇航出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经销

轻工业出版社印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：7.125 字数：154千字

1988年9月第1版 第1次印刷 印数：1—3000册

ISBN 7-80034-105-4/G·017 定价：1.70元

前 言

培养学生运用数学知识解决物理问题的能力，是中学物理教学的重要任务之一。为了配合中学物理教学，我们根据中学物理教学实际，按照现行中学物理课本和中学数学课本的基本精神，编写了《中学物理中的教学方法》一书。

本书简要地叙述了中学物理学中常用的数学知识（包括矢量、视图、正弦规律、极值、数列、函数及其图象和微积分初步等七部分），通过足够的例子，详尽地阐述了这些知识在中学物理学中的运用方法和技巧。每章配有适量的习题，可供读者学习时使用。本书以帮助广大中学生培养和提高“学物理、用数学”的能力为目的，可作为中学生的学习方法指导书，也可供中学物理教师、中等专业学校师生和师范院校物理专业学生的物理教学参考资料。

由于编者水平有限，书中不足之处在所难免，敬请读者谅解并欢迎批评指正。

1987年2月

目 录

前言

绪论 (1)

一、开启物理大门的金钥匙 (1)

二、中学物理教学的一大任务 (2)

三、学物理、学数学，提高应用数学知识解决物理问题的水平 (7)

第一章 矢量 (9)

一、解三角形 (9)

二、矢量加法法则 (11)

三、矢量加法的应用 (15)

四、矢量减法法则 (23)

五、矢量减法的应用 (24)

六、矢量的其他运算法则 (28)

七、矢量数乘、点乘和叉乘的应用 (30)

八、共线矢量的运算法规 (36)

九、共线矢量运算的应用 (38)

练习一 (41)

第二章 视图 (45)

一、视图 (45)

二、物理学中的视图问题 (50)

练习二 (64)

第三章 正弦规律 (66)

正弦规律的数学概念 (66)

二、正弦规律在简谐振动中的应用	(73)
三、正弦规律在简谐波中的应用	(84)
四、正弦规律在交流电路中的应用	(90)
练习三	(96)
第四章 极值	(99)
一、极值	(99)
二、物理学中的极值问题	(105)
练习四	(118)
第五章 数列	(121)
一、数列的数学概念	(121)
二、数列在物理学中的应用	(123)
练习五	(136)
第六章 函数及其图象	(139)
一、函数	(139)
二、函数的图象	(145)
三 物理规律的图象	(154)
四 有关图象的运算	(184)
练习六	(195)
第七章 微积分初步	(198)
一、导数和微分	(198)
二、导数和微分在物理学中的应用	(202)
三、积分	(212)
四、积分在物理学中的应用	(213)
练习七	(218)
练习题答案	(219)

绪 论

一、开启物理大门的金钥匙

物理，在中学课程中，以它内容的生动活泼、形态的丰富多彩而深受广大学生的喜爱。为什么冬天从口中呼出的气是白的？为什么桥大都建成弓形的？——多少童年时代的谜，多少日常生活中的奇，同学期待着在物理课上解开、破释。物理，在中学各门课程中，又以它叙述的精确严密，论证的玄妙深奥，而倍使广大学生望而生畏。那弯弯的曲线表示什么意思？那 $C=Q/U$ 中 C 和 U 不成反比吗？——多少个疑团，多少处模糊，冷落了多少可贵的好奇之心、好学之心！

如何才能学好物理呢？这是我们物理教学工作者和广大中学生在教和学的过程中全力探求的一个重要问题。人们常说，物理难学，物理难教，难就难在物理学中广泛应用数学知识。纵观整个中学物理，可以清楚地看到，虽然它只是介绍些物理基础知识，但用到了方程、方程组、不等式、比例式、三角函数、三角方程和函数图象等数学知识。数学，不仅作为计算工具贯串在其中，广泛用于指导公式、表达关系、描述规律，而且以它本身的逻辑作用和抽象作用来辅助物理概念和规律的形成。确实，数学学不好，物理也学不好。没有清晰的数学概念，学物理时，就无法进行表述、论证和推导。所以，只有学好数学，掌握数学方法，才能学好中学物理。

数学方法不但在中学物理学中起着如此重要的作用。而

且在整个物理学发展和变革中起着决定性的作用。回顾整个物理学发展史，自从伽里略开创了把物理实验同数学方法相结合的研究途径，成功地描述物体自由下落的规律以后，牛顿利用欧氏几何建立起了力学体系，勒维列利用数学方法预言了海王星的存在，麦克斯韦把电磁学里的四个著名定律组成一个方程组，预言了电磁波的存在，爱因斯坦用张量分析和黎曼几何将狭义相对论发展到广义相对论，等等。现代物理学，大都是先有数学推理论述，后有实验论证。如果没有数学或者没有数学工具的发展和变革，很难想象，物理学能有如此辉煌的今天。

综上所述，对于中学生而言，掌握物理学中的数学方法，是学好物理学的关键之一。中学生是物理学发展和变革的希望，如果说物理学是一座金碧辉煌、色彩斑斓的知识之城，那么，数学就是开启这知识之城大门的金钥匙，掌握这把金钥匙，意义重大。

二、中学物理教学的一大任务

中学物理教学的任务之一，就是要培养学生应用数学解决物理问题的能力。学数学、用数学，这不仅是数学课上的任务，也是物理课的任务。对于广大的中学生，如何提高自己应用数学知识理解、分析和解决物理问题的水平呢？

首先，要有物理思想和数学知识。物理思想反映了问题的实质，数学知识则能对问题作出概括。数学符号、数学公式和数学图形，把各个物理量、各个物理过程有机地联系起来。我们不但要知道物理概念、物理过程是怎样形成和发展的，而且要知道物理过程中各个物理量是怎样联系的。例如，凸透镜成象（图1），物高 $AB=h$ 和象高 $A'B'=h'$ 有何关

系：物距 $OB = u$ 、象距 $OB' = v$ 和焦距 $OF = OF' = f$ 之间有何关系？如图 1，物高与象高的关系： $\triangle AOB \sim \triangle A'O'B'$ ，对应边成比例，即

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'}$$

所以

$$\frac{h}{h'} = \frac{u}{v} \quad (1)$$

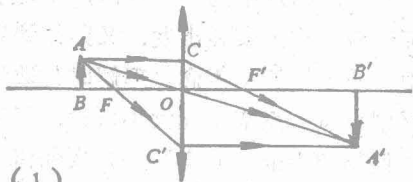


图 1 凸透镜成像

物高与象高之比，等于物距与象距之比；物距与象距、焦距之间的关系： $\triangle ABF \sim \triangle C'O'F$ ，对应边成比例， $C'O' = A'B' = h'$ ，

$$\frac{AB}{C'O'} = \frac{BF}{OF}$$

所以，

$$\frac{h}{h'} = \frac{u-f}{f} \quad (2)$$

结合 (1) 式，得到

$$\frac{u-f}{f} = \frac{u}{v}$$

推导出比较整齐的形式，成为

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

以上都是数学上相似三角形的运算，但这些相似三角形是从哪里来的？那是由 $AC'A'$ 、 AOA' 和 ACA' 三条光线和光轴 BOB' 组成的，没有这一点物理思想，也就没有这样的数学形式，什么数学知识也用不上。反之，有了三条光线，

有了物理思想，没有相似三角形的知识，也不易得出物理规律来。

第二，物理中的数学方法，不是纯数学的运算、推导和论证，应从物理实际出发，又归结到物理实际。例如，物理学中“质点”这个概念，理解时与数学上“点”的概念应有所区别：“点”，虽都是无大小可论，都略去了物体尺寸和形状，但物理中的“质点”，一是要保留物体的质量，二是要掌握物理学中的抽象方法，不是所有物体都可以作为质点的，而是要具备一定条件的。又例如，电容器的电容，定义为 $C=Q/U$ ，从数学角度上讲，似乎可以这样解释：电容器的电容 C 跟电容器所带的电量 Q 成正比，跟电容器上所加的电压 U 成反比。显然，对定义式作这样的解释是错误的。对于一个固定电容器，电容是一个不变的量，用它来描述电容器容纳电量的特性。这种定义物理量的方法可称为比值定义法，诸如速度、加速度、比重、密度、电场强度、电势、磁感应强度的定义，都是用的这种方法。就以电容为例，我们看看应该怎样理解这些物理量。如图 Z 所示，给一只固定电容器 C 加上电压 U_1 ，利用高阻放电法测量其所带电量为 Q_1 （测量方法详见第六章例题 5），加电压 U_2 ，带电量为 Q_2 ，加电压 U_3 ，带电量为 Q_3 ，等等。可以发现，

$$\frac{Q_1}{U_1} = \frac{Q_2}{U_2} = \frac{Q_3}{U_3} = \dots = \text{恒量}.$$

Q 和 U 的比值是一个恒量，说明这个比值反映了电容器的一个特性，这就是电容器容纳电量的特性——电容。电容器所加的电压增大，带的电量也增多，而比值不变，这就表明，电容 C 跟电压 U 和电量 Q 不是成什么比例的，而是无关的。成比例的只是电量 Q 和电压 U 成正比。用比值法定义的其他

量，也要这样去理解。

第三，在解答物理问题时，要善于把物理内容和数学形式相结合。物理为数学提供了实在的内容，一旦完成了物

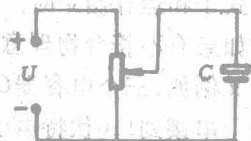


图 2 电容器的电容

理问题向数学问题的转化工作，物理问题就成为一个数学上的应用题。例如，一根一端封闭的玻璃管竖直放置，灌入 h_1 高水银时，刚好水银和管口相齐，这时管子下端空气柱长为 l_1 。当把玻璃管缓慢地倒置过来，管中有多少水银流出？根据玻意耳-马略特定律得

$$(P_0 + h_1)l_1 = (P_0 - h_2)l_2, \quad (3)$$

其中 h_2 和 l_2 是倒置后玻璃管中的水银高度和空气柱长度。流出的水银长度为 $\Delta h = h_2 - h_1$ 。因为

$$l_1 + h_1 = l_2 + h_2, \quad (4)$$

h_1 、 l_1 和 P_0 是已知条件，所求量为 Δh ，用

$$h_2 = h_1 - \Delta h,$$

$$l_2 = l_1 + \Delta h$$

两式代入 (3) 式，得

$$(P_0 + h_1)l_1 = (P_0 - h_1 + \Delta h)(l_1 + \Delta h).$$

这样，把物理问题归纳为一个一元二次方程

$$\Delta h^2 + (P_0 + l_1 - h_1)\Delta h - 2h_1l_1 = 0.$$

容易解得：

$$\Delta h = \frac{1}{2}(P_0 + l_1 - h_1)$$

$$\times \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{8h_1l_1}{(P_0 + l_1 - h_1)^2}} \right)$$

以上进行数学上的运算，暂不考虑物理意义。但是得到

数学式子和运算结果时，就需要分析和讨论结论的物理意义。如果有不符合物理意义的数学结果，就应该舍去。

又例如，三个电容器 $C_1=20$ 微法， $C_2=30$ 微法， $C_3=10$ 微法，串接到110伏特电压上去，每个电容器分得的电压 U_1 、 U_2 、 U_3 各为多大？我们根据电容串联的特点得到这样一个比例：

$$U_1:U_2:U_3 = \frac{1}{C_1}:\frac{1}{C_2}:\frac{1}{C_3} = \frac{1}{2}:\frac{1}{3}:1 \\ = 3:2:6$$

即

$$\frac{U_1}{3} = \frac{U_2}{2} = \frac{U_3}{6}$$

对于这样一个比例，由比例性质得

$$\frac{U_1+U_2+U_3}{3+2+6} = \frac{U_1}{3} = \frac{U_2}{2} = \frac{U_3}{6}$$

而 $U_1+U_2+U_3=110$ ， $2+3+6=11$ ，所以

$$\frac{U_1}{3} = 10, \quad U_1 = 30 \text{伏}$$

$$\frac{U_2}{2} = 10, \quad U_2 = 20 \text{伏}$$

$$\frac{U_3}{6} = 10, \quad U_3 = 60 \text{伏}$$

总之，一个物理问题中各物理量之间存在的关系，用什么数学形式来表达和演算，存在着一定的可变性，但都应该从物理规律出发。在进行数学上的推演和计算时，公式中代表一些物理量的字母就可以看作数学上习惯用的 X 、 Y 、 Z 一样，不再受物理量的含意所束缚，而只需把得到的式子按数学规律和数学方法处理。对处理结果和一些中间环节，

有时有必要运用物理思想去指导，去分析和检验。

三、学物理、学数学，提高应用数

学知识解决物理问题的水平

前面提到，中学物理虽然是物理基础知识的教学，但也牵涉到许多数学方法和数学知识。如果在物理基础知识教学的同时，忽视了数学方法的教学，将给学生学习物理带来很多困难。在中学物理中可以发现，数学和物理已经不是相互“绝缘”的孤岛，而是相互沟通的两门姐妹学科。数学中许多题目要用到物理知识，学生学物理，随着年级的升高，从形象思维发展到逻辑思维，数学知识和数学方法的应用逐步增多。为了适应广大中学生的需要，我们以“中学物理中的数学方法”为题，分别对矢量、视图、数列、正弦规律、极值、图象和微积分初步等七个方面的内容进行了介绍和讨论，力图使广大中学物理教师和广大中学数学教师对物理和数学教学引起必要的注意，并帮助广大中学生培养自己应用数学解决物理问题的能力。

在本书中介绍的数学知识和数学方法，大都是属于中学数学知识和中学物理中常用的方法。矢量的概念在中学物理中是经常出现的。中学物理课本对矢量虽有零星介绍，但终究觉盲犹未尽。本书系统而又简要地介绍了矢量加法、减法和数乘（标量和矢量之积）、点乘（也称标积）、叉乘（又称矢积）以及同一直线上矢量的运算方法，而且用有向线段来表示矢量，紧靠中学数学，而平面几何关系来解决矢量运算问题。视图这一章的知识基础是中学数学中的立体几何，一般数学课本上也有关于视图内容的专门介绍。我们把视图一章列入

本书，目的之一是为了进一步培养学生的空间思维能力，之二是为了用来解决一些物理中的实际问题。物理学中经常出现的示意图，大都不是对着实物勾划出来的，而是往往通过一段文字叙述想出来的，要能“想来出”，就需要培养空间思维能力。按物理学上的习惯，把一个作简谐振动的物理量的变化规律叫做正弦规律，其数学形式为正弦函数或余弦函数。“正弦规律”一章，叙述了正弦规律的三组基本要素，讨论了物理学中一些简谐振荡现象。诸如弹簧振子、电磁振荡、交流电，尽管它们的物理内容不一样，但数学形式却十分相似，把它们组合在一起，就便于类比，容易发现它们之间的共同特点，以利于较快地掌握物理规律。第四章、第五章、第六章和第七章，分别叙述了极值、数列、函数及其图象和微积分知识，以及它们在物理中的应用。各章可自成系统，合之则为一体。

只要认真地学习数学知识和方法，注意培养应用数学知识解决物理问题的能力，学习物理知识的金钥匙，就一定会展现在广大中学生的手中。

第一章 矢 量

在中学物理学中，经常遇到的物理量可分为两类，一类只需用数量来表示，例如质量 m 、温度 t 、功 W 等等，这一类量叫做标量；另一类不但需要用数量，而且要有方向才能表达清楚，例如力 F 、速度 v 、加速度 a 、场强 E 等等，这一类量叫做矢量。

标量可用数学中数轴上的一个点来表示，矢量则要用数学中的有向线段来表示，有向线段的长度表示矢量的大小，有向线段的方向表示矢量的方向。

在矢量运算中，除了遵守矢量运算法则，还经常用到数学中有关解三角形的知识。下面，我们先研究数学上是如何求解三角形的边角关系的。

一、解三角形

矢量加、减法中都要用到平行四边形。平行四边形的对角线把平行四边形划分成两个全等三角形（如图1-1），利用其中一个三角形，解出一些边角关系，便能顺利地完

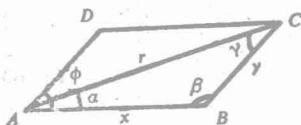


图1-1 AC把“□”ABCD划分成两个全等三角形

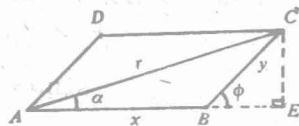


图1-2 斜三角形转化成直角三角形

解斜三角形 一般平行四边形，对角线划分出来的是两个斜三角形。对于斜三角形，数学上利用正弦定理和余弦定理来表达边角关系。在图 1-1 中取 $AB=x$, $BC=y$, $AC=r$, 三个角分别为 α 、 β 、 γ 。余弦定理给出了两边夹一角与第三边的关系式，如：

$$r^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \beta. \quad (1-1)$$

正弦定理给出了对边比对角正弦的等式：

$$\frac{x}{\sin \gamma} = \frac{y}{\sin \alpha} = \frac{r}{\sin \beta}. \quad (1-2)$$

斜三角形也可以转化成直角三角形来求解。如图 1-2 过点 C ，使 AB 的垂线，与 AB 的延长线交于 E ，构成直角三角形 AEC 。 $BE = y \cos \phi$, $CE = y \sin \phi$ 。若已知平行四边形的顶角 ϕ 和两条邻边 x 、 y ，则对角线 AC 长为

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{AE^2 + CE^2} \\ &= \sqrt{(x + y \cos \phi)^2 + (y \sin \phi)^2} \end{aligned} \quad (1-3)$$

角度 α 的正切：

$$\operatorname{tga} = \frac{CE}{AE} = \frac{y \sin \phi}{x + y \cos \phi} \quad (1-4)$$

解直角三角形 如果平行四边形是矩形或菱形，则对角线把平行四边形划分为直角三角形。图 1-3 表示平行四边形为矩形的情形，研究其中一个直角三角形 ABC ，它的边 x 、 y 、 r 和角 α 、 β 有如下关系：

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad (1-5)$$

$$\sin \alpha = \frac{x}{r}, \quad (1-6)$$

$$\cos \alpha = \frac{y}{r}, \quad (1-7)$$

等等。

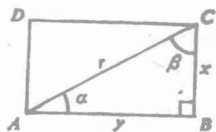


图 1-3 平行四边形是矩形，三角形为直角三角形

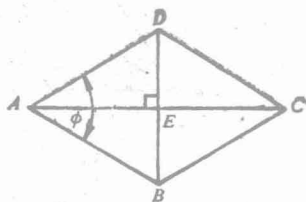


图 1-4 平行四边形是菱形，对角线将菱形划分为四个全等的直角三角形

对于菱形，根据菱形的两条对角线互相垂直而且互相平分的性质，可以将菱形划分为四个全等的直角三角形。如图 1-4 所示，若菱形的顶角 $\angle BAD = \phi$ ，则 $\angle CAD = \frac{1}{2}\phi$ ，且 $AE = EC$ 。对角线 AC 的长度 r 跟菱形的边长 x 的关系，可以通过解直角三角形 AED 得到

$$r = 2x \cos \frac{\phi}{2} \quad (1-8)$$

二、矢量加法法则

平行四边形法则和三角形法则 矢量 A 、 B 相加，得到一个新矢量 C 。用公式表达为

$$A + B = C \quad (1-9)$$

和矢量 C 与 A 、 B 之间的关系，遵守平行四边形法则： C 是以 A 、 B 为邻边的平行四边形的对角线，图形如图 1-5(a)。

分析平行四边形法则，欲求 C 的大小和方向，必定要知道 A 、 B 的大小及其夹角。 A 、 B 的大小，就相当于图 1-1 中平行四边形两条邻边的长度 x 和 y ，两者之间的夹角，就相