



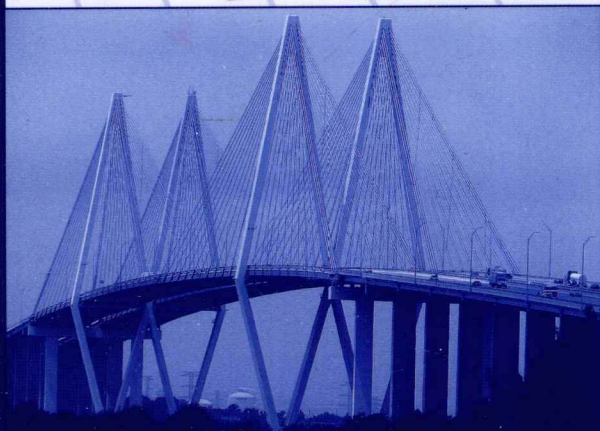
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

结构力学

下册

李廉锴 主编

力学 (第5版)



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

结构力学 (第5版)

JIEGOU

下册

李廉锟 主编



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内 容 提 要

本书(第5版)是普通高等教育“十一五”国家级规划教材,是在第4版的基础上,根据教育部高等学校力学基础课程教学指导分委员会制订的“结构力学课程教学基本要求”和有关国家标准及教学改革发展需要修订而成。本书内容取材适宜,叙述精练,由浅入深,联系实际,符合课程的认知和发展规律。

全书分上下两册,共15章。上册包括绪论、平面体系的机动分析、静定梁与静定刚架、静定拱、静定平面桁架、结构位移计算、力法、位移法、渐近法、矩阵位移法和影响线及其应用等11章及附录平面刚架静力分析程序;下册包括结构动力学、结构弹性稳定、结构的极限荷载和悬索计算等4章。全书各章均附有复习思考题和习题及部分答案;上下册各附有自测题两套供测试参考。

本书可作为高等学校土建、水利、力学等专业的教材,也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构力学. 下册/李廉锟主编. —5版. —北京:
高等教育出版社, 2010.7

ISBN 978-7-04-029199-5

I. ①结… II. ①李… III. ①结构力学—高等
学校—教材 IV. ①O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 097646 号

策划编辑	水 渊	责任编辑	葛 心	封面设计	李卫青
责任绘图	杜晓丹	版式设计	余 杨	责任校对	王 超
责任印制	朱学忠				

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120

购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京鑫海金澳胶印有限公司

网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

开 本 787×960 1/16
印 张 12
字 数 220 000

版 次 1979 年 7 月第 1 版
2010 年 7 月第 5 版
印 次 2010 年 7 月第 1 次印刷
定 价 17.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 29199-00

主要符号表

A	面积, 振幅
$\mathbf{A}$	振幅向量
c	支座广义位移, 阻力系数
C	弯矩传递系数
D	侧移刚度
E	弹性模量
E_p	结构总势能
F	集中荷载
F_{AH}, F_{AV}	A 支座沿水平, 竖直方向的反力
F_{Ax}, F_{Ay}	A 支座沿 x, y 方向的反力
F_{cr}	临界荷载
$\mathbf{F}$	结点荷载向量, 综合结点荷载向量
$\mathbf{F}_D$	直接结点荷载向量
F_D	黏滞阻尼力
$\mathbf{F}_E$	等效结点荷载向量
F_E	欧拉临界荷载, 弹性力
F_H	拱的水平推力, 悬索张力水平分量
F_I	惯性力
F_N	轴力
F_R	支座反力, 力系合力
F_S	剪力
F_T	悬索张力
F_u	极限荷载
F_v	悬索张力竖直分量
$\bar{\mathbf{F}}^e$	局部坐标系下的单元杆端力向量
$\mathbf{F}^e$	整体坐标系下的单元杆端力向量
$\bar{\mathbf{F}}^{Fe}$	局部坐标系下的单元固端力向量
$\mathbf{F}^{Fe}$	整体坐标系下的单元固端力向量
G	切变模量
i	线刚度
I	截面二次矩(惯性矩), 冲量

I	单位矩阵
k	刚度系数
$\bar{k}^e$	局部坐标系下的单元刚度矩阵
k^e	整体坐标系下的单元刚度矩阵
K	结构刚度矩阵
m	质量
M	力矩, 力偶矩, 弯矩
M	质量矩阵
M_u	极限弯矩
M^F	固端弯矩
p	均布荷载集度
q	均布荷载集度
r	单位位移引起的广义反力
R	广义反力
S	劲度系数(转动刚度), 截面静矩, 影响线量值
t	时间
T	周期, 动能
T	坐标转换矩阵
u	水平位移
v	竖向位移
V	外力势能
V_e	应变能
W	平面体系自由度, 功, 弯曲截面系数
X	广义未知力
Z	广义未知位移
α	线(膨)胀系数
Δ	广义位移
Δ	结点位移向量
ν	剪力分配系数
δ	单位力引起的广义位移, 阻尼系数
ξ	阻尼比
θ	干扰力频率
μ	力矩分配系数, 动力因数, 长度因数
σ_b	强度极限
σ_s	屈服应力

σ_u

极限应力

 φ

角位移, 初相角

 Φ

振型矩阵

 ω

角频率

目 录

主要符号表	i
第十二章 结构动力学	1
§ 12-1 概述	1
§ 12-2 结构振动的自由度	2
§ 12-3 单自由度结构的自由振动	4
§ 12-4 单自由度结构在简谐荷载作用下的受迫振动	11
§ 12-5 单自由度结构在任意荷载作用下的受迫振动	18
§ 12-6 多自由度结构的自由振动	21
§ 12-7 多自由度结构在简谐荷载作用下的受迫振动	35
§ 12-8 振型分解法	39
§ 12-9 多自由度结构在任意荷载作用下的受迫振动	45
* § 12-10 地震作用计算	50
* § 12-11 无限自由度结构的振动	56
§ 12-12 计算频率的近似法	62
复习思考题	69
习题	70
答案	74
第十三章 结构弹性稳定	76
§ 13-1 概述	76
§ 13-2 用静力法确定临界荷载	78
§ 13-3 具有弹性支座压杆的稳定	83
§ 13-4 用能量法确定临界荷载	87
§ 13-5 变截面压杆的稳定	96
§ 13-6 剪力对临界荷载的影响	100
§ 13-7 组合压杆的稳定	102
* § 13-8 弹性介质上压杆的稳定	106
* § 13-9 圆环及拱的稳定	109
§ 13-10 窄条梁的稳定	115
* § 13-11 用矩阵位移法计算刚架的稳定	118
复习思考题	125
习题	125

答案	129
第十四章 结构的极限荷载	130
§ 14-1 概述	130
§ 14-2 极限弯矩和塑性铰·破坏机构·静定梁的计算	131
§ 14-3 单跨超静定梁的极限荷载	134
§ 14-4 比例加载时有关极限荷载的几个定理	137
§ 14-5 计算极限荷载的穷举法和试算法	138
§ 14-6 连续梁的极限荷载	140
§ 14-7 刚架的极限荷载	142
* § 14-8 矩阵位移法求刚架极限荷载的概念	144
复习思考题	145
习题	145
答案	147
*第十五章 悬索计算	148
§ 15-1 概述	148
§ 15-2 集中荷载作用下的单根悬索计算	149
§ 15-3 分布荷载作用下的单根悬索计算	151
§ 15-4 悬索的变形协调方程及初态终态问题求解	158
§ 15-5 悬索体系的计算	162
复习思考题	168
习题	168
答案	169
附录 I 下册自测题	170
附录 II 索引	175
参考文献	179
主编简介	180

第十二章 结构动力学

§ 12-1 概述

前面各章讨论的都是结构在静力荷载作用下的计算;现在进一步研究动力荷载对结构的影响。所谓静力荷载是指施力过程缓慢,不致使结构产生显著的加速度,因而可以略去惯性力影响的荷载。在静力荷载作用下,结构处于平衡状态,荷载的大小、方向、作用点及由它引起的结构的内力、位移等各种量值都不随时间而变化。反之,若在荷载作用下将使结构产生不容忽视的加速度,因而必须考虑惯性力的影响时,则为动力荷载。在动力荷载作用下,结构将发生振动,各种量值均随时间而变化,因而其计算与静力荷载作用下有所不同,二者的主要差别就在于是否考虑惯性力的影响。

在工程结构中,除了结构自重及一些永久性荷载外,其他荷载都具有或大或小的动力作用。当荷载变化很慢,其变化周期远大于结构的自振周期时,其动力作用是很小的,这时为了简化计算,可以将它作为静力荷载处理。在工程中作为动力荷载来考虑的是那些变化激烈、动力作用显著的荷载。按动力荷载的变化规律,可分为如下几种:

(1) 周期荷载。这是指随时间按一定规律改变大小的周期性荷载,如按正弦(或余弦)规律改变大小则称为简谐周期荷载,通常也称为振动荷载。例如具有旋转部件的机器在等速运转时其偏心质量产生的离心力对结构的影响就是这种荷载。

(2) 冲击荷载。这是指很快地把全部量值加于结构而作用时间很短即行消失的荷载。例如打桩机的桩锤对桩的冲击、车轮对轨道接头处的撞击等。

(3) 突加荷载。在一瞬间施加于结构上并继续留在结构上的荷载。例如粮食口袋卸落在仓库地板上时就是这种荷载。这种荷载包括对结构的突然加载和突然卸载。

(4) 快速移动的荷载。例如高速通过桥梁的列车、汽车等。

(5) 随机荷载。例如风力的脉动作用、波浪对码头的拍击、地震对建筑物的激振等,这种荷载的变化极不规则,在任一时刻的数值无法预测,其变化规律不能用确定的函数关系来表达,只能用概率的方法寻求其统计规律。

如果结构受到外部因素干扰发生振动,而在以后的振动过程中不再受外部干扰力作用,这种振动就称为自由振动;若在振动过程中还不断受到外部干扰力作用,则称为受迫振动。结构动力计算的最终目的在于确定动力荷载作用下结构的内力、位移等量值随时间而变化的规律,从而找出其最大值以作为设计或检算的依据。因此,研究受迫振动就成为动力计算的一项根本任务。然而,结构在受迫振动时各截面的最大内力和位移都与结构自由振动时的频率和振动形式密切相关,因而寻求自振频率和振型就成为研究受迫振动的前提。所以,本章将首先讨论结构的自由振动,然后讨论结构的受迫振动。

§ 12-2 结构振动的自由度

在动力荷载作用下,结构将发生弹性变形,其上的质点将随结构的变形而振动。结构的动力计算与质点的分布和运动有关。质点在振动过程中任一瞬时的位置,可以用某种独立的参数来表示。例如图 12-1a 所示简支梁在跨中固定着一个重量较大的物体 W ,如果梁本身的自重较小而可略去,并把重物简化为一个集中质点,则得到图 12-1b 所示的计算简图。如果不考虑质点 m 的转动和梁轴的伸缩,则质点 m 的位置只要用一个参数 y 就能确定。我们把结构在弹性变形过程中确定全部质点位置所需的独立参数的数目,称为该结构振动的自由度。据此,图 12-1 所示的梁在振动中将只具有一个自由度。结构振动自由度的数目,在结构动力学中具有很重要的意义。具有一个自由度的结构称为单自由度结构,自由度大于 1 的结构则称为多自由度结构。

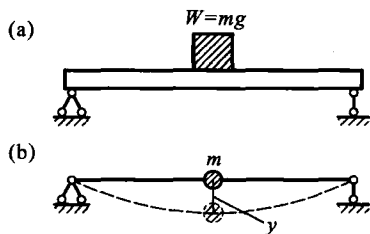


图 12-1

在确定结构振动的自由度时,应注意不能根据结构有几个集中质点就判定它有几个自由度,而应该由确定质点位置所需的独立参数数目来判定。例如图 12-2a 所示结构,在绝对刚性的杆件上附有三个集中质点,它们的位置只需一个参数,即杆件的转角 α 便能确定,故其自由度为 1。又如图 12-2b 所示简支梁上附有三个集中质量,若梁本身的质量可以略去,又不考虑梁的轴向变形和质点的转动,则其自由度为 3,因为尽管梁的变形曲线可以有无限多种形式,但其上三个质点的位置却只需由挠度 y_1 、 y_2 、 y_3 就可确定。又如图 12-2c 所示刚架虽然只有一个集中质点,但其位置需由水平位移 y_1 和竖直位移 y_2 两个独立参数才能确定,因此自由度为 2。

在确定刚架的自由度时,仍引用受弯直杆忽略轴向变形,任意两点间距离保

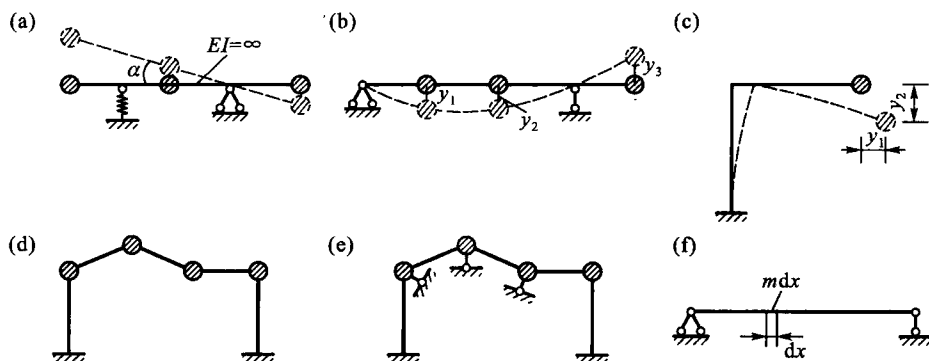


图 12-2

持不变的假定。根据这个假定并加入最少数量的链杆以限制刚架上所有质点的位置,则该刚架的自由度数即等于所加入链杆的数目。例如图 12-2d 所示刚架上虽有四个集中质点,但只需加入三根链杆便可限制其全部质点的位置 (12-2e),故其自由度为 3。由此可见,自由度的数目不完全取决于质点的数目,也与结构是否静定或超静定无关。当然,自由度的数目是随计算要求的精确度不同而有所改变的。如果考虑到质点的转动惯性,则相应地还要增加控制转动的约束,才能确定自由度数。以上是对于具有离散质点的情况而言的。但是,在实际结构中,质量的分布总是比较复杂的,除了有较大的集中质量外,一般还会有连续分布的质量。例如图 12-2f 所示的梁,其分布质量集度为 m ,此时,可看作是无穷多个 mdx 的集中质量,所以它是无限自由度结构。当然,完全按实际结构进行计算,情况会变得很复杂,因此我们常常针对某些具体问题,采用一定的简化措施,把实际结构简化为单个或多个自由度的结构进行计算。例如图 12-3a 所示机器的块式基础,当机器运转时,若只考虑基础的垂直振动,则可用弹簧表示地基的弹性,用一个集中质量代表基础的质量,就可简化为图示集中质量弹簧模型,从而使结构转化为单自由度结构。又如图 12-3b 所示的水塔,顶部水池较重,塔身重量较轻,在略去次要因素后,就可简化为图示的直立悬臂梁

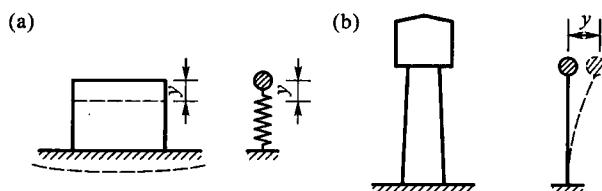


图 12-3

在顶端支承集中质量的单自由度结构。

§ 12-3 单自由度结构的自由振动

研究结构的动力计算,宜从单自由度的简单结构开始,现在先来研究其自由振动。前已指出,所谓自由振动,是指结构在振动进程中不受外部干扰力作用的那种振动。产生自由振动的原因只是由于在初始时刻的干扰。初始的干扰有两种情况,一种是由于结构具有初始位移,另一种则是由于结构具有初始速度,或者这两种干扰同时存在。例如图 12-4 所示在跨中处承受集中质量的简支梁,若把质点 m 拉离其原有的弹性平衡位置,达到图中虚线所示的偏离位置,然后突然放松,则质点将在原有平衡位置附近往复振动。由于在振动进程中不再受到外来干扰,所以这时的振动就是自由振动。这是由于结构具有初始位移而引起自由振动的例子。又如若对图

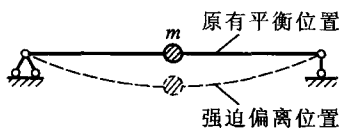


图 12-4

12-4 的质点施加瞬时冲击作用,在极短的时间内使其获得一定的初速度,当它还来不及发生显著的位移时,外力又突然消失,这样引起的结构振动,便是初始速度干扰下产生自由振动的例子。

1. 不考虑阻尼时的自由振动

对于各种单自由度结构的振动状态,都可以用一个简单的质点弹簧模型来描述,如图 12-5a 所示,弹簧下端悬挂一质量为 m 的重物。取此重物的静力平衡位置为计算位移 y 的原点,并规定位移 y 和质点所受的力都以向下为正。设弹簧发生单位位移时所需加的力为 k_{11} ,称为弹簧的刚度系数(简称刚度);而在单位力作用下所产生的位移为 δ_{11} ,称为弹簧的柔度系数(简称柔度),则二者的关系为

$$k_{11} = \frac{1}{\delta_{11}}$$

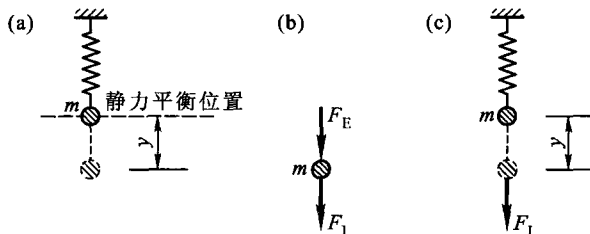


图 12-5

为了寻求结构振动时其位移以及各种量值随时间变化的规律,应先建立其振动微分方程,然后求解。可以根据达朗贝尔原理,采用动静法建立振动微分方程。具体有两种方法:一种是列动力平衡方程,又称刚度法;另一种是列位移方程,又称柔度法。现分别说明如下。

(1) 列动力平衡方程。设质点 m 在振动中的任一时刻位移为 y , 取该质点为隔离体(图 12-5b), 若不考虑质点运动时所受到的阻力, 则作用于其上的外力有:

(a) 弹簧拉力 $F_E = -k_{11}y$ 负号表示其实际方向恒与位移 y 的方向相反, 亦即永远指向静力平衡位置。此力有将质点 m 拉回到静力平衡位置的趋势, 故又称为恢复力。

(b) 惯性力 $F_I = -m\ddot{y}$ 它的方向总是与加速度 $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$ 的方向相反, 故有一负号。

对于弹簧处于静力平衡位置时的初拉力, 恒与质点的重量 mg 相平衡而抵消, 故在振动过程中这两个力都毋须考虑。

质点在惯性力 F_I 与弹簧的恢复力 F_E 作用下将维持动力平衡, 故应有

$$F_I + F_E = 0$$

将 F_I 和 F_E 的算式代入即得

$$-m\ddot{y} - k_{11}y = 0$$

或

$$m\ddot{y} + k_{11}y = 0 \quad (\text{a})$$

命

$$\omega^2 = \frac{k_{11}}{m} \quad (12-1)$$

则有

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (12-2)$$

这就是单自由度结构在自由振动时的微分方程。

(2) 列位移方程。上述振动微分方程也可以按下述方法来建立: 当质点 m 振动时, 把惯性力 $F_I = -m\ddot{y}$ 看作是一个静力荷载作用在体系的质点上, 则在其作用下结构在质点处的位移 y 应等于(图 12-5c):

$$y = F_I \delta_{11} = -m\ddot{y} \delta_{11}$$

即

$$m\ddot{y} + k_{11}y = 0$$

这与上述结果相同。

式(12-2)是一个具有常系数的二阶线性齐次微分方程, 其通解形式为

$$y(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \quad (b)$$

取 y 对时间 t 的一阶导数, 则得质点在任一时刻的速度

$$\dot{y}(t) = -\omega A_1 \sin \omega t + \omega A_2 \cos \omega t \quad (c)$$

此两式中的常数 A_1 和 A_2 可由振动的初始条件来确定。

若当 $t=0$ 时,

$$y = y_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0$$

则有

$$A_1 = y_0, \quad A_2 = \frac{\dot{y}_0}{\omega}$$

因此

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (12-3)$$

式中 y_0 称为初位移, $\dot{y}_0$ 称为初速度。由此可见, 结构的自由振动是由两部分组成, 一部分是由初位移 y_0 引起的, 表现为余弦规律; 另一部分是由初速度 $\dot{y}_0$ 引起的, 表现为正弦规律 (图 12-6a、b)。二者之间的相位差为一直角, 后者落后于前者 90° 。

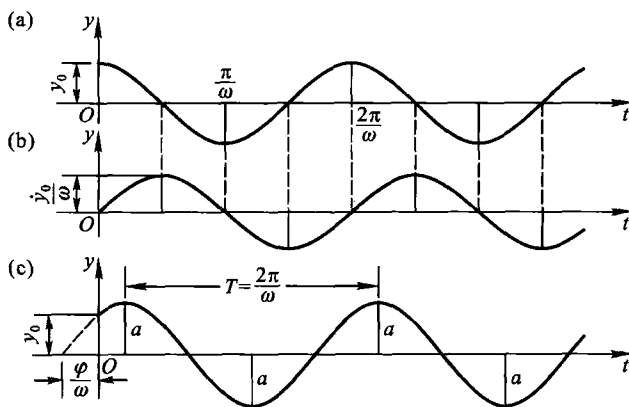


图 12-6

若令

$$y_0 = a \sin \varphi \quad (d)$$

$$\frac{\dot{y}_0}{\omega} = a \cos \varphi \quad (e)$$

显然有

$$a = \sqrt{y_0^2 + \frac{\dot{y}_0^2}{\omega^2}} \quad (12-4)$$

$$\tan \varphi = \frac{y_0}{\dot{y}_0/\omega} \quad (12-5)$$

则式(12-3)可写成

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) \quad (12-6)$$

且有

$$\dot{y} = a\omega \cos(\omega t + \varphi) \quad (12-7)$$

可见这种振动是简谐振动(图 12-6c), 式中 a 表示质点的最大位移, 称为振幅, φ 称为初相角。由于 $\sin \omega t$ 和 $\cos \omega t$ 都是周期性函数, 它们每经历一定时间就出现相同的数值, 若给时间 t 一个增量 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 则位移 y 和速度 $\dot{y}$ 的数值均不变, 故 T 称为周期, 其常用单位为 s ; 周期的倒数 $\frac{1}{T}$ 代表每秒钟内所完成的振动次数, 用 f 表示, 也称为工程频率, 其单位为 s^{-1} , 或 Hz ; 而 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 即为 2π 秒内完成的振动次数, 称为角频率, 通常用 ω 表示, 又简称频率, 其单位为 rad/s , 也常简写为 s^{-1} 。 ω 之值可由式(12-1)确定:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{11}}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{mg\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{st}}} \quad (12-8)$$

式中 g 表示重力加速度, Δ_{st} 表示由于重量 mg 所产生的静力位移。

由此可见, 计算单自由度结构的自振频率时, 只需算出刚度 k_{11} 或柔度 δ_{11} 或位移 Δ_{st} , 代入式(12-8)即可求得。由该式可知, 结构自振频率随刚度 k_{11} 的增大和质量 m 的减小而增大, 这一特点在结构设计中控制结构自振频率有重要意义。因为结构的自振频率只取决于它自身的质量和刚度, 所以它反映着结构固有的动力特性。外部干扰力只能影响振幅和初相角的大小而不能改变结构的自振频率。如果两个结构具有相同的自振频率, 则它们对动力荷载的反应也将是相同的。式(12-8)表明, ω 随 Δ_{st} 的增大而减小, 就是说, 若把质点安放在结构上产生最大位移处, 则可得到最低的自振频率和最大的振动周期。

例 12-1 图 12-7 所示三种支承情况的梁, 其跨度都为 l , 且 EI 都相等, 在中点有一集中质量 m 。当不考虑梁的自重时, 试比较这三者的自振频率。

解: 由式(12-8)可知, 在计算单自由度结构的自振频率时, 可先求出该结构在重量 $F = mg$ 作用下的静力位移。根据以前学过的位移计算的方法, 可求出这三种情况相应的静力位移分别为

$$\Delta_1 = \frac{Fl^3}{48EI}, \quad \Delta_2 = \frac{7Fl^3}{768EI}, \quad \Delta_3 = \frac{Fl^3}{192EI}$$

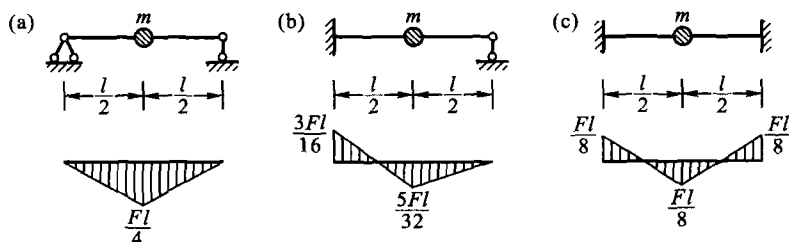


图 12-7

代入式(12-8)即可求得三种情况的自振频率分别为

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{48EI}{ml^3}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{768EI}{7ml^3}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{192EI}{ml^3}}$$

据此可得

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 1 : 1.51 : 2$$

此例说明随着结构刚度的加大,其自振频率也相应地增高。

2. 考虑阻尼作用时的自由振动

事实上,物体的自由振动由于各种阻力的作用将逐渐衰减下去而不能无限延续。阻力可分为两种:一种是外部介质的阻力,例如空气和液体的阻力、支承的摩擦等;另一种则来源于物体内部的作用,例如材料分子之间的摩擦和黏着性等。这些力统称为阻尼力。由于内外阻尼的规律不同,且与各种建筑材料的性质有关,因而确切估计阻尼的作用是一个很复杂的问题。对此,人们提出过许多不同的建议,为使计算较简单,通常是引用福格第假定,即近似认为振动中物体所受的阻尼力与其振动速度成正比,这称为黏滞阻尼力,即

$$F_D = -c\dot{y} \quad (f)$$

式中 c 称为阻力系数,负号表示阻尼力 F_D 的方向恒与速度 $\dot{y}$ 的方向相反。

当考虑阻尼力时,质点 m 上所受的力将如图 12-8 所示,考虑其动力平衡,应有

$$F_I + F_D + F_E = 0$$

即

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + k_{11}y = 0 \quad (g)$$

仍令

$$\omega^2 = \frac{k_{11}}{m}$$

并令

$$2\delta = \frac{c}{m} \quad (h)$$

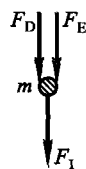


图 12-8

则有

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (12-9)$$

这是一个二阶线性常系数齐次微分方程, 设其解的形式为

$$y = Ce^{rt}$$

代入原微分方程(12-9), 可得确定 r 的特征方程

$$r^2 + 2\delta r + \omega^2 = 0$$

其两个根为

$$r_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$$

根据阻尼大小的不同有以下三种情况:

(1) $\delta < \omega$ 即欠阻尼情况 此时特征根 r_1, r_2 是两个复数, 式(12-9)的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\delta t} (B_1 \cos \sqrt{\omega^2 - \delta^2} t + B_2 \sin \sqrt{\omega^2 - \delta^2} t) \\ &= e^{-\delta t} (B_1 \cos \omega' t + B_2 \sin \omega' t) \end{aligned} \quad (i)$$

其中

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \delta^2} \quad (12-10)$$

称为有阻尼自振频率。常数 B_1, B_2 可由初始条件确定: 将 $t=0$ 时 $y=y_0$ 和 $\dot{y}=\dot{y}_0$ 代入式(i)可得

$$B_1 = y_0, \quad B_2 = \frac{\dot{y}_0 + \delta y_0}{\omega'}$$

故

$$y = e^{-\delta t} \left(y_0 \cos \omega' t + \frac{\dot{y}_0 + \delta y_0}{\omega'} \sin \omega' t \right) \quad (12-11)$$

上式也可写为

$$y = A e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \varphi') \quad (12-12)$$

其中

$$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0 + \delta y_0}{\omega'} \right)^2} \quad (12-13)$$

$$\tan \varphi' = \frac{\omega' y_0}{\dot{y}_0 + \delta y_0} \quad (12-14)$$

式(12-12)的位移-时间曲线如图 12-9 所示, 即为衰减的正弦曲线, 其振幅按 $e^{-\delta t}$ 的规律减小, 故 δ 称为阻尼系数。

在工程中还经常采用阻尼比

$$\xi = \frac{\delta}{\omega} \quad (j)$$