

 百科知识

现代数学

袖珍百科全书

XIUZHEN BAIKE QUANSHU

石门 冯洋 田晓菲 / 主编

远方出版社



现代数学

主编：石门 冯洋 田晓菲

远方出版社

责任编辑:戈 弋

封面设计:木 子

百科知识——袖珍百科全书
现代数学

主 编 石门 冯洋 田晓菲
出 版 远方出版社
社 址 呼和浩特市乌兰察布东路 666 号
邮 编 010010
发 行 新华书店
印 刷 北京朝教印刷厂
版 次 2005 年 1 月第 1 版
印 次 2005 年 1 月第 1 次印刷
开 本 850×1168 1/32
印 张 690
字 数 4980 千
印 数 1—5000 册
标准书号 ISBN 7—80723—007—X/G·4
本册定价 18.40 元

远方版图书,版权所有,侵权必究。
远方版图书,印装错误请与印刷厂退换。

前 言

进入二十一世纪,世界在飞速发展,新科学、新技术、新经济……新知识层出不穷,好像用日新月异不能表述世界的发展。纳米技术、克隆技术……新名词、新技术让人感到目不暇接。飞速发展的世界在不断激发人们的学习兴趣,带动人们的求知欲望,培养人们的求知精神,人们越来越感知到知识的重要性和学习的重要性了。汲取新知识、新变化,人们一般有三种途径:报纸、电视和图书,但报纸、电视上的知识由于变化快、更新快,使人们不易掌握,而图书有着知识容量大、内容全、易于保存、便于查阅的特点,越来越受到人们的欢迎。

《袖珍百科全书》内容上涵盖了哲学、社会科学、政治、法律、经济、军事、中外文学艺术、中外历史发展、生命科学、生物工程、工农业技术等数百种科学门类,收录辞条达二十余万条。无论是苏格拉底、佛罗伊德、尼采……还是李白、杜甫、贾平凹,无论是鸦片战争、二次大战……还是纳米技术、克隆技术,古代

的、近代的、现代的、中国的、外国的全部囊括其中，全面反映了当今世界最新的科研文化成果。

该书在编写体例上采用新解释——针对国际国内形势变化很大，对大量政治、经济、科技等条目，作了新的解释；新规范——根据法律、行政、科技等方面近几年出现的新的规范行文；新数据——经济产值等各种数据指标均按照新资料予以更新；新体例——辞条编排按国家图书馆分类进行编排，与以往同类书籍相比，《袖珍百科全书》有如下四个特点：一、内容全、新：洋洋十六卷，涵盖了当今世界最新科研文化艺术成就；二、分类新：中国第一部按国家图书馆分类编制的全新百科全书；三、阅读查阅方便：按辞条形式编写，易查易读，国际大 32 开版本，携带更为方便；四、实用性强：编写内容贴近日常生活，是人们生活、工作中的好帮手。

总而言之，《袖珍百科全书》可称得上是中国第一部内容全，知识新，面向大众，面向未来的百科全书；中国第一部人人买得起，看得懂，对人们日常工作、生活、学习有较强指导作用的百科全书。可以说，有了一部《袖珍百科全书》就有了一套最完备的家庭图书馆。

——编者

目 录

现

集合论.....	(1)	代
【关系】.....	(1)	
【序数】.....	(2)	数
【映射】.....	(3)	
【悖论】.....	(3)	学
【基数】.....	(4)	
【超限归纳法】.....	(5)	
【集合】.....	(6)	
【集合论】.....	(7)	
组合数学.....	(9)	
【四色猜想】.....	(9)	
【网络流】.....	(9)	
【图论】.....	(10)	
【组合数学】.....	(10)	
【树】.....	(14)	



袖珍百科全书

现 代 数 学	数和多项式	(18)
	【一元多项式】	(18)
	【四元数】	(22)
	【多元多项式】	(23)
	【进位制与换算】	(26)
	【数系】	(26)
	【数环与数域】	(29)
	数论	(30)
	【几个著名猜想】	(30)
	【不定方程】	(33)
	【代数数论】	(35)
	【同余式】	(36)
	【初等数论】	(40)
	【特殊类型的数】	(44)
	【数论】	(46)
	【数论函数】	(47)
	【概率数论】	(48)
	【解析数论】	(49)
	线性代数	(50)
	【二次型(二次齐式)】	(50)
	【向量空间】	(51)
	【多重线性代数】	(53)
	【行列式】	(55)



袖珍百科全书

【欧氏空间】	(56)
【线性方程组】	(58)
【线性代数】	(60)
【线性变换】	(60)
【矩阵】	(62)
抽象代数	(67)
【(结合)代数及其表示】	(67)
【伽罗瓦理论】	(69)
【抽象代数】	(72)
【环与代数】	(74)
【域论】	(78)
【群论】	(81)
现代代数	(89)
【代数几何】	(89)
【交换代数】	(91)
【同调代数】	(93)
【李群和李代数】	(95)
【范畴论】	(97)
【格】	(98)
【模】	(102)
微积分学	(106)
【微积分学】	(106)
极限理论	(107)

现
代
数
学



袖珍百科全书

现代数学

【 R^n 空间】	(107)
【三角函数】	(107)
【上极限和下极限】	(108)
【内点】	(109)
【双曲函数】	(109)
【反三角函数】	(109)
【外点】	(110)
【对数函数】	(110)
【边界点】	(110)
【序】	(111)
【极限点(零点)】	(113)
【连续统】	(113)
【邻域】	(114)
【函数】	(114)
【函数的极限】	(115)
【函数的连续性】	(117)
【孤立点】	(119)
【复合函数】	(119)
【指数函数】	(119)
【基本初等函数及其图像】	(120)
【隐函数】	(120)
微分学	(120)
【二元函数的极限】	(120)



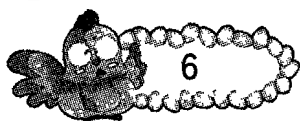
袖珍百科全书

【全微分】	(123)
【雅可比矩阵】	(124)
【微分中值定理】	(126)
【微分学】	(129)
【二重积分】	(133)
【三重积分】	(135)
【场论】	(136)
【曲面积分】	(137)
【定积分的近似计算】	(139)
【格林公式】	(143)
【积分学】	(143)
【高斯公式】	(146)
【第一型曲线积分】	(146)
【第二型曲线积分】	(147)
【斯托克斯公式】	(147)
【微积分的几何应用】	(148)
级数与傅里叶分析	(150)
【任意项级数】	(150)
【级数】	(151)
【函数级数】	(153)
【傅里叶分析】	(154)
【傅里叶积分】	(158)
【幂级数】	(159)



袖珍百科全书

现 代 数 学	微分方程论.....	(161)
	【微分方程】.....	(161)
	常微分方程.....	(161)
	【用待定指数函数法求解常系数线性方程组】.....	(161)
	【动力系统】.....	(163)
	【初值问题的推广】.....	(164)
	【线性方程组】.....	(164)
	【非标准分析】.....	(166)
	【流形上的微积分】.....	(167)
	【特征值问题】.....	(173)
	【高阶线性方程】.....	(174)
	【常系数线性方程与方程组】.....	(176)
	【常微分方程】.....	(178)
	【常微分方程边值问题】.....	(179)
	【常微分方程初值问题】.....	(181)
	【常微分方程定性理论】.....	(183)
	【常微分方程的幂级数解法】.....	(185)
	【常微分方程的稳定性理论】.....	(188)
	【第一比较定理】.....	(190)
	【解对初值和参数的可微性】.....	(191)
【解对初值和参数的连续相依性】.....	(191)	
偏微分方程.....	(192)	
【一阶偏微分方程】.....	(192)	



袖珍百科全书

【二阶线性偏微分方程】	(194)
【拉普拉斯方程】	(195)
【波动方程】	(197)
【热传导方法】	(199)
【偏微分方程】	(200)
【数学物理方程】	(202)
积分方程	(203)
【积分方程】	(203)
函数论	(206)
【 \mathbb{R} 中开集的构造】	(206)
【 \mathbb{R}^n 的基本拓扑性质】	(206)
【有界变差函数】	(207)
【实变函数论】	(209)
【积分号下的极限运算】	(210)
【勒贝格测度】	(211)
【勒贝格积分】	(213)
【康托尔三分集】	(216)
【维他利覆盖】	(217)
【斯蒂尔吉斯积分】	(217)
【集合的势】	(219)
【稠密与疏朗】	(220)
复变函数论	(221)
【共形映照】	(221)



袖珍百科全书

现 代 数 学	【多复变函数】.....	(224)
	【复变函数论】.....	(226)
	【解析开拓】.....	(227)
	【解析函数】.....	(228)
	泛函分析.....	(233)
	【希尔伯特空间】.....	(233)
	【泛函分析】.....	(234)
	【拓扑向量量子空间】.....	(234)
	【拓扑向量空间】.....	(235)
	【线性算子】.....	(235)
	【变分法】.....	(239)
	【距离向量空间(度量线性空间)】.....	(241)
	【赋范向量空间】.....	(241)
【赋准范向量空间】.....	(242)	
【算子的正则值与谱】.....	(242)	



集合论

现代

数学

【关系】

数学的基本概念。由有序对 $\langle x, y \rangle$ 组成的非空集合 $R \subseteq A \times B$, 称为 A 与 B 之间的二元关系。如果 $\langle x, y \rangle \in R$ 称 x 与 y 有关系 R , 记作 xRy , R 中有序对的第一坐标组成的集合称为 R 的定义域。第二坐标组成的集合称为 R 的值域, 如果 $A = B$, 则 R 是 A 上的二元关系, 一般地, 如果 $R \subseteq A^n$, 则称 R 是 A 上的 n 元关系。

A 上二元关系 R 满足: $Ax \in A, xRx$ 称 R 具有自反性, R 满足 $xRy, yRz \Rightarrow xRz$, 称 R 具有传递性。 R 满足 $xRy \Rightarrow yRx$, 称 R 具有对称性, 如果 R 满足 $xRy, yRx \Rightarrow x = y$ 则称 R 满足反对称性。如果 A 上的二元关系 R 满足自反性、对称性、传递性, 则称 R 是 A 上的等价关系。如果 A 上的二元关系 R 满足自反性、反对称性、传递性则称 R 是 A 上的偏序关系, 偏序关系 R 通常记作 \leq 。集合 A 连同偏序关系 \leq 称为偏序集, 记作 (A, \leq) , 如果偏序关系 \leq 还满足 $Ax, y \in A, x \leq y$ 或 $y \leq x$, 则



称 \leq 是 A 上的线序, (A, \leq) 称为线序集, 如果对线序集 (A, \leq) 的每个非空子集 B 都存在 $x_0 \in B$ 满足 $Ax \in B, x_0 \leq x$, 则称 \leq 是 A 上的良序, (A, \leq) 称为良序集。

【序数】

集合论的基本概念。是日常使用的第一、第二等表示次序的数的推广。如果两个偏序集 (A, \leq) 和 (B, \leq) 是序同构的, 记作 $(A, \leq) \cong (B, \leq)$, 其中 \cong 是一个等价关系。在所有偏序集中可以按这个等价关系进行分类, 每个等价类称为序型。序数原来定义为良序集的序型, 即与良序集 (A, \leq) 序同构的所有良序集组成的类。但是在 ZFC 系统中无法证明序型是一个集合, 因此原来的定义必须修改。1923 年, 冯·诺伊曼给出序数的一个新定义。如果线序集 (α, \in) 满足 $Ax \in \alpha, Ay \in x \Rightarrow y \in \alpha$, 则称 (α, \in) 是传递集。如果 (α, \in) 是传递的良序集, 则称 α 是序数, 可以证明每个良序集都有唯一的序数与之序同构, 因此每个序数可以看作良序集的序型的代表元。

在 ZFC 系统中, 自然数 0 定义为 \emptyset , 1 定义为 $0 \cup \{0\}$, $n+1$ 定义为 $n \cup \{n\}$, ... 所有自然数的集合 $\omega = \{0, 1, \dots\}$ 也是序数。序数有三种, 第一种是 0; 第二种是某一序数 α 的后继 $\alpha^1 = \alpha \cup \{\alpha\}$, 称为后继序数; 其他序数属于第三种, 称为极限序数。 ω 就是第一个极限序数, $\omega+1 = \omega \cup \{\omega\}$ 是 ω 的后继序数。



【映射】

数学的基本概念。设 A 和 B 是两个非空集合，如果按照某一法则将 A 中任一元素与 B 中唯一元素相对应，就称该法则为从 A 到 B 的映射，记作 $f: A \rightarrow B$ ， A 称为 f 的定义域，记作 $dom(f)$ ， A 中元素 x 所对应的 B 中唯一元素 y 称为 x 在 f 下的象，记作 $f(x)$ ， $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ 是 B 的子集，称为 f 的值域，记作 $ran(f)$ 。两个映射 f 和 g 只有当它们有相同的定义域，并且对任意 $x \in A$ 有 $f(x) = g(x)$ 时才称为相等。当 $ran(f) = B$ 时称 f 是 A 到 B 上的映射，也称满射。如果 f 将 A 中不同元素映到 B 中不同的象，则称 f 是单射。如果 f 既是满射又是单射，则称 f 是双射，也称一一映射。对于双射 $f: A \rightarrow B$ ，使 $f(x)$ 对应于 x 的映射称为 f 的逆映射，记作 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 。显然有 $(f^{-1})^{-1} = f$ ，对于映射 $f: A \rightarrow B$ ， $g: B \rightarrow C$ ，由 $h(x) = g(f(x))$ 所确定的映射 $h: A \rightarrow C$ 称为 f 与 g 的复合映射，记作 $h = g \circ f$ 。复合映射满足结合律，即 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ 。

当 $x \in A$ 时所有有序对 $\{\langle x, f(x) \rangle; x \in A\}$ 组成的直积 $A \times B$ 的子集称为 f 的图像。这个子集可以看作是 A 与 B 之间的关系，每个映射是一特殊的关系。

【悖论】

自相矛盾的命题，即如果承认这个命题，就可以用逻辑推



袖珍百科全书

理的方法推出它的否定。反之,如果承认它的否命题,又可以推出这个命题。在集合论中著名的悖论有罗素悖论、康托尔悖论和布拉里 - 福尔蒂悖论。

罗素悖论:设 S 为一切不属于自身的集合所组成的集合,问 S 是否属于 S ,如果 S 属于 S ,则 S 是 S 的元素,因此由 S 的定义,可知 S 不属于 S ,反之若 S 不属于 S ,则 S 是不属于自身的集合,由 S 的定义可知 S 属于 S ,无论如何都将导致矛盾,为了解释罗素悖论,他又给出了一个通俗的例子,即理发师悖论。据说在一个小岛上只有一个理发师,他声称只给那些不为自己理发的人理发,但是不给那些为自己理发的人理发,于是有人问他,是否给自己理发?按照他的声明,如果他给自己理发,他就不能为自己理发,如果他不给自己理发,那么他就应该给自己理发,这位理发师陷入了逻辑的窘境中。

【基数】

又称势。集合论的基本概念。是日常用以表示多少的数的概念的推广和发展。如果集合 A 与 B 的元素之间存在一一对应的关系,则称 A 与 B 等势,或称 A 与 B 有相同的基数,记作 $A \sim B$ 。集合 A 的基数原来定义为 $\bar{A} = \{B \mid B \sim A\}$,即一切与 A 等势的集合的类,但是在 ZFC 系统中无法证明 \bar{A} 是集合。1928 年冯·诺伊曼给出了新的定义,根据选择公理,每个集合 A 都可以良序化,因此有一个序数 α 使得 $A \sim \alpha$,冯·诺

