高校核心课程学习指导丛书

数学物理方法
习题全解

SHUXUE WULI FANGFA
XITI QUANJIE

柯导明／主编

中国科学技术大学出版社

高校核心课程学习指导丛书

数学物理方法习题全解

SHUXUE WULI FANGFA XITI QUANJIE

主　编　柯导明
副主编　孟　坚　陈军宁
参　编　薛　峰　吴秀龙　徐太龙

中国科学技术大学出版社

前　言

科学技术的发展对大学生数学能力的广度和深度都提出了更高的要求，例如，电子产品的微型化，使得我们要了解器件和电路的性能就要解二维甚至三维的偏微分方程；为了了解电路的频率特性，就需要更进一步地熟悉广义函数的特性．因此，大学生掌握和应用数学的能力日显重要．但是与此同时，由于学生的就业压力增大，导致专业课程科目增加，数学课时普遍被压缩，现在数理方法（工程数学）课时普遍被压缩在一学期以内，学生花在数理方法上的时间大幅度减少．而数理方法是以高等数学为基础，与专业课和科研紧密结合的课程，概念多、理解困难、运算繁杂，若没有一定量的习题辅助，难以掌握，更难以将它应用到今后的专业课和工作中去．本书作者都是专业课的教师，因科研工作的需要长期与数理方法打交道，故而兼教电子、信息类本科生和研究生的数理方法课程．本书稿曾在 2008 年以讲义的形式提供给校内学生使用，这次对原讲义进行整理、修订后出版，希望对广大学生和有关科研工作者有所帮助．

我们在书中对数理方法的传统内容根据现代科学技术的发展做了一些删减．这门课的传统内容包含复变函数、积分变换和数理方程三大板块．对于电子、信息类工科学生和应用物理类专业学生来说，这部分内容实际上就是工程数学．无论是数理方法还是工程数学，传统上都是重视复变函数而轻积分变换和数理方程的．但是科学技术、现代教育以及计算科学的发展使得本课程内容在实践中有了一些较大的变化．计算数学和计算机技术的发展导致了数值计算的范围急剧扩大，所以有些传统内容已经淡化，而有些内容却急剧增加．例如，现在大部分电磁场和电磁波教科书中已不再有保角变换内容，而偏微分方程的内容已广泛地用于电子器件的特性分析和计算电磁学中，信号与系统课程更是大量使用广义函数和积分变换等内容．基于上述变化，书中对传统内容进行了调整：减少了复变函数的内容，增加了积分变换和数理方程的内容．特别对各种常见数理方程的解法做了详细系统的介绍，既有经典的解法，也有现代的方法．本书的复变函数包括了复数与复变函数；复变函数的导数与积分；泰勒级数、罗朗级数和留数三部分内容，删除了保角变换．这三部分重点放在单值函数的导数、积分、级数、留数上，但也介绍了一些多值函数的基本概念．积分变换板块不但包含了传统的傅里叶变换和拉普拉斯变换，而且引进了很多广义函数内容，习题不再仅仅局限于求解偏微分方程的需要，而是紧密结合电子信息类学生今后发展和专业课的需求，增加了大量的与频谱等方面有关的习题．数理方程内容是

本书的重点，包括了直角坐标系、柱面坐标系、球面坐标系的偏微分方程解法，有分离变量法、特征线法、高维波动方程解法、积分变换法、冲量法、格林函数法、偏微分方程的分类以及特殊函数的习题. 针对学生今后专业课和科研的要求，将变系数二阶常微分方程和正交函数系方面的内容单立一章，并给出了适量的习题，以便打好学生的理论基础，提高计算能力.

由于本课程概念与计算方法多，学生在学完课程后往往难以将学过的东西总结完整，故此我们将本书分成了两部分：纲要与习题；习题全解. 在纲要里，我们尽可能简明扼要地列出该章的主要内容、知识点和解题要用到的公式，使其既能成为学生解题时的手册，又能成为学生学完该章时的内容小结，学完本课程后将纲要完整地阅读一遍，又成为数理方法的提纲. 全书共有 500 多道习题，书中的习题选择一般是按照纲要所列知识点的次序，从易到难，内容连续，基本上覆盖了所列的知识点. 为了便于学生和教师选择习题，我们在用相同的知识点内容可以解出的题目前面单独列出了标题，加 * 的题目难度较大，供学有余力的读者选用. 由于学生在上课时会同时听到教师对习题解法的介绍，也由于习题指导类的书籍较多，所以本书不再给出典型例题分析或习题指导等，而直接在习题解答中详尽地解答每一题，读者将自己所做的题目与解答对比后可以很方便地找到问题所在. 书中的选题尽量照顾了不同类型读者的需要，使它能适合更多读者使用. 但是由于编者的教学对象是工科专业的本科生，所以基本内容与现有的工程数学以及应用物理类数理方法教材的内容相符，故也可供学习工程数学的学生使用.

本书由柯导明任主编并统稿；孟坚副教授、陈军宁教授任副主编. 孟坚编写习题 1 至习题 4 的解答，研究生薛峰（现在安徽三联学院）编写习题 6 的解答，其余内容由柯导明、陈军宁、吴秀龙副教授、徐太龙老师编写. 黄志祥教授阅读了本书大纲和解答的前 6 章，并提出了宝贵的意见. 在讲义使用期间代月花教授对部分习题解答提出了很好的建议. 研究生周茂秀、熊三星、刘杰、彭春雨、占萌萌打印了本书的初稿，研究生赵阳、郑智雄、韦巍校对了本书的初稿.

中国科学技术大学出版社为本书的出版做了大量工作，对此深表感谢.

本书由安徽大学“211 工程”基金和安徽省科技计划项目“基于栅工程的射频功率 LDMOS 的设计与研究”提供资助.

由于编者水平所限，不妥之处敬请广大读者指出.

柯导明

2011 年 1 月于合肥

目　　录

第 2 部分　习题全解

第 1 部分　纲要与习题

第 1 章　复数与复变函数

1.1　复数及其运算

1. 复数的定义及概念

虚数单位是 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$. $z=x+\mathrm{j}y$ 称为复数,称 $\bar{z}=x-\mathrm{j}y$ 为 z 的共轭复数.常用算符有 Re 和 Im,它们的意义分别是 $x=\operatorname{Re} z, y=\operatorname{Im} z$.

2. 复数的模与辐角

复数 z 的几何意义如图 1.1 所示,z 的模 $|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$. $z\neq 0$ 时,z 的主辐角记为 $\arg z$,取值范围是 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$,其值是

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0, y\text{ 为任意实数},\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0, y>0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0, y\geqslant 0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0, y<0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0, y<0.\end{cases}\tag{1.1}$$

辐角通常用 Arg z 表示，值是

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{1.2}$$

注意：$z = 0$ 的辐角不确定；复数不能比较大小.

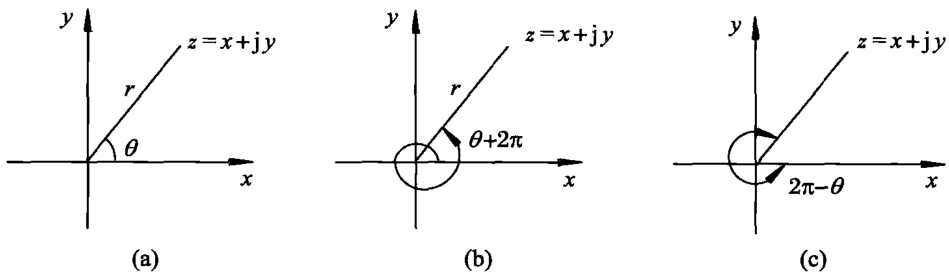

图 1.1 复数的几何意义

3. 复数 z 的表达式与运算规则

z 有代数表达式、三角表达式、指数表达式和极坐标表达式4种，其表达形式与运算规则如表 1.1 所示，复数 z 的四则运算符合交换律、结合律. 这里要注意的有两点：

(1) 欧拉公式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta;$$

(2) $z_1 = z_2$ 的条件

$$|z_1| = |z_2|, \quad \arg z_1 = \arg z_2 + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

4. 扩充复平面与复球面

设有一个假想点$\frac{1}{0} = \infty$，复平面加上假想点构成扩充复平面. 扩充复平面在复球面上投影如图 1.2 所示，无穷远点是北极记为 N，即扩充复平面的几何模型是复球面. 当 a 为有限复数时，$\frac{\infty}{a} = \infty$，$\frac{a}{\infty} = 0$；$\infty$ 的实部、虚部及辐角无意义，$|\infty| = +\infty$；$\infty \pm \infty$，$0 \cdot \infty$，$\frac{\infty}{\infty}$，$\frac{0}{0}$ 无意义.

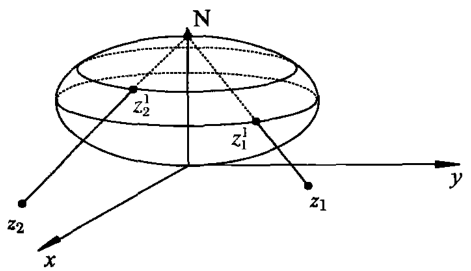

图 1.2 扩充复平面与复球面的关系

表 1.1　复数表达式及运算规则

代数式及运算规则	三角式及运算规则	指数式及运算规则	极坐标式及运算规则
$z = x + \mathrm{j}y$	$z = r(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$	$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$	$z = r\angle\theta$
$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{j}(y_1 + y_2)$	$z_1 + z_2 = (r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2) + \mathrm{j}(r_1\sin\theta_1 + r_2\sin\theta_2)$	$z_1 + z_2 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1} + r_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}$	$z_1 + z_2 = r_1\angle\theta_1 + r_2\angle\theta_2$
$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{j}(x_1y_2 + x_2y_1)$	$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{j}\sin(\theta_1 + \theta_2)]$	$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1+\theta_2)}$	$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2\angle(\theta_1 + \theta_2)$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{j}y_1}{x_2 + \mathrm{j}y_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + \mathrm{j}(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ $(z_2 \neq 0)$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{j}\sin(\theta_1 - \theta_2)]$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1-\theta_2)}$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle(\theta_1 - \theta_2)$
z^n	$z^n = [r(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)]^n = r^n[\cos n\theta + \mathrm{j}\sin n\theta]$	$z^n = (r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\theta}$	$z^n = r^n\angle n\theta$
$z^{\frac{1}{n}}$	$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{1}{n}(2k\pi + \arg z)\right) + \mathrm{j}\sin\left(\frac{1}{n}(2k\pi + \arg z)\right)\right]$ $[k = 0,1,2,\cdots,(n-1)]$	$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{n}[2k\pi+\arg z]}$ $[k = 0,1,2,\cdots,(n-1)]$	$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\angle\frac{1}{n}(2k\pi + \arg z)$ $[k = 0,1,2,\cdots,(n-1)]$

1.2 复变函数的极限以及连续性

1. 复变函数的两个等价定义

定义 1 对于复平面点集 G 中的任一点 $z = x + \mathrm{j}y$，有一个或多个 w 与之对应，则有

$$w = f(z) = u(x,y) + \mathrm{j}v(x,y). \tag{1.3}$$

定义 2 z 平面上点集与 w 平面上点集之间的映射（或变换）称作复变函数

$$w = u + \mathrm{j}v = f(z). \tag{1.4}$$

2. 复变函数的极限

若 $w = f(z)$ 在 z_0 的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \rho$ 内有定义，对于任给的 $\varepsilon > 0$，总存在一个正数 δ，使得对于满足 $0 < |z - z_0| < \delta (0 < \delta \leqslant \rho)$ 的一切 z 总有复常数 $A = u_0 + \mathrm{j}v_0$，且 $|f(z) - A| < \varepsilon$，称 A 为 $f(z)$ 在 z 趋近 z_0 时的极限，记作

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \quad 或 \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} [u(x,y) + \mathrm{j}v(x,y)] = u_0 + \mathrm{j}v_0.$$

极限运算法则：设 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$，$\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = B$，则有

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B, \quad \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot g(z) = A \cdot B, \quad \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

若有含 ∞ 的极限，$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ 等价于 $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$；$\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$ 等价于 $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1}{f(1/t)} = 0$；$\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = a$ 等价于 $\lim\limits_{t \to 0} f\left(\dfrac{1}{t}\right) = a$.

3. 连续复变函数

若 $f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 成立，则说 $f(z)$ 在 z_0 点连续. 若 $f(z)$ 在 D 内每一点都连续，则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

连续函数在 z_0 成立的充要条件是若 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{j}v(x,y)$，则 $u(x;y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续.

1.3　复变函数的幂级数

1. 收敛的定义及性质

若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 部分和的极限存在，称级数是收敛的，否则发散.

级数收敛的必要条件：一般项 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n(z-z_0)^n = 0$.

绝对收敛级数：$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n(z-z_0)^n|$ 收敛，称$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 绝对收敛，绝对收敛级数一定是收敛级数.

收敛级数性质：$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) + \mathrm{j}\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n(x,y)$，若$\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x,y)$ 和$\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n(x,y)$ 收敛，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 一定收敛.

2. 收敛半径

对于每一个收敛的幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 都有一个收敛半径R $(0\leqslant R<\infty)$. 当$|z-z_0|\leqslant r$ $(r<R)$ 时级数一致收敛，当$|z-z_0|<R$ 时级数绝对收敛；而$|z-z_0|>R$ 时 z 在收敛圆外，级数发散；在$|z-z_0|=R$ 上级数敛散性不定.

收敛半径求法：

(1) 达朗贝尔判定法：$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$；

(2) 柯西判定法：$R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$.

3. 运算法则

若两个级数有公共收敛圆，这两个级数可以在收敛圆内加、减、乘，并且可以逐项积分和求导.

1.4 初等函数

1. 初等单值函数

最简单的初等函数是整幂函数 z^n（n 为正整数）以及由整幂函数组成的多项式 $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$，$P_n(z)$ 在复平面上连续.

设 $P_n(z)$ 和 $Q_n(z)$ 为复多项式，无公共零点，则有有理分式函数 $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$. $Q_n = 0$ 的点称为奇点，除奇点外有理分式函数在复平面上连续.

复杂一些的初等单值函数有指数函数、三角函数和双曲函数，定义与性质如表 1.2 所示.

表 1.2 指数函数、三角函数和双曲函数性质

名称	指数函数	三角函数	双曲函数
定义	$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$	$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$； $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$	$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$； $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$
与指数函数关系	/	$\sin z = \frac{1}{2j}(e^{jz} - e^{-jz})$； $\cos z = \frac{1}{2}(e^{jz} + e^{-jz})$	$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$； $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$
周期 $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$	$2k\pi j$	$2k\pi$	$2k\pi j$
奇偶性质	/	$\sin(-z) = -\sin z$； $\cos(-z) = \cos z$	$\sinh(-z) = -\sinh z$； $\cosh(-z) = \cosh z$
极限与模	$\lim\limits_{z \to \infty} e^z$ 不存在	$\|\sin z\|$ 和 $\|\cos z\|$ 均为无界函数	$\|\sinh z\|$ 和 $\|\cosh z\|$ 均为无界函数
与实变函数的相似性质	运算规则与实变函数相似： $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$； $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$	实变函数的三角恒等式对复变量三角恒等式都成立，如： $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$； $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$	实变函数的双曲函数恒等式对复变量的双曲函数都成立，如： $\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$； $\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$
函数之间的关系	$e^{jz} = \cos z + j\sin z$	$\tan jz = j\tanh z$； $\cot jz = -j\coth z$	$\cos jz = \cosh z$； $\sin jz = j\sinh z$

2. 初等多值函数

初等多值函数有对数函数、幂函数、反三角函数和反双曲函数，其性质如表 1.3 所示.

表 1.3　初等多值函数性质

名称	对数函数	幂函数	反三角函数	反双曲函数
定义	$w = \mathrm{Ln} z$ (e^w 的反函数)	z^α	$\mathrm{Arcsin}\, z$; $\mathrm{Arccos}\, z$; $\mathrm{Arctan}\, z$; $\mathrm{Arccot}\, z$	$\mathrm{Arsinh}\, z$; $\mathrm{Arcosh}\, z$; $\mathrm{Artanh}\, z$; $\mathrm{Arcoth}\, z$
计算公式(k 为整数)	$\mathrm{Ln} z = \ln\|z\| + \mathrm{j}\mathrm{Arg}\, z$ $= \ln\|z\| + \mathrm{j}(\arg z + 2k\pi)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$	$z^\alpha = e^{\alpha \mathrm{Ln} z} =$ $\|z\|^\alpha \exp[\mathrm{j}\alpha(2k\pi + \arg z)]$ (1) α 为整数，单值函数； (2) $\alpha = \frac{1}{n} (n = 1,2,\cdots)$ 为 n 值函数； (3) $\alpha = \frac{p}{q}$ (p,q 互质，$q > 0$) 为 q 值函数； (4) α 为无理数、复数时是无穷多值函数	$\mathrm{Arcsin}\, z =$ $-\mathrm{j}\mathrm{Ln}(\mathrm{j}z + \sqrt{1 - z^2})$; $\mathrm{Arccos}\, z =$ $-\mathrm{j}\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$; $\mathrm{Arctan}\, z =$ $\frac{1}{2}\mathrm{j}\mathrm{Ln}\frac{z + \mathrm{j}}{\mathrm{j} - z}$; $\mathrm{Arccot}\, z =$ $\frac{\mathrm{j}}{2}\mathrm{Ln}\frac{1 + \mathrm{j}z}{1 - \mathrm{j}z}$	$\mathrm{Arsinh}\, z =$ $\mathrm{Ln}(z + \sqrt{1 + z^2})$; $\mathrm{Arcosh}\, z =$ $\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$; $\mathrm{Artanh}\, z =$ $\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1 + z}{1 - z}$; $\mathrm{Arcoth}\, z =$ $\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1 + z}{z - 1}$
主值表达式	$\ln z = \ln\|z\| + \mathrm{j}\arg z$ $(-\pi < \arg z \leqslant \pi)$	$z^\alpha = e^{\alpha \ln z} = \|z\|^\alpha e^{\mathrm{j}\alpha \arg z}$ $(-\pi < \arg z \leqslant \pi)$	如上面各式所示，但对数函数应当取主值，如 $\arcsin z =$ $-\mathrm{j}\ln(\mathrm{j}z + \sqrt{1 - z^2})$	如上面各式所示，但对数函数应当取主值，如 $\mathrm{arcsinh}\, z =$ $\ln(z + \sqrt{1 + z^2})$
运算规则	$\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln} z_1 + \mathrm{Ln} z_2$; $\mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln} z_1 - \mathrm{Ln} z_2$; $\mathrm{Ln} z^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\mathrm{Ln} z$; $\mathrm{Ln} z^n \neq n \mathrm{Ln} z$	$z^\alpha \cdot z^\beta = z^{\alpha + \beta}$	/	/

习　题　1

复数的概念及运算

1.1　计算下列各式的值，并写出相应的三角函数和指数表达式.

(1) $\dfrac{(2+2\mathrm{j})^4}{(1-\sqrt{3}\mathrm{j})^5}$；　(2) $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{j}}{2}\right)^5$；　(3) $\sqrt{-1+\sqrt{3}\mathrm{j}}$；　(4) $\sqrt[4]{2-2\mathrm{j}}$.

1.2　证明：

(1) $\cos n\theta + \mathrm{j}\sin n\theta = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta \cdot \mathrm{j}^k$ $(n=1,2,3,\cdots)$；

*(2) $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos k\theta = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\dfrac{1}{2}\theta}$.

1.3　解方程.

(1) $z^3 + 8\mathrm{j} = 0$；　(2) $z^4 + 4 = 0$；　*(3) $z^n - 1 = 0$ (n 为正整数).

1.4　证明下列各式.

(1) $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$，且说明几何意义；

(2) $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$，且说明几何意义；

(3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$；

(4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $(z_2 \neq 0)$；

(5) $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$；

*(6) 若 $0 < a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，则

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0$$

在 $|z| > 1$ 内无根.

1.5　写出下列曲线方程的复变量形式.

(1) 双曲线方程 $x^2 - y^2 = 1$；

(2) 椭圆方程 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$；

(3) 中心在 z_0（复常数），半径为 R 的圆方程；

*(4) 直线方程 $Ax + By + C = 0$.

*1.6 求下列复数列的极限.

(1) $\frac{3+4\mathrm{j}}{6},\left(\frac{3+4\mathrm{j}}{6}\right)^2,\cdots,\left(\frac{3+4\mathrm{j}}{6}\right)^n,\cdots$;

(2) $1,\frac{1}{2}\mathrm{j},-\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\mathrm{j},\frac{1}{5},\frac{1}{6}\mathrm{j},-\frac{1}{7},-\frac{1}{8}\mathrm{j},\cdots$.

*1.7 在复平面上画出满足下列关系的点集图形,其中哪些关系确定的点集是区域,它们的边界是什么?

(1) $0<\arg(z-\mathrm{j})<\frac{\pi}{6}$;

(2) $2<|z+1|<3$,且 $-2<\operatorname{Re} z\leqslant\frac{3}{2}$;

(3) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|>\alpha(\alpha>0)$,且指出它所表示的几何意义;

(4) $z=a\cos t+\mathrm{j}b\sin t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi,a>0,b>0)$.

复变函数极限和连续性问题

1.8　证明下列问题.

(1) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\operatorname{Re}\bar{z}}{z^2}$ 不存在;

(2) $f(z)=\begin{cases}\frac{\operatorname{Im} z}{z\bar{z}}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0\end{cases}$ 在 $z=0$ 处不连续;

*(3) 证明 z^n 是连续函数(n 是自然数);

*(4) 设 $\alpha=a+\mathrm{j}b$, 先计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$, 再根据此计算结果证明 $\mathrm{e}^{\alpha+\beta}=\mathrm{e}^{\alpha}\cdot\mathrm{e}^{\beta}$.

1.9　求下列函数的连续性.

(1) $f(z)=\begin{cases}\frac{z^2-1}{z-1}, & z\neq 1,\\ 2, & z=1\end{cases}$ 是否连续函数,并说明理由;

(2) 若 $f(z)$ 在 z_0 点连续,问 $\bar{f}(z)$ 在 z_0 点是否连续?

1.10　(1) 区域 $x>0,y>0,xy<1$,求在 $w=z^2$ 映射后的图像;

(2) 求 $r\geqslant 0,0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 的区域经过 $w=z^2$ 映射后的图像;

(3) 曲线 $y=x$ 经过 $w=\frac{1}{z}$ 映射后在 w 平面上的曲线;

(4) $x^2+y^2=4$ 经过 $w=\dfrac{1}{z}$ 映射后在 w 平面上的曲线.

复变函数的幂级数

*1.11　讨论下列各级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2+\mathrm{j})^{2n}}$；(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(4+5\mathrm{j})^{n}}$；(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\mathrm{j}\right)^{n}}$；(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{j}^n}{n}$.

1.12　判断下列级数的收敛半径.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}z^n$；(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}z^n$；(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n z^n$；(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{\ln n}z^n$.

1.13　在 $0<|z|<1$ 时,

(1) 证明 $\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$；

(2) 设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$,求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}r^n\cos n\theta$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}r^n\sin n\theta$,其中 $0<r<1$.

1.14　证明:若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n=S$,那么有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\overline{z_n}=\overline{S}$.

*1.15　若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C_{n+1}}{C_n}$ 存在且不等于 ∞,求证 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{C_n}{n+1}z^{n+1}$ 有相同的收敛半径.

初等函数

1.16　求下列各式的值.

(1) $(1+\mathrm{j})^{\mathrm{j}}$；(2) $\mathrm{e}^{1-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$；(3) $\ln(-2)$；(4) $\mathrm{Ln}(-2)$；

(5) $\mathrm{Ln}(3+4\mathrm{j})$；(6) $\cos(1+\mathrm{j})$；(7) $\tan(2-\mathrm{j})$；(8) $\sinh(-2+\mathrm{j})$；

(9) $\mathrm{Arcsin}\,3$；(10) $\mathrm{Arctan}\,\dfrac{\mathrm{j}}{3}$；(11) $\mathrm{Arcosh}(-1)$；(12) $\sin\mathrm{j}$.

1.17　(1) 用 x 和 y 把 $\mathrm{e}^{(2z+\mathrm{j})}$ 和 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}z^2}$ 表示出来；

(2) 用(1)的结果证明 $\left|\mathrm{e}^{(2z+\mathrm{j})}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}z^2}\right|\leqslant\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2xy}$；

(3) 解方程 $\mathrm{e}^{2z-1}=1$.

1.18　证明下列恒等式.

(1) $\sin^2 z+\cos^2 z=1$；

(2) $|\sin z|^2=\sin^2 x+\sinh^2 y$；