配苏教版普通高中课程标准实验教科书

高中数学教学参考书

选修2-2

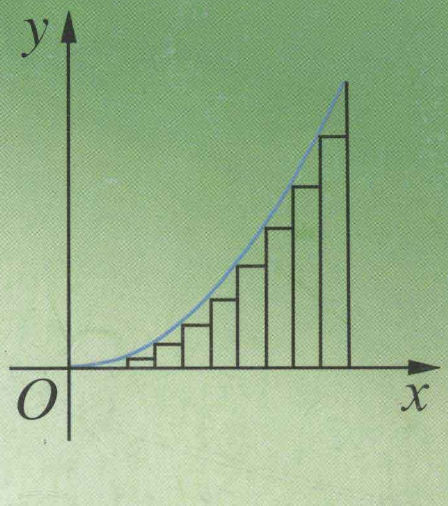
凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

选修2-2

数学



凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社

配苏教版普通高中课程标准实验教科书

高中数学教学参考书

数学(选修 2－2)

凤凰出版传媒集团
江蘇教育出版社

配苏教版普通高中课程标准实验教科书
书　　名　高中数学教学参考书·数学(选修 2-2)
责任编辑　胡晋宾
出版发行　凤凰出版传媒集团
　　　　　江苏教育出版社(南京市马家街 31 号 210009)
网　　址　http://www.1088.com.cn
集团网址　凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn
经　　销　江苏省新华发行集团有限公司
照　　排　南京展望文化发展有限公司
印　　刷　通州市印刷总厂有限公司
厂　　址　通州市交通路 55 号(邮编 226300)
电　　话　0513－80237871
开　　本　890×1240 毫米　1/16
印　　张　9
版　　次　2005 年 6 月第 1 版
　　　　　2006 年 7 月第 3 次印刷
书　　号　ISBN　7－5343－7015－9/G·6700
定　　价　12.50 元
批发电话　025－83260760,83260768
邮购电话　025－85400774,8008289797
短信咨询　10602585420909
E-mail　jsep@vip.163.com
盗版举报　025－83204538

主　　编　单　墫

副 主 编　李善良　陈永高　王巧林

本册主编　徐稼红

编写人员　樊亚东　张乃达　陈光立　徐稼红

参与讨论　葛　军　仇炳生　李善良　石志群

责任编辑　胡晋宾

说　明

江苏教育出版社出版的《普通高中课程标准实验教科书·数学》是根据 2003 年教育部制订的《普通高中数学课程标准(实验)》编写的.该套教科书充分体现数学课程标准的基本理念,使学生通过高中阶段的数学学习,能获得适应现代生活和未来发展所必需的数学素养,满足他们个人发展与社会进步的需要.

教科书力图使学生在丰富的、现实的、与他们经验紧密联系的背景中感受数学、建立数学、运用数学,做到"入口浅,寓意深".通过创设恰当的问题情境,促进学生进行观察、操作、探究和运用等活动感悟并获得数学知识与思想方法.在知识的发生、发展与运用过程中,培养学生的思维能力、创新意识、应用意识.

教科书充分考虑学生的不同需求,为所有学生的发展提供帮助,为学生的不同发展提供较大的选择空间.教科书面向所有学生,使每一个学生都获得必备的数学素养,都能获得最佳发展.整个教科书设计为:一个核心(基本教学要求),多个层次,多种选择.以基本教学要求为核心,通过这个载体,学生可以获得全方位的发展.学生学好核心内容后,根据需要,有多种选择.

本套教科书的体例安排主要有以下特点.

1. 根据《标准》的要求,按知识发展顺序把整套教材分成几条主线,组合成一个有机整体,每个模块有自己整体贯通的主线,每章有核心的概念或原理,各章相互联系.

2. 每章内容由章头图、引言、正文、本章回顾、复习题、探究案例、实习作业等构成.引言包括:

① 本章的主背景.以入口较浅的、学生能理解的生活实例或其他实例,引发学生思考.这个背景又是本章核心内容的原型,在一章中将多次按不同层次或方向出现,统领全章.

② 引领本章内容的问题.这是本章的生长点,是本章核心内容或研究方法的出发点,它将激发学生探索新知识的欲望.

3. 节包括内容组织、活动开展、拓展栏目、习题、阅读等内容.节为教学的基本单元,每节有自己的小系统.每节开头在章的背景下,给出分支背景,围绕章的问题,提出相应问题.这些问题就是本节的起点、核心内容的出发点.

4. 内容组织主要形式为:

$\boxed{\text{问题情境}} \to \boxed{\text{学生活动}} \to \boxed{\text{意义建构}} \to \boxed{\text{数学理论}} \to \boxed{\text{数学运用}} \to \boxed{\text{回顾反思}}$

问题情境包括实例、情景、问题、叙述等.编写意图是提出问题.

学生活动包括观察、操作、归纳、猜想、验证、推理、建立模型、提出方法等个体活动,也包括讨论、合作、交流、互动等小组活动.编写意图是体验数学.

意义建构包括经历过程、感受意义、形成表象、自我表征等.编写意图是感知数学.

数学理论包括概念定义、定理叙述、模型描述、算法程序等.编写意图是建立数学.

数学运用包括辨别、解释、解决简单问题、解决复杂问题等.编写意图是运用数学.

回顾反思包括回顾、总结、联系、整合、拓广、创新、凝缩(由过程到对象)等.编写意图是理解数学.

5. 拓展栏目有思考、实验、探究、阅读、链接等,穿插在各个环节中.

6. 习题、复习题分为紧密联系的三个层次——感受·理解、思考·运用、探究·拓展,教师可根据教学需要选择.

本套教师教学参考用书与《普通高中课程标准实验教科书·数学》配套,供教师教学使用.每册书按章编排,每章包括本章教育目标、本章设计意图、本章教学建议、本章内容分析、本章教学案例、本章参考答案等内容.

《普通高中课程标准实验教科书·数学》编写组

2006 年 6 月

目　录

第1章　导数及其应用

导数是进一步学习数学和其他自然科学的基础，是研究现代科学技术必不可少的工具.

一、本章教育目标

通过本章学习，促进学生全面认识数学的价值，使学生对变量数学的思想方法有新的感悟. 进一步发展学生的数学思维能力，感受数学产生和发展的规律以及人类智慧和文明的传承，也为学生进一步学习微积分打好基础.

1. 经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，体会变化率的广阔实际背景(如运动速度、绿地面积增长率、人口增长率、汽油的使用效率等等).

2. 体会导数的思想及其内涵，知道瞬时变化率就是导数. 认识平均变化率与导数的区别与联系.

3. 通过函数图象直观地理解导数的几何意义.

4. 能由导数的定义求函数 $y=c, y=x, y=x^2, y=x^3$，$y=\dfrac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$的导数. 能利用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则求简单函数的导数.

5. 结合实例，探索并了解函数的单调性与导数的关系，能利用导数求不超过三次的多项式函数的单调区间、极大值、极小值和最大值、最小值.

6. 通过实例，初步学会解决生活中的优化问题(如利润最大、用料最省、效率最高)，体会导数的实际应用价值.

7. 通过实例，初步了解定积分的实际背景，体会定积分的基本思想，了解定积分的概念，并直观了解微积分基本定理的含义.

8. 了解有关微积分创立的时代背景和历史意义. 体会微积分的建立在人类文化发展中的意义和价值.

二、本章设计意图

1. 本章侧重于对导数本质的认识，通过大量的实例由浅入深，由表及里，层层展示其数学思想和数学方法. 这与传统的运用形式化的极限概念，将导数作为一种规则的设计有很大的不同.

2. “局部以直代曲”是微积分的核心所在，教材通过“问题串”的设计，运用形象直观的“放大图形”的朴素方法，逐层深入，帮助学生理解“以直代曲”的辩证思想.

3. 以问题为背景，按照“问题情境—建立模型—解释·应用与拓展”的程序，让学生经历数学建模的过程. 本章的问题情境按两条线索进行设计. 线索一为生活中的案例，如“气温变化的快与慢”、“婴儿体重变化的快与慢”、“工厂治污率的比较”、“速度变化的快与慢”、“边际函数”等等. 线索二则是源于数学内部的背景，如“曲线上一点处的变化趋势”、“曲线上一点处最逼近曲线的直线”、“怎样由割线逼近切线”等等. 上述两条线索交替呈现，环环相扣，为导数模型的建立和感受微分的基本思想提供了丰富的背景.

4. 为了让更多的学生理解“局部以直代曲”的辩证思想，激发他们自主学习的动机，教材通过设置“思考、探究、链接、阅读”等栏目，以及信息技术的运用，为教师和学生的活动提供了广阔的空间，以期促进教学方式和学习方式的转变.

5. 为了适应学生的个性发展，教材在练习的基础上，将习题分为“感受·理解”、“思考·运用”、“探究·拓展”三个层次. “感受·理解”体现了本章的基本要求，“思考·运用”则帮助学生深化对本章知识的理解，“探究·拓展”为学有余力的同学提供一些富有挑战性的问题. 这样安排习题，为教学留有足够的空间，也有助于学生良好的学习方式的形成.

6. 本章内容分为三块：

(1) 导数的概念及导数的运算(第1节、第2节)

通过实际背景，引导学生经历由平均变化率到瞬时变化率的过程，逐步引申，直至建立起导数的数学模型，进而形成数学理论.

(2) 导数的应用(第 3 节、第 4 节)

在应用数学模型解决具体问题中，体会导数方法在研究函数性质中的一般性和有效性，以及在实际生活中解决优化问题的作用.

(3) 定积分(第 5 节)

由实际背景导出定积分的数学模型是又一个“问题情境—建立模型—解释·运用与拓展”的案例，是“局部以直代曲”的辩证思想的又一次生动体现，最后，微积分基本定理揭示出本章建立的两个数学模型(导数和定积分)之间的关系.

三、本章教学建议

1. 导数概念的建立基于“无限逼近”的过程，这与初等数学所涉及的思想方法有本质的不同. 为此，教学中应注意以下两点：

第一，根据学生的生活经验，通过实际背景，创设丰富的情境. 例如，比较变化的快与慢时，只考虑 Δy 行不行？教学中不要直接灌输$\frac{\Delta y}{\Delta x}$，应启发学生讨论、探索、感悟和体会，并由学生自己举例说明.

第二，“局部以直代曲”归根到底是个哲学问题. 要引导学生用心体会无限逼近与“量变到质变”、“近似与精确”的哲学原理，不要急于给出形式化的定义，应努力追求水到渠成的教学方式. 教材不用极限理论，主要也是担心过多的极限知识可能会冲淡甚至干扰对导数本质的理解.

2. 在导数概念建立之后，要认真引导学生用定义推导几个初等函数的导数公式，要注重形式化训练中的规范要求，进而体会数学理论的自身特点及巨大价值所在，并从中领悟算法的基本思想.

3. 本章突出了对导数本质的认识，要求学生体会导数的思想及其内涵，要防止仅仅将导数作为一种规则和步骤来学习. 本章只要求学生根据定义求简单函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\frac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$的导数，然后直接给出其他基本初等函数的导数以及导数的运算法则.

4. 本章中无论是微分还是定积分，都十分重视数形结合. 通过几何直观去认识和感受导数与定积分，简化严格的推导过程，这既减少了学生学习的困难，又有利于真正理解导数与定积分的本质，也体现出数形结合这一重要数学思想方法对数学学习的意义和作用.

本章的教学大约需要 24 课时，具体分配如下(仅供参考)：

1.1.1	平均变化率	约 1 课时
1.1.2	瞬时变化率——导数	约 4 课时
1.2.1	常见函数的导数	约 1 课时
1.2.2	函数的和、差、积、商的导数	约 1 课时
1.2.3	简单复合函数的导数	约 1 课时
1.3.1	单调性	约 1 课时
1.3.2	极值点	约 2 课时
1.3.3	最大值与最小值	约 1 课时
1.4	导数在实际生活中的应用	约 2 课时
1.5.1	曲边梯形的面积	约 3 课时
1.5.2	定积分	约 2 课时
1.5.3	微积分基本定理	约 2 课时
	小结与复习	约 3 课时

四、本章内容分析(见下)

1.1 导数的概念

1.1.1 平均变化率

在本章引言的案例中，气温“陡增”的数学意义是什么呢？

为了弄清这个问题，我们先来观察如图 1-1-1 所示的气温曲线图(以 3 月 18 日作为第一天).

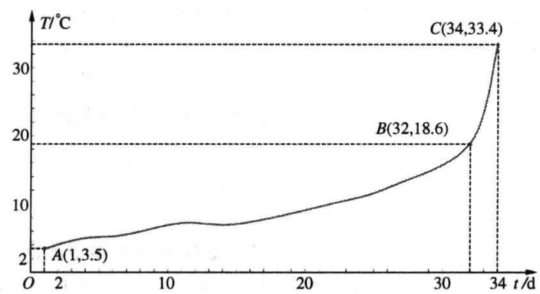


图 1-1-1

容易看出点 B，C 之间的曲线比点 A，B 之间的曲线更加“陡峭”. 陡峭的程度反映了气温变化的快与慢.

● 如何量化陡峭程度呢?

联想到用斜率来量化直线的倾斜程度，我们用比值

$$\frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{33.4 - 18.6}{34 - 32}$$

来近似地量化点 B，C 之间这一段曲线的陡峭程度，并称该比值为气温在区间[32，34]上的平均变化率.

气温在区间[1，32]上的平均变化率为

$$\frac{18.6 - 3.5}{32 - 1} = \frac{15.1}{31} \approx 0.5.$$

气温在区间[32，34]上的平均变化率为

$$\frac{33.4 - 18.6}{34 - 32} = \frac{14.8}{2} = 7.4.$$

虽然点 A，B 之间的温差与点 B，C 之间的温差几乎相同，但它

编写意图与教学建议

1. 章头图以变化与运动为立意，展示了游乐场过山车的运动情景. 从位移的变化、速度的变化、曲线的上升与下降等具体现象到本章所研究的函数的改变量、变化率、图象性质等抽象的数学理论，都蕴涵于这一大背景之中.

2. 本章引言从一个气温突变的案例，朴素而自然地引出本章的两个主要问题：(1) 用怎样的数学模型刻画变量变化的快与慢？(2) 这样的数学模型有哪些应用？这两个主要问题勾勒出本章的结构框架，点明了知识展开与呈现的脉络和线索.

3. 从观察引言的气温曲线图开始，先从直观上看出“陡峭”，进而提出量化陡峭程度的问题.

4. 从实际生活背景中引出数学模型是本段教材编写的主要意图.

5. 数形结合是基本的数学思想方法，应与学生共同体会“无形不直观，无数不入微”的辩证思想.

教学目标

1. 通过大量实例的分析，经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念的广阔背景，体会导数的思想及其内涵.

2. 通过函数图象直观地理解导数的几何意义.

3. 进一步体会建立数学模型刻画客观世界的“数学化”过程，同时对变量数学的思想方法有新的感悟.

1. 教学中应引导学生自己列举平均变化率的实例.

2. 例 1、例 2 的教学应侧重于理解平均变化率的实际意义.

3. 例 3 为后继的教学作铺垫，可借助图象帮助学生感知、体会平均变化率的"变化".

们的平均变化率却相差很大.

一般地，函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上的平均变化率(average rates of change)为

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

在图 1-1-1 中，我们可以感受到：平均变化率是曲线陡峭程度的"数量化"，或者说，曲线陡峭程度是平均变化率的"视觉化".

例 1 某婴儿从出生到第 12 个月的体重变化如图 1-1-2 所示，试分别计算从出生到第 3 个月以及第 6 个月到第 12 个月该婴儿体重的平均变化率.

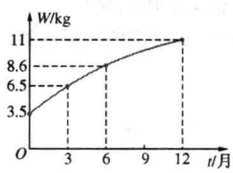


图 1-1-2

解 从出生到第 3 个月，婴儿体重平均变化率为

$$\frac{6.5-3.5}{3-0}=1(\text{kg/月}),$$

从第 6 个月到第 12 个月，婴儿体重平均变化率为

$$\frac{11-8.6}{12-6}=\frac{2.4}{6}=0.4(\text{kg/月}).$$

例 2 水经过虹吸管从容器甲流向容器乙(图 1-1-3)，t s 后容器甲中水的体积 $V(t)=5e^{-0.1t}$(单位：cm^3)，试计算第一个 10 s 内 V 的平均变化率.

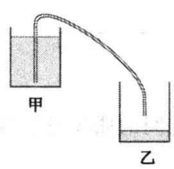


图 1-1-3

解 在区间 $[0, 10]$ 上，体积 V 的平均变化率为

$$\frac{V(10)-V(0)}{10-0}\approx\frac{1.839-5}{10}=-0.3161(\text{cm}^3/\text{s}),$$

即第一个 10 s 内容器甲中水的体积的平均变化率为 $-0.3161\ \text{cm}^3/\text{s}$(负号表示容器甲中的水在减少).

例 3 已知函数 $f(x)=x^2$，分别计算函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 3]$，$[1, 2]$，$[1, 1.1]$，$[1, 1.001]$ 上的平均变化率.

解 函数 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上的平均变化率为

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{3^2-1^2}{2}=4,$$

函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的平均变化率为

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{2^2-1^2}{1}=3,$$

函数 $f(x)$ 在 $[1, 1.1]$ 上的平均变化率为

$$\frac{f(1.1)-f(1)}{1.1-1}=\frac{1.1^2-1^2}{0.1}=2.1,$$

函数 $f(x)$ 在 $[1, 1.001]$ 上的平均变化率为

$$\frac{f(1.001)-f(1)}{1.001-1}=\frac{1.001^2-1^2}{0.001}=2.001.$$

例4 已知函数 $f(x)=2x+1$，$g(x)=-2x$，分别计算在区间 $[-3, -1]$，$[0, 5]$ 上函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的平均变化率.

解 函数 $f(x)$ 在 $[-3, -1]$ 上的平均变化率为

$$\frac{f(-1)-f(-3)}{(-1)-(-3)}=\frac{[2\times(-1)+1]-[2\times(-3)+1]}{2}=2,$$

函数 $f(x)$ 在 $[0, 5]$ 上的平均变化率为

$$\frac{f(5)-f(0)}{5-0}=2,$$

函数 $g(x)$ 在 $[-3, -1]$ 上的平均变化率为

$$\frac{g(-1)-g(-3)}{(-1)-(-3)}=-2,$$

函数 $g(x)$ 在 $[0, 5]$ 上的平均变化率为

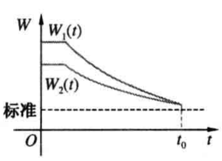
$$\frac{g(5)-g(0)}{5-0}=-2.$$

思 考

从例4的求解中，你能发现一次函数 $y=kx+b$ 在区间 $[m, n]$ 上的平均变化率有什么特点吗？

练 习

1. 甲用5年时间获利10万元，乙用5个月时间获利2万元，如何比较和评价甲、乙两人的经营成果？
2. 国家环保局在规定的排污达标日期前，对甲、乙两家企业进行检查，连续检测结果如图所示（其中 $W_1(t)$，$W_2(t)$ 分别表示甲、乙两企业的排污量），试比较两个企业的治污效果.



（第2题）

3. 已知 $f(x)=3x+1$，求 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的平均变化率：
   (1) $a=-1$，$b=2$；
   (2) $a=-1$，$b=1$；
   (3) $a=-1$，$b=-0.9$.
4. 求经过函数 $y=x^2$ 图象上两点 A，B 的直线的斜率：
   (1) $x_A=1$，$x_B=1.001$；
   (2) $x_A=1$，$x_B=0.9$；
   (3) $x_A=1$，$x_B=0.99$；
   (4) $x_A=1$，$x_B=0.999$.

1. 例4的教学可回顾《数学2(必修)》中关于直线斜率的内容，让学生体会 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的含义，并结合“思考”进行小结.

2. 练习的使用可与例题的教学交叉进行.

3. 关于“思考”：一次函数 $y=kx+b$ 在区间 $[m, n]$ 上的平均变化率等于斜率 k.

1. 曲线上一点 P 附近的图形放大、再放大，是"局部以直代曲"思想方法产生的源头，也是本节的要点. 教学中可以边讲边画出逐步放大的过程及图形，也可以利用多媒体辅助教学.

2. 本节教学还可设想一个背景引出话题：光线射到曲线上一点 P，那么光线如何反射？这样的背景也可以引起对点 P 附近曲线的研究.

3. 前一小节的背景多为生活实际问题，而本小节研究的切线问题则是数学内部的背景.

1.1.2 瞬时变化率——导数

1. 曲线上一点处的切线

平均变化率近似地刻画了曲线在某区间上的变化趋势，那么，

● 如何精确地刻画曲线上某一点处的变化趋势呢？

如果将点 P 附近的曲线放大，我们发现，曲线在点 P 附近看上去有点像是直线（图 1-1-4）.

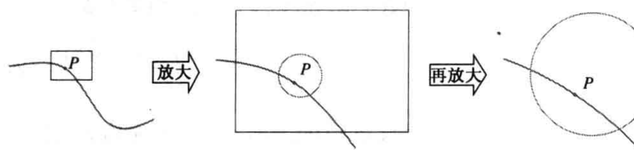


图 1-1-4

如果将点 P 附近的曲线再放大，我们发现，曲线在点 P 附近看上去几乎成了直线. 事实上，如果继续放大，曲线在点 P 附近将逼近一条确定的直线 l，该直线 l 是经过点 P 的所有直线中最逼近曲线的一条直线.

因此，在点 P 附近我们可以用这条直线 l 来代替曲线，也就是说，在点 P 附近，曲线可以看做直线（即在很小范围内以直代曲）.

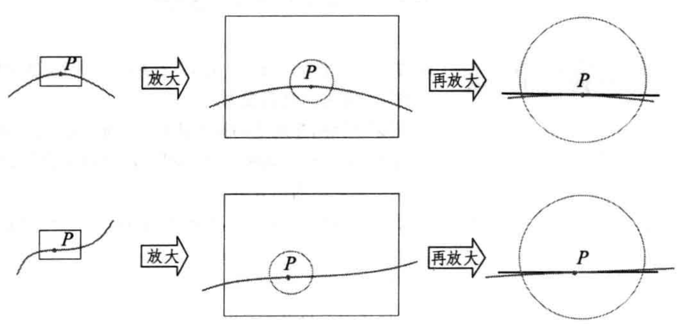


图 1-1-5

既然点 P 附近的曲线被看作直线 l，从而可用直线 l 的斜率来刻画曲线经过点 P 时上升或下降的"变化趋势".

探究

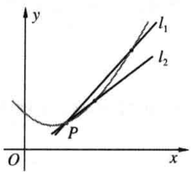


图 1-1-6

如图 1-1-6 所示，直线 l_1，l_2 为经过曲线上一点 P 的两条直线.

(1) 试判断哪一条直线在点 P 附近更加逼近曲线；

(2) 在点 P 附近能作出一条比 l_1，l_2 更加逼近曲线的直线 l_3 吗？

(3) 在点 P 附近能作出一条比 l_1，l_2，l_3 更加逼近曲线的直线 l_4 吗？

怎样找到经过曲线上一点 P 处最逼近曲线的直线 l 呢？

如图 1-1-7，设 Q 为曲线 C 上不同于 P 的一点，这时，直线 PQ 称为曲线的割线(secant line). 随着点 Q 沿曲线 C 向点 P 运动，割线 PQ 在点 P 附近越来越逼近曲线 C. 当点 Q 无限逼近点 P 时，直线 PQ 最终就成为在点 P 处最逼近曲线的直线 l，这条直线 l 也称为曲线在点 P 处的切线(tangent line).

利用这种割线逼近切线的方法，我们来计算曲线上一点处切线的斜率.

动画浏览参见 http://www.1088.com.cn/math/2-2.

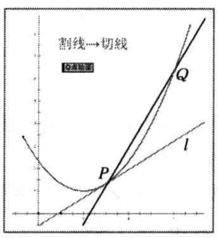


图 1-1-7

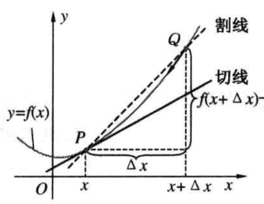


图 1-1-8

如图 1-1-8，设曲线 C 上一点 $P(x, f(x))$，过点 P 的一条割线交曲线 C 于另一点 $Q(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$，则割线 PQ 的斜率为

Δx 可正也可负，当 Δx 取负值时，点 Q 位于点 P 的左侧.

$$k_{PQ}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

当点 Q 沿曲线 C 向点 P 运动，并无限靠近点 P 时，割线 PQ 逼近点 P 的切线 l，从而割线的斜率逼近切线 l 的斜率，即当 Δx 无限趋近于 0 时，$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 无限趋近于点 $P(x, f(x))$ 处的切线的斜率.

例 1 已知 $f(x)=x^2$，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处的切线斜率.

分析 为求得过点 $(2, 4)$ 的切线斜率，我们从经过点 $(2, 4)$ 的任意一条直线(割线)入手.

解 设 $P(2, 4)$，$Q(2+\Delta x, (2+\Delta x)^2)$，则割线 PQ 的斜率为

1. 割线逼近切线的过程可让学生通过观察作曲线在某点处的切线过程来体会.

2. 割线的斜率与前一小节的平均变化率虽然背景不同，各有侧重(分别源于数学内部与数学外部)，但它们的数学本质是一致的.

3. 割线斜率逼近切线斜率是“以直代曲”的一种数量化.

1. 例 1 的教学手法可以多样化，比如作出图象加强直观，还可取 $\Delta x<0$ 进行比较. 如有条件，可利用计算机分别演示数值逼近和图形逼近的过程，使数形结合更加紧密.

$$k_{PQ}=\frac{(2+\Delta x)^2-4}{\Delta x}=4+\Delta x.$$

当 Δx 无限趋近于 0 时，k_{PQ} 无限趋近于常数 4，从而曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(2,\ 4)$ 处的切线斜率为 4.

EXCEL

在 Excel 中计算可知(如图 1－1－9)，当 Δx 越接近 0，割线斜率 k_{PQ} 就越接近常数 4.

	A	B	C	D
1	Δx	$\frac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x}$	Δx	$\frac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x}$
2	1	5	-1	3
3	0.1	4.1	-0.1	3.9
4	0.01	4.01	-0.01	3.99
5	0.001	4.001	-0.001	3.999
6	0.0001	4.0001	-0.0001	3.9999
7	0.00001	4.00001	-0.00001	3.99999

单元格 B2，D2 中的公式.

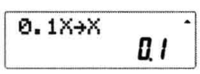
	B	C	D
2	=((2+A2)^2-2^2)/A2	-1	=((2+C2)^2-2^2)/C2

图 1－1－9

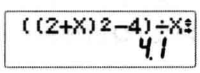
CALCULATOR

当 Δx 以 1，0.1，0.01，0.001，…接近于 0 时，用计算器计算相应割线的斜率(以例 1 为例)：

(1) 赋初值 $\Delta x=1$，按键 [1] [SHIFT] [STO] [X].



(2) 计算割线斜率 $\frac{(2+\Delta x)^2-4}{\Delta x}$，按键顺序是 [(] [(] [2] [+] [ALPHA] [X] [)] [x^2] [−] [4] [)] [÷] [ALPHA] [X] [SHIFT] [STO] [Y].

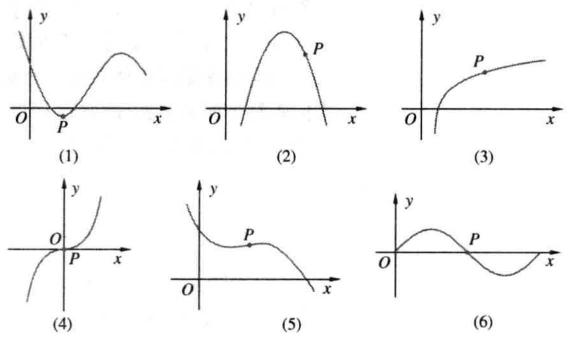


(3) Δx 以 0.1 为公比减少，按键顺序是 [0] [.] [1] [ALPHA] [X] [SHIFT] [STO] [X].

(4) 反复按 [▲] [=] 键.

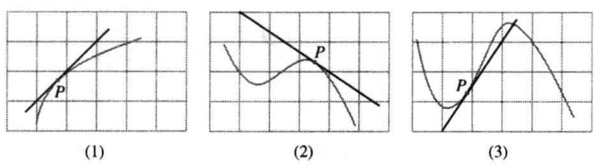
练　习

1. 利用直尺，用割线逼近切线的方法作出下列曲线在 P 点处的切线.



（第 1 题）

2. 在下列 3 个图中，直线 l 为曲线在点 P 处的切线，分别求 l 的斜率.

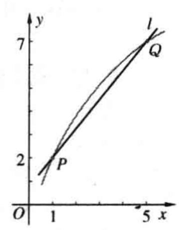


（第 2 题）

3. 如图，l 为经过曲线上点 P 和 Q 的割线.

(1) 若 $P(1, 2)$，$Q(5, 7)$，求 l 的斜率；

(2) 当 Q 沿曲线向点 P 靠近时，l 的斜率变大还是变小？



（第 3 题）

4. 运用例 1 中割线逼近切线的方法，分别求曲线 $y=x^2$ 在 $x=0$，$x=-2$，$x=3$ 处的切线斜率.

1. 瞬时速度的引入又将背景从数学内部移向数学外部. 由平均速度逼近瞬时速度的思想是理解瞬时速度概念的关键. 教学中应侧重对逼近思想的感悟，不要急于给出结论.

2. 引入瞬时速度之后，应及时将割线斜率逼近切线斜率的思想方法与平均速度逼近瞬时速度的思想方法加以比较，找出它们的共同点，从而为导数的形式化定义作铺垫.

2. 瞬时速度与瞬时加速度

在物理学中，运动物体的位移与所用时间的比称为平均速度(mean velocity). 平均速度反映了物体在某一时间段内运动的快慢程度，那么，如何精确刻画物体在某一时刻运动的快慢程度呢？

我们先看下面的实例. 跳水运动员从 10 m 跳台腾空到入水的过程中，不同时刻的速度是不同的. 假设 t s 后运动员相对于水面的高度为

$$H(t)=-4.9t^2+6.5t+10,$$

试确定 $t=2$ s 时运动员的速度.

先求出运动员在 2 s 到 2.1 s(即 $t\in[2,\ 2.1]$) 的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{H(2.1)-H(2)}{2.1-2}=-13.59(\text{m/s}).$$

同样，可以算出更短的时间间隔内的平均速度.

	A	B	C	D	E	F
1	时间区间	Δt	平均速度	时间区间	Δt	平均速度
2	[2, 2.1]	0.1	-13.59	[1.9, 2]	-0.1	-12.61
3	[2, 2.01]	0.01	-13.149	[1.99, 2]	-0.01	-13.051
4	[2, 2.001]	0.001	-13.1049	[1.999, 2]	-0.001	-13.0951
5	[2, 2.0001]	0.0001	-13.10049	[1.9999, 2]	-0.0001	-13.09951
6	[2, 2.00001]	0.00001	-13.100049	[1.99999, 2]	-0.00001	-13.099951

单元格 C2 中的公式.

	C
2	=((-4.9*(2+B2)^2+6.5*(2+B2)+10)-(-4.9*2^2+6.5*2+10))/B2

图 1-1-10

由图 1-1-10 可以看出，当 Δt 越接近 0 时，平均速度 $\bar{v}$ 越接近常数 -13.1，这一常数可作为运动员在 $t=2$ s 时的瞬时速度.

一般地，我们计算运动物体位移 $S(t)$ 的平均变化率 $\dfrac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$，如果当 Δt 无限趋近于 0 时，$\dfrac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$ 无限趋近于一个常数，那么这个常数称为物体在 $t=t_0$ 时的瞬时速度(instantaneous velocity).

类似地，我们还可以求出某一时刻物体运动的瞬时加速度.

例 2 已知一辆轿车在公路上作加速直线运动，假设 t s 时的速度为 $v(t)=t^2+3$，求 $t=t_0$ s 时轿车的瞬时加速度 a.

解 在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 的时间间隔内，轿车的平均加速度为

$$\bar{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}$$

$$= \frac{(t_0 + \Delta t)^2 + 3 - (t_0^2 + 3)}{\Delta t}$$

$$= 2t_0 + \Delta t,$$

当 Δt 无限趋近于 0 时，$\overline{a}$ 无限趋近于 $2t_0$，即 $a = 2t_0$.

所以 $t = t_0$ s 时轿车的瞬时加速度为 $2t_0$.

一般地，我们计算运动物体速度的平均变化率 $\dfrac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}$，如果当 Δt 无限趋近于 0 时，$\dfrac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}$ 无限趋近于一个常数，那么这个常数称为物体在 $t = t_0$ 时的瞬时加速度(instantaneous acceleration). 可以看到，瞬时加速度就是速度对于时间的瞬时变化率.

练　习

1. 一质点的运动方程为 $S = t^2 + 10$(位移单位：m，时间单位：s)，试求该质点在 $t = 3$ s 的瞬时速度.
2. 自由落体运动的位移 S(m)与时间 t(s)的关系为 $S = \frac{1}{2}gt^2$ (g 为常数).
   (1) 求 $t = t_0$ s 时的瞬时速度；
   (2) 分别求 $t = 0, 1, 2$ s 时的瞬时速度.

3. 导数

前面的实际问题都涉及了函数在某一点处的瞬时变化率——导数.

设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 上有定义，$x_0 \in (a, b)$，若 Δx 无限趋近于 0 时，比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Δx 表示自变量 x 的改变量，Δy 表示相应的函数的改变量.

无限趋近于一个常数 A，则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导，并称该常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数(derivative)，记作 $f'(x_0)$.

导数 $f'(x_0)$ 的几何意义就是曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率(图 1-1-11).

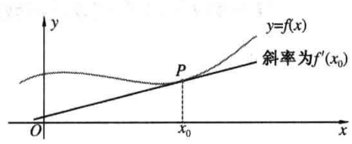


图 1-1-11

1. 在总结、概括多个背景的基础上，水到渠成地引出导数的形式化定义.

2. 应强调在平均变化率逼近导数的过程中，只有 Δx 是变量，函数在 $x = x_0$ 处的导数是一个常数.