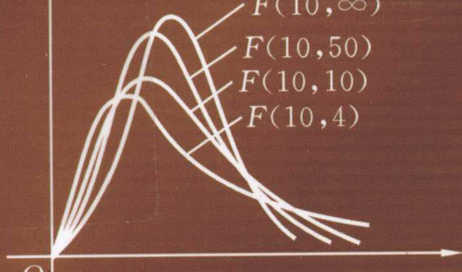
普通高等教育“十一五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

·经贸数学·

线性代数与概率统计

[redacted]斌　柳宿荣　主编



華中科技大学出版社
http://www.hustp.com

普通高等教育"十一五"规划教材
普通高等院校数学精品教材

经贸数学

线性代数与概率统计

主　编　梅家斌　柳宿荣
副主编　袁泽政　陈晶晶　曹剑文

华中科技大学出版社
中国·武汉

本书是为经管、经贸、财经类大专生所编写的数学教材，该教材共分上、下两册．本书是下册部分，内容包括行列式、矩阵、初等变换与解线性方程组、随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、样本及其统计量、参数估计、假设检验，共九章．

本书针对经管、经贸、财经类大专生数学知识相对薄弱的特点，在取材上以“必须、够用”为原则，同时注重结合专业特点，在选题上尽量与经济问题相结合，在教法上坚持“数学为人人”的理念，力求通俗、实用、生动、有趣．

对数学要求不高的其他专业的大专生也可使用本书．

图书在版编目(CIP)数据

经贸数学：线性代数与概率统计/梅家斌　柳宿荣　主编．—武汉：华中科技大学出版社，2010年1月

ISBN 978-7-5609-5950-4

Ⅰ．经…　Ⅱ．①梅…　②柳…　Ⅲ．①经济数学-高等学校-教材　②线性代数-应用-经济-高等学校-教材　③概率论-应用-经济-高等学校-教材　④数理统计-应用-经济-高等学校-教材　Ⅳ．F224

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 006563 号

经贸数学：线性代数与概率统计　　梅家斌　柳宿荣　主编

策划编辑：周芬娜
责任编辑：姚同梅　　封面设计：潘　群
责任校对：李　琴　　责任监印：周治超

出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　邮编：430074　电话：(027)87557437

录　排：武汉佳年华科技有限公司
印　刷：华中科技大学印刷厂

开本：710mm×1000mm　1/16　印张：10.25　字数：200 000
版次：2010年1月第1版　印次：2010年1月第1次印刷　定价：19.00元

ISBN 978-7-5609-5950-4/F·557

前　言

本书是专为经管、经贸、财经类大专生量身定做的教材，其内容包括行列式、矩阵、初等变换与解线性方程组、随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、样本及其统计量、参数估计、假设检验，共九章.

线性代数与概率统计是各类本、专科学生必修的重要基础课，它既是学习其他后续课程的基础和工具，又是专业技术人员素质教育的重要组成部分.

本书是编者根据教育部高等学校大专经济类各专业线性代数与概率统计课程的基本要求，结合编者长期从事该课程教学与研究的经验编写而成的.针对经管、经贸、财经类大专生数学知识和训练相对薄弱的特点，本着“数学为人人”的理念，本书在内容的取舍上，不拘泥于追求理论上的完整性与系统性，而是按照“必须、够用”要求；在教学观念上，不过分强求学生去更深刻地理解数学概念、原理与研究过程，而注重更多地让学生去理解数学的思想，掌握数学的方法与运算技巧.

本书在编写过程中，始终结合学生的专业特点，利用数学方法解决经济问题.在各章都列举了大量的经济应用例子及一些简单的数学模型，这也是本书的一大特色.这样有助于激发学生的学习兴趣，同时对提高学生解决实际问题的能力也是大有裨益的.

全书语言流畅，内容深入浅出，通俗易懂，可读性强，形象直观，便于自学.

本书由梅家斌、柳宿荣担任主编，由袁泽政、陈晶晶、曹剑文担任副主编.由于作者水平有限，错误和疏漏在所难免，恳请有关专家、同行及广大读者批评指正.

编　者

2010 年 1 月

目　　录

第 1 章　行列式…………………………………………………………（1）
1.1　行列式的概念 ………………………………………………（1）
1.1.1　二、三阶行列式………………………………………（1）
1.1.2　n 阶行列式 ……………………………………………（3）
练习 1.1 ……………………………………………………（4）
1.2　行列式的性质与计算 ……………………………………（5）
练习 1.2 ……………………………………………………（8）
1.3　行列式的展开计算 ………………………………………（9）
练习 1.3 …………………………………………………（10）
1.4　Cramer 法则 ………………………………………………（10）
练习 1.4 …………………………………………………（12）
内容小结 ……………………………………………………（13）
综合练习一 …………………………………………………（14）
第 2 章　矩阵 ……………………………………………………（15）
2.1　矩阵的概念…………………………………………………（15）
练习 2.1 …………………………………………………（18）
2.2　矩阵的线性运算与乘法…………………………………（18）
2.2.1　矩阵的加(减)法及数乘运算………………………（18）
2.2.2　两个矩阵的乘法………………………………………（20）
练习 2.2 …………………………………………………（23）
2.3　转置矩阵及方阵的行列式………………………………（24）
2.3.1　转置矩阵………………………………………………（24）
2.3.2　方阵的行列式…………………………………………（25）
练习 2.3 …………………………………………………（25）
2.4　方阵的逆矩阵……………………………………………（26）
2.4.1　逆矩阵的定义…………………………………………（26）
2.4.2　逆矩阵的性质…………………………………………（28）
2.4.3　逆矩阵的应用…………………………………………（29）
练习 2.4 …………………………………………………（31）
内容小结 ……………………………………………………（32）
综合练习二 …………………………………………………（33）

第 3 章　初等变换与解线性方程组 …… (35)
3.1　初等变换解线性方程组 …… (35)
练习 3.1 …… (39)
3.2　初等变换的应用 …… (40)
练习 3.2 …… (42)
3.3　矩阵的秩* …… (42)
3.3.1　矩阵的秩的概念 …… (42)
3.3.2　矩阵的秩的性质 …… (43)
练习 3.3 …… (44)
3.4　线性方程组解的定理* …… (44)
3.4.1　非齐次线性方程组 …… (44)
3.4.2　齐次线性方程组 …… (47)
练习 3.4 …… (49)
内容小结 …… (49)
综合练习三 …… (51)
第 4 章　随机事件及其概率 …… (53)
4.1　排列与组合* …… (53)
4.1.1　两个基本原理 …… (53)
4.1.2　排列与组合 …… (53)
练习 4.1 …… (55)
4.2　随机事件 …… (55)
4.2.1　随机现象 …… (55)
4.2.2　随机试验 …… (55)
4.2.3　样本空间 …… (56)
4.2.4　随机事件 …… (56)
4.2.5　随机事件与样本空间的关系 …… (57)
4.2.6　事件的关系和运算 …… (57)
练习 4.2 …… (60)
4.3　事件的概率 …… (61)
4.3.1　古典概型 …… (61)
4.3.2　概率的统计定义 …… (62)
4.3.3　概率的加法公式 …… (63)
练习 4.3 …… (64)
4.4　条件概率与乘法公式* …… (65)
练习 4.4 …… (67)

4.5　事件的独立性 …… (67)
4.5.1　两个事件的独立性 …… (67)
4.5.2　多个事件的独立性 …… (68)
练习 4.5 …… (69)
4.6　全概率公式与贝叶斯公式* …… (69)
4.6.1　全概率公式 …… (69)
4.6.2　贝叶斯公式 …… (71)
练习 4.6 …… (71)
内容小结 …… (71)
综合练习四 …… (72)
第 5 章　随机变量及其分布 …… (74)
5.1　随机变量的概念 …… (74)
练习 5.1 …… (75)
5.2　离散型随机变量及其分布 …… (75)
5.2.1　分布列的概念 …… (75)
5.2.2　分布列的性质 …… (76)
5.2.3　几种常见的离散分布 …… (76)
练习 5.2 …… (79)
5.3　连续型随机变量及其概率密度 …… (79)
5.3.1　密度函数的概念 …… (79)
5.3.2　密度函数的性质 …… (80)
5.3.3　几种常见的连续分布 …… (81)
练习 5.3 …… (82)
5.4　分布函数 …… (82)
5.4.1　分布函数的概念 …… (82)
5.4.2　分布函数的性质 …… (83)
5.4.3　离散型随机变量的分布函数 …… (83)
5.4.4　连续型随机变量的分布函数 …… (84)
练习 5.4 …… (85)
5.5　正态分布 …… (85)
5.5.1　一般正态分布 …… (85)
5.5.2　标准正态分布 …… (86)
练习 5.5 …… (88)
内容小结 …… (89)
综合练习五 …… (90)

第 6 章　随机变量的数字特征 …… (92)
6.1　数学期望…… (92)
练习 6.1 …… (94)
6.2　方差…… (95)
6.2.1　方差的定义…… (95)
6.2.2　方差的计算公式…… (95)
6.2.3　方差的性质…… (97)
练习 6.2 …… (97)
内容小结 …… (97)
综合练习六 …… (99)
第 7 章　样本及其统计量…… (100)
7.1　样本及其数字特征 …… (100)
7.1.1　总体和个体 …… (100)
7.1.2　样本和样本值 …… (101)
7.1.3　简单随机抽样 …… (101)
7.1.4　样本均值和样本方差的概念 …… (101)
练习 7.1 …… (102)
7.2　统计量及其分布 …… (102)
7.2.1　统计量 $U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$ 的分布 …… (102)
7.2.2　统计量 $T=\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}}$ 的分布 …… (103)
7.2.3　统计量 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 的分布 …… (103)
7.2.4　统计量 $F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$ 的分布 …… (104)
7.2.5　上侧 α 分位点(临界值) …… (104)
练习 7.2 …… (105)
内容小结…… (106)
综合练习七…… (107)
第 8 章　参数估计…… (108)
8.1　点估计 …… (108)
练习 8.1 …… (111)
8.2　区间估计 …… (111)
练习 8.2 …… (115)

内容小结……………………………………………………………………（116）
综合练习八…………………………………………………………………（117）
第9章　假设检验…………………………………………………………（118）
9.1　假设检验 ……………………………………………………………（118）
练习 9.1 ……………………………………………………………………（119）
9.2　正态总体的假设检验 ………………………………………………（119）
9.2.1　u 检验法 ………………………………………………………（120）
9.2.2　t 检验法 ………………………………………………………（120）
9.2.3　χ^2 检验法 …………………………………………………（121）
9.2.4　F 检验法 ………………………………………………………（122）
练习 9.2 ……………………………………………………………………（123）
内容小结……………………………………………………………………（123）
综合练习九…………………………………………………………………（124）
附表Ⅰ　泊松分布表……………………………………………………（126）
附表Ⅱ　正态分布表……………………………………………………（128）
附表Ⅲ　χ^2 分布表 ………………………………………………（129）
附表Ⅳ　t 分布表 ……………………………………………………（132）
附表Ⅴ　F 分布表……………………………………………………（134）
部分习题答案与提示……………………………………………………（144）

第1章　行　列　式

行列式的概念最初是在解线性方程组的过程中形成的，它也是矩阵的一个重要的数值特征，在研究矩阵的秩及讨论向量组的线性相关性等问题中起着重要作用.

本章首先在介绍二、三阶行列式的基础上给出 n 阶行列式的定义，然后讨论行列式的性质和按行(列)展开方法，最后给出 Cramer 定理.

1.1　行列式的概念

1.1.1　二、三阶行列式

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & ① \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & ② \end{cases} \tag{1-1}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 为系数，$b_i(i=1,2)$ 为常数项.

对方程组(1-1)用消元法求解，由 $a_{22}\times①-a_{12}\times②$，消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，得

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

用同样的方法消去 x_1，得

$$x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

为了方便记忆，引入 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，并规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1-2}$$

D 称为**二阶行列式**. 它由两行、两列组成，$a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为元素，其中 i 称为**行标**，表示该元素所在的行，j 称为**列标**，表示该元素所在的列，如元素 a_{12} 位于一行二列等. 从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**，从右上角到左下角的对角线称为**副对角线**.

利用式(1-2)得二阶行列式对角线法则如下：

二阶行列式等于主对角线两元素的积减去副对角线两元素的积.

经过观察不难发现，x_1，x_2 的分母及分子分别为行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

因此，当 $D\neq 0$ 时，方程组(1-1)的解可唯一地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}$$

于是得二元线性方程组的 Cramer 法则如下：

如果线性方程组(1-1)的系数行列式 $D\neq 0$，则有唯一的解 $x_1=\frac{D_1}{D}$，$x_2=\frac{D_2}{D}$，其中 D 是由方程组的系数构成的系数行列式，$D_j(j=1,2)$分别为用常数项置换 D 中的第 j 列后得到的行列式.

例 1 解二元线性方程组.

$$\begin{cases} x_1-2x_2=1 \\ 2x_1-3x_2=0 \end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=1$，$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}=-3$，$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-2$

故 $$x_1=\frac{D_1}{D}=-3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-2$$

通过上面的讨论，我们自然会联想到，对于三元线性方程组能否引入相应的三阶行列式，并建立相应的 Cramer 法则求解呢？下面讨论这个问题.

设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1-3}$$

用消元法逐步消去 x_2，x_3，得

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33})x_1 \\ &=b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{13}a_{32}+b_3a_{12}a_{23}-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}-b_3a_{22}a_{13}\end{aligned} \tag{1-4}$$

将 x_1 的系数记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

D 称为**三阶行列式**，它由三行三列的 9 个元素构成.

由等式可确定三阶行列式的对角线法则如下：

主对角线及与之平行的两对角线(如图 1-1 中实线部分所示)三元素之积取正

号，副对角线及与之平行的两对角线三元素之积（如图 1-1 中虚线部分所示）取负号. 三阶行列式等于上述各项乘积的代数和.

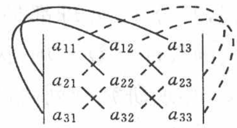


图 1-1 三阶行列式

利用三阶行列式的对角线法则可将式(1-4)右端的项表示为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

因此，当 $D\neq 0$ 时，有
$$x_1=\frac{D_1}{D}$$

同理可得
$$x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中
$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

于是可建立三元线性方程组的 Cramer 法则如下：

对于三元线性方程组(1-3)，当系数行列式 $D\neq 0$ 时，有唯一解 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}$. 其中 D_j 为 D 中第 j 列用常数项置换所得的行列式.

例 2 解三元线性方程组.

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=4 \\ x_1-x_2+2x_3=5 \\ 2x_1-x_2+x_3=3 \end{cases}$$

解
$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=8,\quad D_1=\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=8$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=16,\quad D_3=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=24$$

故
$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=3$$

1.1.2 n 阶行列式

二、三阶行列式的对角线法则能否直接推广到更高阶的行列式上去呢？回答是否定的. 这是因为，对角线法则是由二、三元线性方程组的解来确定的，高于三元的线性方程组的解是不能用由对角线法则确定的行列式来表示的. 事实上，对于四元线性方程组

的解，其分子、分母都是每项由 4 个元素组成的 24 项的代数和，而按四阶行列式的对角线法则仅能计算 8 项. 因此，对角线法则仅适用于二、三阶行列式. 要将行列式作一般性定义，必须研究行列式的结构，同时还要引入逆序数的概念，这里不作介绍.

需要指出的是，n 阶行列式可表示为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-5}$$

它是一个数. 对于高于三阶的行列式可以利用行列式的性质及展开法则来计算，这在下一节再介绍. 下面介绍几个常见的重要行列式.

（1）行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为**下三角行列式**，其特点是主对角线以上的元素全为零.

（2）行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为**上三角行列式**，其特点是主对角线以下元素均为 0. 可以证明，无论是上三角行列式还是下三角行列式，其值都等于主对角元素的乘积，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

作为特殊情况，有对角线行列式

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

练　习　1.1

1. 计算下列三阶行列式的值.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$$

2. 解下列线性方程组.

(1) $\begin{cases} x_1\cos\theta - x_2\sin\theta = a \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta = b \end{cases}$; (2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

1.2 行列式的性质与计算

下面将不加证明地给出行列式的有关性质,并利用这些性质进行计算.

先介绍转置行列式.

设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把 D 的行换成同序数的列所得的行列式称为 D 的**转置行列式**,记为 D^{T} 或 D',即

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

显然,

$$(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = D$$

性质 1 行列式与其转置行列式相等,即 $D^{\mathrm{T}} = D$.

上述性质说明行列式的行、列是对称的,凡对行成立的性质,对列必然成立.下面的性质仅对行给出,要注意它们对列也都是成立的(读者可自行验证).

性质 2 用数 k 乘行列式 D 等于 k 乘 D 的任一行(列).

例如

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 1 行列式中某行(列)元素的公因子可提到行列式外面来.

将 D 的第 i 行(列)的公因子 k 提到行列式外面来,用记号 $r_i \div k(c_i \div k)$表示.

性质 3 若交换行列式任意两行(列),则行列式变号.

交换行列式 i,j 两行(列)用 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$ 表示.

推论 2 行列式有两行(列)相同,则其值为 0.

证明 设 D 的 i,j 两行相同,由性质 3 有

$$D\xlongequal[r_i\leftrightarrow r_j]{}-D\Rightarrow 2D=0\Rightarrow D=0$$

推论 3 行列式中有两行(列)对应元素成比例,则其值为 0.

利用推论 1 及推论 2 即得,证明略.

性质 4 若行列式的第 i 行(列)的每个元素都可表示成两数之和,即

$$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}(j=1,2,\cdots,n)$$

则行列式可表示为两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5 把行列式的第 j 行(列)的各元素的 k 倍加到第 i 行(列)的对应元素上去,行列式的值不变,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 由性质 4 将上式展开得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{推论 3}}D$$

证毕.

将行列式第 j 行(列)各元素的 k 倍加到第 i 行(列)对应元素上,记为 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$.

性质 2、3、5 为行列式的三种初等变换，通常分别称为**数乘变换**、**对换变换**和**消元（倍加）变换**. 这三种变换是在行列式的计算中用得最多的，要特别注意.

在行列式的计算中通常是利用上述三种初等变换将其化成三角形行列式，从而求得其值.

例 3 计算下列行列式.

(1) $D=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 3\\1 & 0 & 2 & 1\\2 & 1 & -5 & 5\\0 & 2 & -7 & 1\end{vmatrix}$； (2) $D=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\1 & 3 & 1 & 1\\1 & 1 & 3 & 1\\1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}$

解 (1) $D=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 3\\1 & 0 & 2 & 1\\2 & 1 & -5 & 5\\0 & 2 & -7 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\3 & 1 & 1 & 3\\2 & 1 & -5 & 5\\0 & 2 & -7 & 1\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}-\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\0 & 1 & -5 & 0\\0 & 1 & -9 & 3\\0 & 2 & -7 & 1\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-2r_2]{r_3-r_2}-\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\0 & 1 & -5 & 0\\0 & 0 & -4 & 3\\0 & 0 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+\frac{3}{4}r_3}-\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\0 & 1 & -5 & 0\\0 & 0 & -4 & 3\\0 & 0 & 0 & \frac{13}{4}\end{vmatrix}=-1\times1\times(-4)\times\frac{13}{4}=13$$

这里第一步对换第一、二两行的目的，是为了使第一行第一个元素变成 1，以便将第一列其他元素化为 0.

(2) 稍加观察不难发现，该行列式每列元素之和均为 6，由此可将各行加到第一行，再提出公因子.

$$D=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\1 & 3 & 1 & 1\\1 & 1 & 3 & 1\\1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}6 & 6 & 6 & 6\\1 & 3 & 1 & 1\\1 & 1 & 3 & 1\\1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\div 6}6\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 3 & 1 & 1\\1 & 1 & 3 & 1\\1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1\\r_4-r_1}}6\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=6\times2\times2\times2=48$$

例 4 试证明

$$D=\begin{vmatrix}1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3\\1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3\\1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3\end{vmatrix}=0$$

证明 $D \xlongequal{\text{按第一列展开}} \begin{vmatrix} 1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ 1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix}$

从右边第一式第二、三列中分别减去第一列，从第二式中第一列提取 y_1 得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ 1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ 1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{vmatrix} + y_1\begin{vmatrix} x_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ x_2 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ x_3 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix}$$

从上式右边第一式第二、三列中提取公因子 y_2,y_3，第二式第二列减第一列的 y_2 倍，第三列减第一列的 y_3 倍得

$$D=y_2y_3\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1 \\ 1 & x_2 & x_2 \\ 1 & x_3 & x_3 \end{vmatrix} + y_1\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

练　习　1.2

1. 已知 204，527，255 都能被 17 整除，利用行列式的性质证明 $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$ 亦能被 17 整除.

2. 计算下列行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$；

(3) $D_n=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$.

3. 证明：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$；

(2) $\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$.

4. 求方程 $\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix}=0$ 的根.