配苏教版普通高中课程标准实验教科书

高中数学教学参考书

凤凰出版传媒集团

江苏教育出版社

JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

数学

普通高中课程标准实验教科书

选修 4-1

几何证明选讲

凤凰出版传媒集团

配苏教版普通高中课程标准实验教科书

高中数学教学参考书

优选法与试验设计初步（选修 4-7）

凤凰出版传媒集团
江蘇教育出版社

配苏教版普通高中课程标准实验教科书
高中数学教学参考书
书　　名　几何证明选讲(选修 4－1)
责任编辑　胡晋宾
出版发行　凤凰出版传媒集团
　　　　　　江苏教育出版社(南京市马家街 31 号 210009)
网　　址　http://www.1088.com.cn
集团网址　凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn
经　　销　江苏省新华发行集团有限公司
照　　排　南京理工出版信息技术有限公司
印　　刷　扬州市文丰印刷制品有限公司
厂　　址　扬州北郊天山镇兴华路 25 号(邮编:225653)
电　　话　0514－4225777
开　　本　787×1092 毫米　1/16
印　　张　2.75
版　　次　2005 年 6 月第 1 版
　　　　　　2006 年 7 月第 3 次印刷
书　　号　ISBN　7－5343－6847－2/G・6532
定　　价　3.20 元
批发电话　025－83260760,83260768
邮购电话　025－85400774,8008289797
短信咨询　10602585420909
E－mail　jsep@vip.163.com
盗版举报　025－83204538

主　　编　单　墫

副 主 编　李善良　陈永高　王巧林

本册编写人员　冯惠愚

责任编辑　胡晋宾

说　　明

江苏教育出版社出版的《普通高中课程标准实验教科书·数学》是根据2003年教育部制订的《普通高中数学课程标准(实验)》编写的.该套教科书充分体现数学课程标准的基本理念,使学生通过高中阶段的数学学习,能获得适应现代生活和未来发展所必需的数学素养,满足他们个人发展与社会进步的需要.

教科书力图使学生在丰富的、现实的、与他们经验紧密联系的背景中感受数学、建立数学、运用数学,做到"入口浅,寓意深".通过创设恰当的问题情境,促进学生进行观察、操作、探究和运用等活动感悟并获得数学知识与思想方法.在知识的发生、发展与运用过程中,培养学生的思维能力、创新意识、应用意识.

教科书充分考虑学生的不同需求,为所有学生的发展提供帮助,为学生的不同发展提供较大的选择空间.教科书面向所有学生,使每一个学生都获得必备的数学素养,都能获得最佳发展.整个教科书设计为:一个核心(基本教学要求),多个层次,多种选择.以基本教学要求为核心,通过这个载体,学生可以获得全方位的发展.学生学好核心内容后,根据需要,有多种选择.

本套教科书的体例安排主要有以下特点.

1. 根据《标准》的要求,按知识发展顺序把整套教材分成几条主线,组合成一个有机整体,每个模块有自己整体贯通的主线,每章有核心的概念或原理,各章相互联系.

2. 每章内容由章头图、引言、正文、本章回顾、复习题、探究案例、实习作业等构成.引言包括:

① 本章的主背景.以入口较浅的、学生能理解的生活实例或其他实例,引发学生思考.这个背景又是本章核心内容的原型,在一章中将多次按不同层次或方向出现,统领全章.

② 引领本章内容的问题.这是本章的生长点,是本章核心内容或研究方法的出发点,它将激发学生探索新知识的欲望.

3. 节包括内容组织、活动开展、拓展栏目、习题、阅读等内容.节为教学的基本单元,每节有自己的小系统.每节开头在章的背景下,给出分支背景,围绕章的问题,提出相应问题.这些问题就是本节的起点、核心内容的出发点.

4. 内容组织主要形式为:

问题情境 → 学生活动 → 意义建构 → 数学理论 → 数学运用 → 回顾反思

问题情境包括实例、情景、问题、叙述等. 编写意图是提出问题.

学生活动包括观察、操作、归纳、猜想、验证、推理、建立模型、提出方法等个体活动,也包括讨论、合作、交流、互动等小组活动. 编写意图是体验数学.

意义建构包括经历过程、感受意义、形成表象、自我表征等. 编写意图是感知数学.

数学理论包括概念定义、定理叙述、模型描述、算法程序等. 编写意图是建立数学.

数学运用包括辨别、解释、解决简单问题、解决复杂问题等. 编写意图是运用数学.

回顾反思包括回顾、总结、联系、整合、拓广、创新、凝缩(由过程到对象)等. 编写意图是理解数学.

5. 拓展栏目有思考、实验、探究、阅读、链接等,穿插在各个环节中.

6. 习题、复习题分为紧密联系的三个层次——感受·理解、思考·运用、探究·拓展,教师可根据教学需要选择.

本套教师教学参考用书与《普通高中课程标准实验教科书·数学》配套,供教师教学使用. 每册书按章编排,每章包括本章教育目标、本章设计意图、本章教学建议、本章内容分析、本章教学案例、本章参考答案等内容.

《普通高中课程标准实验教科书·数学》编写组

2005 年 6 月

目　　录

几何证明选讲(选修 4-1)

一、本专题教育目标

1. 复习相似三角形的定义与性质,了解平行截割定理,证明直角三角形射影定理.

2. 证明圆周角定理、圆的切线的判定定理及性质定理.

3. 证明相交弦定理、圆内接四边形的性质定理与判定定理、切割线定理.

4. 了解平行投影的含义,通过圆柱与平面的位置关系,体会平行投影;证明平面与圆柱面的截线是椭圆(特殊情形是圆).

5. 通过观察平面截圆锥面的情境,体会下面定理:

在空间中,取直线 l 为轴,直线 l' 与 l 相交于 O 点,其夹角为 α, l' 围绕 l 旋转得到以 O 为顶点,l' 为母线的圆锥面,任取平面 π,若它与轴 l 交角为 β(π 与 l 平行,记 $\beta=0$),则:

(1) $\beta>\alpha$, 平面 π 与圆锥的交线为椭圆;

(2) $\beta=\alpha$, 平面 π 与圆锥的交线为抛物线;

(3) $\beta<\alpha$, 平面 π 与圆锥的交线为双曲线.

6. 利用 Dandelin 双球(这两个球位于圆锥的内部,一个位于平面 π 的上方,一个位于平面 π 的下方,并且与平面 π 及圆锥均相切)证明上述定理(1).

7. 证明以下结果:①如图 1,一个 Dandelin 球与圆锥面的交线为一个圆,并与圆锥的底面平行,记这个圆所在平面为 π';②如果平面 π 与平面 π' 的交线为 m,在上述定理(1)中椭圆上任取一点 A,该 Dandelin 球与平面 π 的切点为 F,则点 A 到点 F 的距离与点 A 到直线 m 的距离比是小于 1 的常数 e.(称点 F 为这个椭圆的焦点,直线 m 为椭圆的准线,常数 e 为离心率)

8. 探索上述定理(3)的证明,体会当 β 无限接近 α 时平面 π 的极限结果.

9. 完成一个学习总结报告. 报告应包括三方面的内容:

(1) 知识的总结. 对本专题整体结构和内容的理解,对数学证明的认识.

(2) 拓展. 通过查阅资料、独立思考,对某些内容和应用作进一步的探讨.

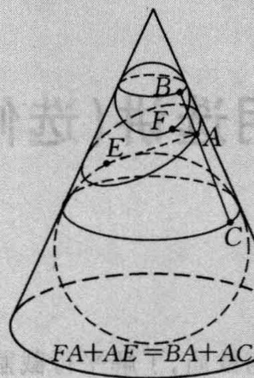

图 1

(3) 学习本专题的感受、体会.

二、本专题设计意图

几何证明选讲有助于培养学生的逻辑推理能力,在几何证明的过程中,不仅包含了逻辑演绎的程序,还包含着大量的观察、探索、发现的创造性过程. 本专题从复习相似图形的性质入手,证明一些反映圆与直线关系的重要定理,并通过对圆锥曲线性质的进一步探索,提高学生空间想像能力、几何直观能力和运用综合几何方法解决问题的能力.

《普通高中数学课程标准(实验)》规定的本专题教学的主要的目的,是培养学生的逻辑推理能力与探索创新能力,以及空间想像能力、几何直观能力和解决问题能力. 因此《普通高中数学课程标准(实验)》在内容安排上并不刻意追求几何体系和几何内容的完整性,只是撷取了几个基本的几何素材加以研究. 因此在进行教学时,应充分利用这些内容为载体,在加强学生能力的培养上下功夫.

本章部分内容是传统的初中平面几何内容,有些内容已列入义务教育数学课程标准中. 但初中教材比较侧重实验,并不要求学生对相关内容作严密的几何证明. 因此编写本章内容注意到在初中教材的基础上进行深化,而不是停留在初中教材的框架内.

本专题在每节的引入时都尽可能设置简单的问题情境,这样既可激发学生的学习兴趣,又符合学生的认知规律. 本专题的呈现方式始终是由简单到复杂、由具体到抽象、由感性到理性的方式,这样做对培养学生的抽象、概括能力能起到很好

的促进作用. 每节内容都落实到逻辑推理与证明的层次，这对培养学生逻辑推理能力有很大的帮助. 本专题在内容的安排上做到深入浅出，对于与本节相关的较深入的内容，则在链接中给出，这样安排，体现了教材的层次性，能使各种层次的学生都学有所获.

本节中的 Dandelin 双球问题是一个蕴涵着丰富数学思想方法的模型，也是第一次进入中学教材的内容. 由于这一内容的学习难度较大，所以在本专题的设计中，作了多次铺垫，把一些相关的知识前移到各个相关的章节中，起到了分散难点的作用.

三、本专题教学建议

1. 本专题的教学，应注意与初中“空间与图形”等相关知识的联系，本专题的部分内容，学生在初中已经初步了解其内容，并且在学习中侧重于观察、实验和操作，而本专题不仅是初中所学知识的深化，而且侧重于逻辑推理与抽象思维. 教学中应使学生逐步适应这一思维层次的提升，不要使学生形成“炒冷饭”的感觉.

2. 本专题的教学，按照从简到繁、从具体到抽象、从实验到论证的过程进行，要使学生在学习具体的平面几何内容中体会数学的思想方法，从而进一步培养创新思维的意识和能力.

3. 本专题的教学，应力求深入浅出. 对前述“教育目标”中 6、7 两个命题证明过程中，蕴涵着丰富的数学思想方法，它们有助于学生体会空间想像能力和几何直观能力在解决问题中的作用，有助于提高学生综合运用几何知识解决问题的能力. 教学时，教师应鼓励学生独立思考，主动尝试、探索，必要时要给予适当的指导，并应鼓励学生写出课题报告，尽可能清晰地表达自己的思考过程与论证过程.

由于 Dandelin 双球的证明较困难，对学生的空间想像能力及逻辑论证能力都是重大考验，所以应尽可能帮助学生分散难点，在前面内容的教学中做好铺垫.

4. 在条件允许的学校，教师可以利用现代计算机技术，动态地展现 Dandelin 双球的方法，帮助学生利用几何直观进行思维.

本章教学约需 18 课时，安排如下：

1.1.1 平行截割定理	约 1 课时
1.1.2 相似三角形	约 2 课时
1.2.1 圆周角定理	约 1 课时
1.2.2 圆的切线	约 2 课时
1.2.3 圆中比例线段	约 2 课时
1.2.4 圆内接四边形	约 2 课时
1.3.1 球的性质	约 1 课时
1.3.2 圆柱的截线	约 2 课时
1.3.3 圆锥的截线	约 3 课时
复　习	约 2 课时

四、各节教学建议

1.1 相似三角形的进一步认识

1.1.1 平行截割定理

教育目标

1. 了解平行线等分线段定理.

2. 了解平行截割定理.

3. 通过定理的学习,使学生体会从简单到复杂、从特殊到一般的数学思想,体会化归思想,体会以退求进的解题策略.

编写意图与教学建议

1. 本节通过学生较熟悉的情境从实例引入,使学生对平行截割定理先有感性认识,再逐步上升到理性认识.先从较简单的平行线等分线段定理入手,再到较复杂的平行截割定理.这样由感性到理性、由具体到抽象、由浅入深,使学生易于接受、理解.

平行截割定理的证明体现了化归的思想,把要证的东西转化为已经证明过的内容.这样就可以根据已知的结果得出新的、未知问题的结论.

2. 关于平行截割定理的证明,只在比值为 3∶2 的特殊情况下加以证明.没有

证明一般的情形$\left(\text{比值}\dfrac{p}{q}\text{为任意实数的情形}\right)$,这是因为当比值为无理数时,需要用到实数连续性理论,而这是学生尚未具备的知识.

本定理也可用面积的方法加以证明,但面积的基本定理仍需要用到实数连续性理论.用面积证明的方法如下:

如图 2,直线 m, n 分别与一组平行线 l_1, l_2, l_3 交于点 A, B, C 与 A', B', C'. 证明:$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{A'B'}{B'C'}$.

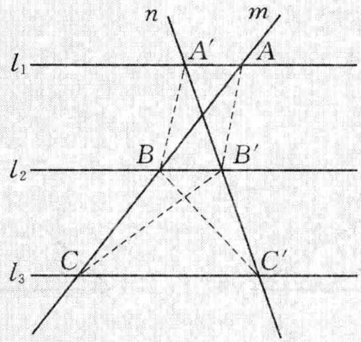

图 2

证明:连结AB', CB', $A'B$, $C'B$.

由于 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$,故 $S_{\triangle ABB'}=S_{\triangle A'BB'}$, $S_{\triangle CBB'}=S_{\triangle C'BB'}$.

但$\triangle ABB'$与$\triangle CBB'$有等高(B'与 m 的距离),故 $\dfrac{S_{\triangle ABB'}}{S_{\triangle CBB'}}=\dfrac{AB}{BC}$.

同理$\dfrac{S_{\triangle A'BB'}}{S_{\triangle C'BB'}}=\dfrac{A'B'}{B'C'}$,但$\dfrac{S_{\triangle ABB'}}{S_{\triangle CBB'}}=\dfrac{S_{\triangle A'BB'}}{S_{\triangle C'BB'}}$,故$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{A'B'}{B'C'}$.

3. 平行截割定理应用很广泛.本节安排了 4 个例题,其中例 1 及例 3 是两个较重要的定理.例 3 即三角形内角平分线定理,相应的还有三角形的外角平分线定理.同时,在本节课文中还给出了梯形中位线定理.这些定理的应用都较广泛.所以用黑体字给出.

例 2 是平行截割定理的应用.

例 4 及习题 1.1.1 的第 7 题都是实际应用题.其中习题第 7 题的线性插值公式在计算函数近似值时常被用到.

4. 本节最后的“链接”介绍了两个重要定理——塞瓦定理与梅涅劳斯定

理，以及塞瓦定理用平行截割定理及面积法的证明. 这两个定理在共点线及共线点的问题中有很多应用. 例如用梅涅劳斯定理可以很方便的解出例 2 而不再需要添辅助线.

同样梅涅劳斯定理也可利用添平行线或用面积法来证明.

证法一：如图 3(1)，设点 X, Y, Z 分别在$\triangle ABC$的 BC, CA, AB所在直线上，作 $CN \parallel BA$，交 XY 于点 N，则$\dfrac{AZ}{CN}=\dfrac{YA}{CY}$，$\dfrac{CN}{ZB}=\dfrac{XC}{BX}$. 于是 $\dfrac{AZ}{ZB}\cdot\dfrac{BX}{XC}\cdot\dfrac{CY}{YA}=\dfrac{AZ}{CN}\cdot\dfrac{CN}{ZB}\cdot\dfrac{BX}{XC}\cdot\dfrac{CY}{YA}=1$.

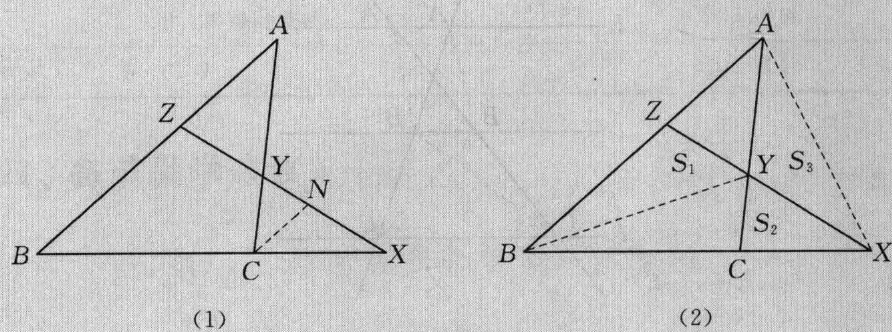

图 3

证法二(面积法)：如图 3(2)，连结 AX, BY，记 $S_{\triangle AYB}=S_1$，$S_{\triangle BYX}=S_2$，$S_{\triangle AYX}=S_3$，则 $\dfrac{AZ}{ZB}=\dfrac{S_3}{S_2}$，$\dfrac{BX}{XC}=\dfrac{S_1+S_3}{S_3}$，$\dfrac{CY}{YA}=\dfrac{S_2}{S_1+S_3}$，三式相乘即得证.

用同一法可证其逆正确.

5. 在梅涅劳斯定理的最后安排了一个证明垂心的例题，在习题 1.1.1 中安排了证明重心的题目，与三角形的外心及内心一样，这两个“心”也是三角形的重要的“心”，高中数学课程中都有触及.

1.1.2 相似三角形

教育目标

1. 复习初中已经学过的相似三角形的定义、判定定理及性质定理，使学生掌握这些定理的证明方法，并能用这些定理解决相关问题.

2. 掌握射影定理的证明，并能应用射影定理解决有关问题.

3. 通过比较，体会逻辑推理、几何证明的重要性. 体会如何把已知与未知联系起来的解题策略.

编写意图与教学建议

1. 相似三角形的定义、判定与性质是初中已学的内容，但初中平面几何中没有给出定理的证明. 因此教学时可从复习旧知识入手，把学生引到如何证明这些定理上来，不要急于进入应用定理解决问题的环节. 应使学生认识到，今后不经证明而直接应用某个结论是不允许的. 相似三角形的判定定理是与全等三角形的判定定理相对应的. 可比较这两组定理的条件与结论，使学生加深印象.

2. 射影定理是相似三角形性质在直角三角形中的应用. 在解题中，直角三角形及其斜边上的高是常见的基本图形，因此射影定理的使用就比较频繁. 在这个基本图形出现时，应用射影定理可以省去反复证明熟知的相似三角形的过程. 教学中应引导学生体会基本图形与应用定理的关系，通过寻找基本图形主动发现证题思路.

3. 本节共安排了 6 个例题，其中例 1 是直角三角形相似的判定定理(与直角三角形全等的 HL 定理相对应)；例 2 与例 3 是相似三角形定理的应用；例 3 还应用了不等式的相关知识；例 4 应用射影定理证明勾股定理，体现了应用射影定理能使解决问题的过程简化的作用；例 5 与例 6 是应用射影定理进行计算与证明，难度逐步提高.

1.2 圆的进一步认识

1.2.1 圆周角定理

教育目标

1. 理解圆周角的概念，掌握圆周角定理，并能应用这些定理解决相关问题.

2. 体会圆周角定理证明中所蕴涵的数学思想方法，即由特殊到一般的证明思路，体会分类思想与归纳思想.

编写意图与教学建议

1. 本节内容是初中已学的内容，可以通过回忆初中相应内容来引入本节内容. 重在指明证明的必要性. 要防止简单重复.

2. 圆周角定理的证明虽然不难，但是体现了诸多的数学思想，应很好地利用这一内容培养与强化相关的数学思想. 证明是分成三种情况来讨论的，体现了分类思想. 证明中先解决了最特殊、最简单的“圆周角一边过圆心”的情况，再利用其

结果解决较为一般的情况，体现了从特殊到一般、从简单到复杂的解题策略. 在完成了三类情况的证明之后，归纳得出了圆周角定理，这体现了归纳思想，应用了完全归纳法. 在证明完三类情况后，应强调"命题在各种可能情况都已经证明是正确的，从而命题在一般情况下都正确"是完全归纳法.

在小学与初中的学习中，为了降低难度及提高合情推理能力，往往使用不完全归纳法，通过观察某几个特例就对一般情况下结论，这对于发现新事物是有意义的，但所发现的结论是否正确，必须进一步论证. 未经证明就由几个特例给出一般结论在数学中是不允许的. 小学与初中课本中的一些用不完全归纳法得出的结论是已经经过严格证明的，不过在小学与初中阶段没有证明罢了.

3. 本节安排了两个例题，都是应用圆周角定理的证明题，体现了解决这类问题的一般模式：把被证的对象设法放入两个三角形中，利用圆周角转移等角，达到证明三角形相似或全等的目的. 其中例 2 与垂心的性质有关.

在习题中，第 9 题是正弦定理的完整形式.

4. 第 23 页的思考题，可以证明 CD 平分$\angle HCG$，从而由三线合一定理得证.

5. 本节安排的链接内容是"托勒密定理". 这个定理有较广泛的应用，而且其解决方法也给证明形如"$a\cdot b=c\cdot d+e\cdot f$"这样的等式提供了一个范例：把 b 拆成两段，使 $b=m+n$，证明 $a\cdot m=c\cdot d$，$a\cdot n=e\cdot f$ 即可.

例如，用托勒密定理证明习题 1.2.1 的第 10 题(课本第 26 页)：由于 $PA\cdot BC=PB\cdot AC+PC\cdot AB$，但$AB=BC=AC$，故得 $PA=PB+PC$.

托勒密定理有一个推广：

对于任意凸四边形$ABCD$，有 $AC\cdot BD\leqslant AB\cdot CD+AD\cdot BC$.

证法与托勒密定理的证明方法类似.

已知：凸四边形 $ABCD$ 如图 4 所示.

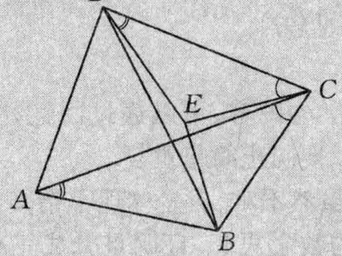

图 4

求证：$AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

证明：在四边形内取点 E，使 $\angle DCE = \angle ACB$，$\angle CDE = \angle CAB$，连结 BE.

则 $\triangle DCE \backsim \triangle ACB$，故 $DC : AC = DE : AB = CE : CB$，即 $AC \cdot DE = AB \cdot CD$ ①.

又 $\because DC : AC = CE : CB$，$\angle DCA = \angle ECB$，$\therefore \triangle DCA \backsim \triangle ECB$，故 $AD : AC = BE : BC$，即 $AC \cdot BE = AD \cdot BC$ ②.

将①+②得 $AC(DE + BE) = AB \cdot CD + AD \cdot BC$. 但 $DE + BE \geqslant BD$，故 $AC(DE + BE) \geqslant AC \cdot BD$. 于是 $AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

1.2.2 圆的切线

教育目标

1. 理解切线的性质与判定定理的证明，并能使用这些定理解决相关问题.

2. 理解弦切角的概念与性质定理，通过弦切角定理的证明，再次感受分类思想. 能用弦切角解决相关问题.

编写意图与教学建议

1. 圆的切线是初中生已有的概念，教学时主要是证明切线的性质与判定定理，并能应用这些定理解题. 而弦切角是学生初中没有接触的内容，所以应从概念引入、图形辨识入手，再进入定理的证明与应用，逐步深化，使学生能逐步熟练应用弦切角解题.

2. 圆的切线部分安排了 3 个例题，例 1 实质讲的是从圆外一点引圆的切线的几何作图方法；例 2 证明的是从圆外一点引圆的两条切线的性质. 这两个例题都有较重要的应用价值. 例 3 是应用切线性质定理的一个证明题，通过本例使学生明确当两圆相切时，利用公切线沟通题中条件是常用方法，同时也可指出，两圆相交时，连心线常常是沟通题目条件的重要辅助线. 由于弦切角是新的概念，因此安排了例 4、例 5 作为巩固新知的例题.

3. 圆周角定理与弦切角定理有一系列的推论，即圆内角定理、圆上角定理、圆外角定理. 下面介绍这几个定理，可以作为练习题：

若把顶点在圆内的角称为圆内角，**圆内角的度数等于其所夹弧及其对顶角所夹弧度数和的一半.**

证明：如图 5(1)，$\angle APB$ 的顶点在 $\odot O$ 内，两边交圆于点 A，B. 两边的反向延

长线交圆于点 C, D. 连结 AD. 则 $\angle APB=\angle ADB+\angle DAC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$.

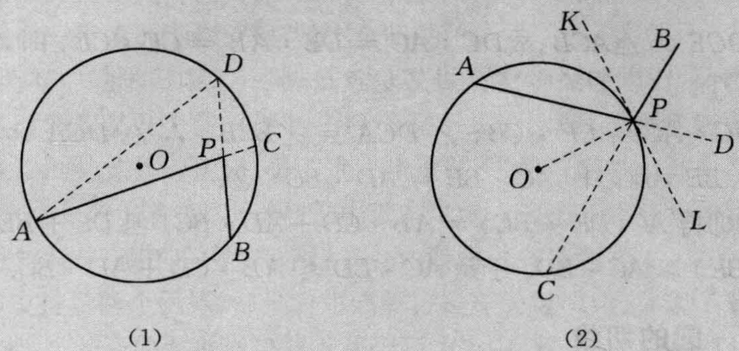

图 5

若把顶点在圆上的角称为圆上角,**圆上角的度数等于其所夹弧及其对顶角所夹弧度数和的一半.**

证明:如图 5(2),$\angle APB$ 的顶点在$\odot O$ 上,边 PA 交圆于点 A,边 PB 的反向延长线交圆于点 C. PD 为 PA 的反向延长线. 过点 P 作$\odot O$ 的切线 KL, 则 $\angle APB=\angle APK+\angle BPK=\angle APK+\angle LPC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AP}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{CP}$.

若把顶点在圆外且两边都与圆相交或相切的角称为圆外角,**圆外角的度数等于其所夹两弧度数差的一半.**

可以如图 6 添辅助线并仿照前面的定理证明方法证明此定理.

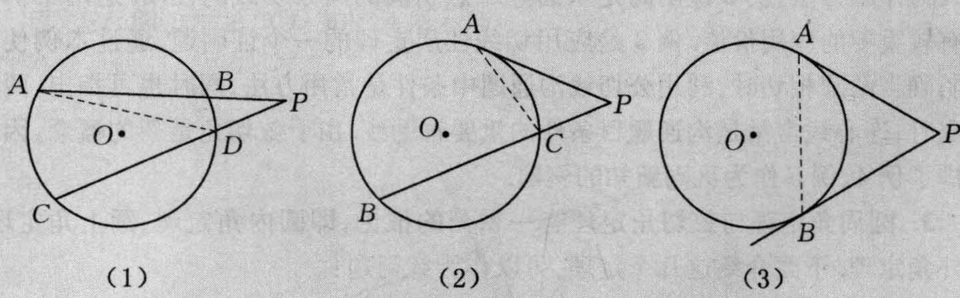

图 6

4. 本节最后安排了三角形的内切圆的内容,特别介绍了与内切圆有关的两