



新教材

◎ XINJIAOCAI WANQUANJIEDU ◎

完全解读

新课标

与最新教材完全同步
重点难点详尽解读

数学

高中（必修1）

主 编：张柏林 于文波
孙恒来 黄海萍

吉林人民出版社





新教材

XINJIAOCAIWANQUANJIEDU

完全解读

数学

新课标·人A
高中(必修1)

主 编:	张柏林	于文波	孙恒来	黄海萍
副 主 编:	张振栋	徐秀玲	张娟伟	邸秀芳
	王青春			
编 者:	杨久生	张云启	张文里	李永波
	张文思	项玉田	王金山	齐振学

吉林人民出版社



策 划:吉林人民出版社综合编辑部策划室

执行策划:王婕妤 田艳波

新教材完全解读·高中数学必修1 新课标(人A)

吉林人民出版社出版发行(中国·长春人民大街7548号 邮政编码:130022)

网址:www.zigengguoji.com 电话:0431-85202911

主 编 张柏林 于文波 孙恒来 黄海萍

责任编辑 张长平 王胜利

平面设计 魏 晋 薛雯丹

责任校对 曲微微

版式设计 邢 程

印刷:北京市梓耕印刷有限公司

开本:880×1230 1/32

印张:38 字数:1300千字

标准书号:ISBN 978 - 7 - 206 - 04471 - 7

2010年4月第6版 2010年4月第1次印刷

全套定价:68.20元

如发现印装质量问题,影响阅读,请与印刷厂联系调换。联系电话:(010)89579201
图书质量反馈电话:(0431)85202911 售书热线:(010)85710890

《新教材完全解读》自出版以来,就深受广大师生的好评,一直畅销全国。今年在保持总体风格不变的前提下,对图书品质进行了精心的打造和全面的提升,使其真正达到更新、更准、更细、更实用。修订后的数学学科具有七大亮点——

亮点

完全与教材同步,核心知识深入解读。

完全与教材同步,以每个知识点为讲解元素,结合【知识拓展】、【探究交流】、【规律方法小结】等栏目设计,突破重点,化解难点,诠释疑点,核心解读,精、准、全、透。

教材解读

解读教材知识点

普查

为一定目的而对所有考察对象所做的全面调查叫做普查。

(1)普查是通过对调查研究的总体中的每一个个……

深化知识的内涵和外延

提炼规律,总结方法

(2)抽样调查对对象必须具有代表性。(2)普查时……

开拓视野,拓展思维

亮点

例题归类全面精准,规律方法及时总结。

紧扣教材知识,按照考查点准确归类,精准解读典型例题,透彻分析解题思路,适时总结规律方法,优化解题思维,培养创新意识,提升实践能力。

典例剖析

考查点:对基本概念的理解及应用

【例】在下列调查中,哪些是普查?哪些是抽样调查?请说明该种调查方式是

【分析】(1)调查方式的区分依据定义比较简便。普查是对全体对象进行考察的……

【解】(1)普查:对全体对象进行考察。普查:对全体对象进行考察。……

【解】(2)抽样调查:对部分对象进行考察。……

亮点

化解疑难易错,警示思维误区。

全面解析学习过程中的易错点、疑难点,明确思路转折点,释疑解惑,纠错反思,弥补疏漏,使学习效果日臻完善。

易错疑难辨析

易错点:不能正确选择调查方式

【易错点辨析】对普查和抽样调查的含义及特点理解不清,不能深入地下解释

【例】为了统计我国各省市人口在一年中旅游人数随季节的变化情况……

【分析】产生错解的原因是第一无二次方形的各项系数,没有将……

【错误方法】选择抽样调查的理由是,先判断总体中个体有无差异……

亮点 4

把握高考命题动向，体现地域化考试特点。

明确高考重点、难点、热点问题，科学预测命题趋势，配合各版本教材的不同特点，精选各地高考名题，突显区域化的考试特点，并进行细致入微的讲解和点评，运筹帷幄，决胜千里，提高应试能力。

高考解读

高考命题总结与展望

随机选取数据是抽样的一种，其中需要避免主观与客观因素的干……

高考真题解读与预测

例 38 (广东) 某班 45 名学生的体重记录如下：(单位：千克)
48, 48, 42, 50, 61, 44, 43, 51, 46, 46, 51, 46, 50, 45, 52.

亮点 5

教材课后习题，答案全解全析。

与教材同步，跟教学配合，全面解读教材习题，讲析结合，详略得当，启发多角度思维，精准点拨解题思路，具有很强的针对性、实用性。

习题全解

练习

1. 解：抽样调查就是通过从总体中抽取一部分个体进行调查，借以获得对总体特性的了解，所以如何抽取样本，直接关系着对总体估计的准确程度。抽样时，要……

亮点 6

系统整合知识，突破热点专题。

在细致讲练的基础上，归纳、总结出综合性、创新性、能力性更强的问题、方法、题型，以专题的形式专项讲解，拓展突破。

专题总结及应用

专题1 三种抽样方法的比较

【知识梳理】简单随机抽样、系统抽样、分层抽样的比较如……

例 39 ①某社区有 500 个家庭，其中高收入家庭 125 户，中收入……

【分析】产生错觉的原因是可一元二次方程的各项系数时，没有……

【规律·方法】选择抽样方法的标准是：先判断总体中个体有无差异……

亮点 7

体现资料性、趣味性，开拓视野。

每节内容均采用了集知识性和趣味性于一体的材料揭示主题，提出问题，使知识形象化，促进理解，引起思考，配合【趣味数学】栏目的设置，使学习更有趣、更主动、更轻松。

当心样本欺骗了你

1936年，美国进行总统选举，参加竞选的有民主党的罗斯福和共和党的兰登，罗斯福是在任总统。

美国权威的《文学摘要》杂志社，为了预测总统候选人谁能当选，采用了大规模的模拟选举，他们以电话簿上的地址和俱乐部成员名单上的地址发出了1000万封信，收到回信200万封。在调查史上，样本容量这么大量是少见的……



梓耕品质 用成绩体现

《尖子生学案》

教你如何成为尖子生

★本书是讲解类辅导书，对教材知识体系高度整合，多维解读。对教材中基础知识、重难点、易错易混点，结合典型题、中(高)考原题、改编题、探究题、原创题等题型进行精准解读。对教材中的小资料、数据、图片、提示等小栏目内容进行隐性知识的挖掘，使学生全面完整地吃透教材。

★本书含有教材课后习题解答，并设有随堂练习和单元测评，便于学生课后检测，是学习的好帮手。

★本书对于中等生、一般学生，都能在学习中通过自主探究→储备基础；研读教材→掌握知识；高效解题→提升能力；巧做笔记→学会技巧；学法突破→总结规律；思维拓展→开阔视野，实现学习技能、方法、习惯的全面完善，使其成为尖子生。

《点对点·讲与练双向激活》

一点一讲一练 练就考试成绩
一题一解一点 点拨成功智慧

✓本书按课堂反馈、课后提高、自主探究三个层次设置习题，同步到每课(节)，细化到课时，是一本非常适合进课堂的辅导书。

✓本书以练为主，双栏对照，点对点讲解，在练习过程中全面落实知识点、能力点，解决了学生只知道概念、公式、定理，而不会做题的问题。

✓本书紧扣课标，以开放性、探究性为突破口，选取了典型题、创新题、实践应用题、时事热点题等鲜活题型，让您练有所得，习有所成。

✓本书为优等生、中等生、一般生的学习提供了差异化的训练方案。答案单独装订，全解全析，便于老师统一指导及家长课后辅导。



《零失误》

中学教材·全面讲解
中学教材·分层训练

刷新学习概念，升级思维方式
零失误学习，最低成本的超越之道

讲练：教材重点、知识盲点、中(高)考热点、
解题弱点、解题速度、解题准确率
点拨：疑难点、易错点、易混点、规律方法
考评：基础题全做对、中档题不丢分、拔高
题多得分、易错题少丢分、考试得满分



目 录

CONTENTS

第一章 集合与函数概念

本章视点 1

1.1 集 合

1.1.1 集合的含义与表示

新课导读	2
教材解读	2
典例剖析	5
易错疑难辨析	9
高考解读	9
课堂小结	10
习题全解	11
自我评价	11

1.1.2 集合间的基本关系

新课导读	13
教材解读	13
典例剖析	15
易错疑难辨析	18
高考解读	19
课堂小结	20
习题全解	20
自我评价	20

1.1.3 集合的基本运算

新课导读	22
教材解读	22
典例剖析	25
易错疑难辨析	29
高考解读	30
课堂小结	31
习题全解	32
自我评价	33

1.2 函数及其表示

1.2.1 函数的概念

新课导读	36
教材解读	36
典例剖析	40

易错疑难辨析	48
高考解读	49
课堂小结	50
习题全解	51
自我评价	52

1.2.2 函数的表示法

新课导读	54
教材解读	54
典例剖析	57
易错疑难辨析	62
高考解读	63
课堂小结	64
习题全解	65
自我评价	67

1.3 函数的基本性质

1.3.1 单调性与最大(小)值

新课导读	70
教材解读	70
典例剖析	73
易错疑难辨析	80
高考解读	81
课堂小结	82
习题全解	82
自我评价	83

1.3.2 奇偶性

新课导读	86
教材解读	86
典例剖析	88
易错疑难辨析	98
高考解读	99
课堂小结	100
习题全解	101
自我评价	105

章末总结 108

本章综合评价 118

第二章 基本初等函数(1)

本章视点	125
2.1 指数函数	
2.1.1 指数与指数幂的运算	
新课导读	126
教材解读	126
典例剖析	128
易错疑难辨析	133
高考解读	133
课堂小结	134
习题全解	135
自我评价	135
2.1.2 指数函数及其性质	
新课导读	137
教材解读	137
典例剖析	140
易错疑难辨析	149
高考解读	149
课堂小结	151
习题全解	152
自我评价	153
2.2 对数函数	
2.2.1 对数与对数运算	
新课导读	156
教材解读	157
典例剖析	159
易错疑难辨析	168
高考解读	169
课堂小结	170
习题全解	170
自我评价	171
2.2.2 对数函数及其性质	
新课导读	173
教材解读	173
典例剖析	176
易错疑难辨析	186
高考解读	188
课堂小结	191
习题全解	192
自我评价	194
2.3 幂函数	
新课导读	197
教材解读	197

典例剖析	200
易错疑难辨析	204
高考解读	205
课堂小结	207
习题全解	207
自我评价	210
章末总结	213
本章综合评价	219

第三章 函数的应用

本章视点	225
3.1 函数与方程	
3.1.1 方程的根与函数的零点	
新课导读	226
教材解读	226
典例剖析	228
易错疑难辨析	232
高考解读	233
课堂小结	235
习题全解	236
自我评价	237
3.1.2 用二分法求方程的近似解	
新课导读	240
教材解读	240
典例剖析	241
易错疑难辨析	245
高考解读	246
课堂小结	248
习题全解	248
自我评价	251
3.2 函数模型及其应用	
新课导读	253
教材解读	253
典例剖析	255
易错疑难辨析	261
高考解读	262
课堂小结	264
习题全解	265
自我评价	270
章末总结	274
本章综合评价	284

本模块学习评价	291
---------	-----

集合与函数概念

本章视点

视点 1 本章概述

本章主要讲述集合的定义和表示法以及集合间的基本关系和运算,它是我们学习和掌握数学语言的基础,在以后的学习中将得到充分体现.集合是近代数学的一个非常重要的基础,许多数学分支都是建立在集合论的基础上的,集合论及其所反映的数学思想在越来越广泛的领域中得到应用.

视点 2 本章学习重难点

【本章重点】 集合的含义,集合间包含与相等的关系,两个集合的交集与并集的含义,函数的概念和性质.

【本章难点】 会用集合语言表达数学对象或相关的数学内容;对函数概念的理解及表示方法的恰当选择;函数单调性、奇偶性的判定与应用.

【学习本章应注意的问题】

1. 和初中相关的数学知识做好衔接,为新知识的学习做好准备.
2. 认真思考,准确理解本章各知识点,注意相近知识的区别.
3. 在学习过程中,要养成从实验出发,由感性到理性的学习习惯,逐步培养观察、比较、抽象、概括的能力,培养严谨的学习态度.
4. 通过具体实例的观察、思考、探索,理解集合的概念与表示方法.
5. 从实际问题中去探索、观察、发现集合的基本关系、基本运算,注意概念之间、符号之间的比较,抽象与具体相结合,多角度去理解、把握.
6. 在初中所学函数的基础上,进一步加深对函数概念的理解,明确函数的构成要素,会发现函数是描述变量之间关系的重要数学模型,总结出函数的表示方法,并加以比较.
7. 从实际问题的需要去研究、探讨函数的基本性质,会用数学符号刻画相应的数量特征.
8. 从初中用变化的观点理解函数概念到高中用集合和对应关系来理解函数,需从认知结构上发生变化,如何实现这一转变是学习的关键.

视点 3 高考透视

集合与函数是每年必考的知识点,其中函数是高考数学中极为重要的内容.纵观近几年的高考试题,该章在选择、填空、解答三种题型中每年都有试题,约占全卷分值的 20%.近几年对集合的计算的考查,多以基础题为主,如 08 年山东高考题第 1 题,全国 II 高考题第 1 题.函数的图象与性质的考查有选择题,如 08 年全国 I 高考题第 1 题,也有解答题.函数这部分的应用题,不仅有解答题,还可能有选择题或填空题,高考正在逐步增加应用题的考查力度,并且应用题多在知识网络交汇处命题.估计在 2009 年高考中该章知识点仍是命题的重点、热点,应引起高度重视.



1.1

集合

1.1.1 集合的含义与表示

新课导读

情境引入

【生活链接】一位渔民非常喜欢数学，但他怎么也想不明白集合的意义，于是他请教数学家：“尊敬的先生，请您告诉我，集合是什么？”集合没有确定的定义，数学家很难回答这位渔民。

有一天，数学家来到渔民的船上，看到渔民撒下渔网，轻轻一拉，许多鱼虾在网中跳动。数学家非常激动，高兴地告诉渔民：“这就是集合！”

【问题探究】你能理解数学家的这句话吗？

【点拨】数学家直观地描述了集合的概念，渔民撒下渔网一拉，一部分鱼虾就落在网中，于是把落在网中的所有鱼虾看成一个整体，就构成了一个集合。

教材解读

精华要义

知识点1 元素与集合的概念 重点：理解

一般地，我们把研究对象统称为元素，把一些元素组成的总体叫做集合（简称集）。

为了更好地理解它，我们看看下列几组对象。

- (1) 1, 2, 3, 4, 5;
- (2) $x+3$, $5y^2-2$, x^2+y^2+4x+3 ;
- (3) 与一个角的两边距离相等的所有点；
- (4) 某农场所有的拖拉机；
- (5) 所有的长方形。

经过分析，(1)可以看成是由数 1, 2, 3, 4, 5 组成的集合，其中的对象 1, 2, 3, 4, 5 就是这个集合中的元素；(2)是由一些代数式组成的集合；(3)是由一些点组成的集合，这些点就是集合中的元素；(4)是由一些物体组成的集合；(5)是由一些图形组成的集合，也就是说，组成集合的元素可以是数、代数式、点、物体、图形……

知识点2 集合中元素的特性 重点：掌握

☑ 确定性

对于给定的集合，它的元素必须是确定的，也就是说，若给定一个集合 A ， x 是某一具体对象，则 x 或者是 A 中的元素，或者不是 A 中的元素，二者必居其一。

例如：在“大于 3 且小于 11 的偶数”组成的集合中，4 是这个集合中的元素，12 不



是这个集合中的元素.

又如:“我国的小河流”不能构成集合,因为“小河流”标准不明确.类似地,“个子很高的同学”、“漂亮的同学”都不能构成集合,因为它们不符合集合中元素的确定性.

☑ 互异性

一个给定集合中的元素是互不相同的,也就是说,集合中的元素是不重复出现的,相同的元素在一个集合中只能算作一个元素.

例如:方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的两个根 $x_1 = x_2 = 1$,用集合记为 $\{1\}$,而不能记作 $\{1, 1\}$.

又如:把集合 $\{2, 3, 5\}$ 与 $\{3, 5, 7\}$ 合并在一起,构成一个新的集合,只能是 $\{2, 3, 5, 7\}$,而不是 $\{2, 3, 5, 3, 5, 7\}$.

☑ 无序性

集合中的元素的排列是无顺序的,如集合 $\{a, b, c\}$ 与 $\{c, b, a\}$ 相同.只要构成两个集合的元素是一样的,我们就称这两个集合是相等的.



根据集合中元素的特性回答下列问题.

(1)“高一·二班所有高个子同学”能不能构成集合?“高一·二班所有身高在 180 cm 以上的同学”呢?

(2)由 $a, -a, |a|, \sqrt{a^2}$ 构成的集合中,最多含有几个元素?

点拨 (1)前者不能构成集合,而后者可以.本质区别在于“高个子”的定义不明确,怎样算高,175 cm 以上,还是 180 cm 以上,还是更高?不确定.再比如“性格开朗的同学”、“比较大的自然数”也不能构成集合.

(2)当 $a=0$ 时,四个数都为 0,只含有一个元素,此时集合为 $\{0\}$;当 $a \neq 0$ 时,含有两个元素 $a, -a$,此时集合为 $\{-a, a\}$.所以此集合最多含有两个元素.

知识点 3 集合与元素的关系

了解

集合通常用大写拉丁字母 $A, B, C, \dots$ 表示,元素用小写拉丁字母 $a, b, c, \dots$ 表示.

如果 a 是集合 A 中的元素,就说 a 属于集合 A ,记作 $a \in A$,读作 a 属于集合 A .

如果 a 不是集合 A 中的元素,就说 a 不属于集合 A ,记作 $a \notin A$,读作 a 不属于集合 A .

知识拓展

(1) $a \in A$ 与 $a \notin A$ 取决于 a 是不是集合 A 中的元素,根据集合中元素的确定性可知,对任意 a 与 A ,在 $a \in A$ 或 $a \notin A$ 这两种情况中,必有一种且只有一种成立.

(2)符号“ $\in$ ”,“ $\notin$ ”是用来表示元素与集合之间关系的,不能用来表示集合与集合之间的关系.

(3)元素的互异性也可以理解为:若 $x_1 \in A, x_2 \in A$,则必有 $x_1 \neq x_2$.



判断下列说法是否正确.

(1)大于 1 且小于 10 的偶数可以构成集合;

(2)漂亮的演员可以组成一个集合;



(3) 集合 $\left\{1, \frac{3}{2}, 2, 2.5, 1.5\right\}$ 含有 5 个元素;

(4) $\{1, 2, 3\} \neq \{3, 2, 1\}$;

(5) $a \in A$ 与 $a \notin A$ 可同时成立.

点拨 (1) 正确. 因为集合中的元素是 2, 4, 6, 8. 对于任何一个实数 x , 都可以明确地判断其是不是大于 1 且小于 10 的偶数.

(2) 不正确. 因为集合中的元素必须具有确定性, 而“漂亮”是个模糊不定的标准, 不符合集合中元素的确定性.

(3) 不正确. 对于一个集合中的元素必须是互异的, 而此集合中 $\frac{3}{2} = 1.5$, 故不正确.

(4) 不正确. 根据集合中元素的无序性, 表示一个集合时, 可以不考虑元素的顺序.

(5) 不正确. 元素与集合的关系是唯一的, 不能同时满足 $a \in A$ 和 $a \notin A$.

知识点 数学中一些常用的数集及其记法 重点、难点

全体非负整数组成的集合称为非负整数集(或自然数集), 记作 $\mathbf{N}$.

所有正整数组成的集合称为正整数集, 记作 $\mathbf{N}^+$ 或 $\mathbf{N}_+$.

全体整数组成的集合称为整数集, 记作 $\mathbf{Z}$.

全体有理数组成的集合称为有理数集, 记作 $\mathbf{Q}$.

全体实数组成的集合称为实数集, 记作 $\mathbf{R}$.

知识点 集合的表示方法 重点、难点; 灵活运用

集合可以用列举法、描述法和图示法表示.

☑ 列举法

把集合的元素一一列举出来, 并用花括号“ $\{ \}$ ”括起来表示集合的方法叫做列举法. 其特点是表示完整、清楚. 如方程 $(x-2)(x-3)=0$ 的解集为 $\{2, 3\}$. 但并不是任何集合都可以用这种方法来表示.

列举法适用于集合中元素较少的、可以列举出来的, 而有些集合中的元素是列举不完的, 但是我们可以用这个集合中的元素所具有的共同特征来描述, 也就是集合的另一种表示方法——描述法.

☑ 描述法

用集合所含元素的共同特征表示集合的方法称为描述法. 具体方法是: 在花括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值(或变化)范围, 再画一条竖线, 在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征, 它的一般形式是 $\{x \in A | p(x)\}$, x 表示集合元素, A 表示 x 的取值范围, $p(x)$ 表示元素应满足的关系. 如方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解可表示为 $\{x \in \mathbf{R} | x^2 - 1 = 0\}$. 如果 x 的取值范围 A 是很明确的, 可把 A 省去. 如上述集合又可写成 $\{x | x^2 - 1 = 0\}$, 也可写成 $\{x | x^2 - 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$. 另外注意区分以下几个集合的不同, $A = \{(x, y) | y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y | y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$, 其中 A 指抛物线 $y = x^2$ 上所有点组成的集合, B 指抛物线 $y = x^2$ 上所有点的纵坐标的集合, 即 $B =$



$\{y|y \geq 0\}$.

图 示 法

用一条封闭的曲线所围成的图形的内部表示一个集合,另外还可以利用数轴、平面直角坐标系等表示集合.

例如:用集合的三种表示方法表示大于 5 且小于 10 的整数.

解:列举法: $\{6, 7, 8, 9\}$.

描述法: $\{x|5 < x < 10, x \in \mathbf{Z}\}$.

图示法:如图 1-1 所示.

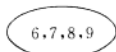


图 1-1

规律方法小结 (1)用列举法表示集合时,只需把它的元素一一列举出来即可,

不必考虑元素间的顺序.能否用列举法表示集合的唯一依据是看它的元素能否一一列举出来.并不是任何集合都能用列举法来表示,根据列举法的定义,只有能够列举出所有元素的集合才能用列举法来表示.如 $x^3 < 3$ 的解集就不能用列举法来表示,因为这个集合的元素是永远列举不完的.

(2)用列举法表示集合时,要注意自然语言与集合语言描述的集合中的元素一一确定出来,又要善于把列举法表示的集合用自然语言表述出来.如方程 $x^2 = 1$ 的根组成的集合是 $\{-1, 1\}$,而该集合可描述为方程 $x^2 = 1$ 的根或绝对值等于 1 的数等.

(3)使用描述法时,需注意以下几点:

①写清楚该集合中元素的代号(字母或用字母表示的元素符号);

②说明该集合中元素的性质;

③所有描述的内容都要写在集合符号内;

④用于描述的语句要求简明准确;

⑤在不致引起混淆的情况下,所有的非负数组成的集合可记为 $\{x|x \geq 0\}$.当集合是数集时,在没有标明 x 范围的前提下,我们认为 x 的值是使式子有意义的所有的值.如 $\left\{y \middle| y = \frac{1}{x}\right\}$,此时我们认为 $x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq 0$.由反比例函数的性质,可知该集合可化为 $\{y|y \in \mathbf{R} \text{ 且 } y \neq 0\}$.当用文字语言来描述集合中元素的特征或性质时,分隔号及前面的部分常常省去,如“所有四边形组成的集合”记为 $\{x|x \text{ 是四边形}\}$.在不致混淆的情况下,可以省去“|”及其左边的部分,直接写成 $\{\text{四边形}\}$.“所有四边形组成的集合”不能写成 $\{\text{所有四边形}\}$,因为花括号本身就有全部的意思,故用文字描述集合时,应去掉含有“整体”“全部”等意义的词.

知识点 6 集合的分类

根据集合中元素的多少,集合可分为:有限集、无限集.

元素的个数是有限的称为有限集;元素的个数是无限的称为无限集.

典例剖析

触类旁通

考查点 1:集合的基本概念

例 1 已知集合 $M = \{x|x = 3n, n \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{x|x = 3m+1, m \in \mathbf{Z}\}$, $P = \{x|x = 3s-1, s \in \mathbf{Z}\}$, 且 $a \in M, b \in N, c \in P$. 设 $d = a - b + c$, 则 ()

A. $d \in M$

B. $d \in N$

C. $d \in P$

D. 以上都不对



分析 要判断 $d=a-b+c$ 与集合之间的关系, 只要看 d 能否写成 $3n, 3m+1, 3s-1, n, m, s \in \mathbb{Z}$ 的形式即可. a, b, c 分别是 M, N, P 中的元素, 分别可以写成 $3n, 3m+1, 3s-1, n, m, s \in \mathbb{Z}$ 的形式, 对它们进行运算即可. 设 $a=3n, b=3m+1, c=3s-1, n, m, s \in \mathbb{Z}$, 则 $d=a-b+c=3n-3m-1+3s-1=3(n-m+s)-2=3(n-m+s-1)+1$, 由于 $n-m+s-1 \in \mathbb{Z}$, 所以 $d \in N$. 故选 B.

【解题策略】 判断某一对象是不是某一集合中的元素, 就要看这个对象是否具有该集合中元素所具有的属性.

考查点 2: 集合中元素的特征

例 2 由 “ $2, a, b$ ” 三个元素构成的集合与由 “ $2a, 2, b^2$ ” 三个元素构成的集合是同一个集合, 求 a, b 的值.

分析 根据两个集合是同一个集合, 可利用集合中元素的特性求解.

解法 1: 根据集合中元素的互异性, 有 $\begin{cases} a=2a, \\ b=b^2, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=b^2, \\ b=2a, \end{cases}$

$$\text{解得 } \begin{cases} a=0, \\ b=1, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=0, \\ b=0, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=\frac{1}{4}, \\ b=\frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\text{再根据集合中元素的互异性, 得 } \begin{cases} a=0, \\ b=1, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=\frac{1}{4}, \\ b=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

解法 2: $\because$ 两个集合相同, 则其中的对应元素相同,

$$\therefore \begin{cases} a+b=2a+b^2, \\ a \cdot b=2a \cdot b^2, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} a+b(b-1)=0, \text{ ①} \\ ab(2b-1)=0. \text{ ②} \end{cases}$$

$\because$ 集合中的元素互异, $\therefore a, b$ 不能同时为零.

当 $b \neq 0$ 时, 由 ② 得 $a=0$, 或 $b=\frac{1}{2}$.

当 $a=0$ 时, 由 ① 得 $b=1$, 或 $b=0$ (舍去).

当 $b=\frac{1}{2}$ 时, 由 ① 得 $a=\frac{1}{4}$.

当 $b=0$ 时, $a=0$ (舍去).

$$\therefore \begin{cases} a=0, \\ b=1, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=\frac{1}{4}, \\ b=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

【解题策略】 (1) 本题中如不注意集合中元素的互异性, 可得方程组有三组不同的解, 从而得 a, b 的三组值, 故对于此类问题, 我们常常需要代入检验.

(2) 针对集合中元素的互异性, 进行了分类讨论, 体现了分类讨论的数学思想.

考查点 3: 集合的表示方法

例 3 下面四个集合: ① $A=\{x \in \mathbb{R} | y=x^2+1\}$; ② $B=\{y | y=x^2+1, x \in \mathbb{R}\}$; ③ $C=\{(x, y) | y=x^2+1, x \in \mathbb{R}\}$; ④ $D=\{y=x^2+1\}$. 则:

(1) 它们是不是相同的集合?



(2) 它们各自的含义是什么?

分析 对给定的集合, 要看清楚集合中的元素是什么, 元素满足什么条件(共同属性), 区别符号语言所表达的含义.

解: (1) 不是相同的集合.

(2) 集合 A 表示函数 $y = x^2 + 1$ 的自变量 x 的所有允许值组成的集合(函数的定义域), $\therefore A = \mathbf{R}$.

集合 B 是函数 $y = x^2 + 1$ 的所有函数值组成的集合(值域), $\therefore B = \{y | y \geq 1\}$.

集合 C 是函数 $y = x^2 + 1$ 图象上所有点的坐标组成的集合(点集).

集合 D 是以方程 $y = x^2 + 1$ 为元素的集合(单元素集合).

【解题策略】 认识用描述法表示的集合, 一要看代表元素是什么, 二要看满足的条件 $p(x)$.

例 4 用适当的方法表示下列对象构成的集合.

(1) 绝对值不大于 2 的整数;

(2) 直角坐标系中不在第一、三象限内的点;

(3) 方程 $\sqrt{2x+1} + |y-2| = 0$ 的解.

分析 在表示集合时, 要根据题意选择适当的表示方法, 对于有限集且元素个数较少时常用列举法, 因此判断所给集合是有限集还是无限集是选择恰当表示方法的关键.

解: (1) 用列举法: $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

或用描述法: $\{\text{绝对值不大于 } 2 \text{ 的整数}\}$, 或写成 $\{x | |x| \leq 2, x \in \mathbf{Z}\}$.

(2) 因为在第一、三象限内的点 (x, y) 的横坐标 x 、纵坐标 y 同正(第一象限)或同负(第三象限), 即 $xy > 0$.

所以不在第一、三象限内的点 (x, y) 满足 $xy \leq 0$.

因此该集合可用描述法表示为 $\{(x, y) | xy \leq 0, x, y \in \mathbf{R}\}$.

(3) 由算术平方根及绝对值的意义知, 若干个非负数的和为零, 则这几个非

负数均为零, 则必有 $\begin{cases} 2x+1=0, \\ y-2=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}, \\ y=2. \end{cases}$

因此该方程的解集为 $\left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$.

【规律·方法】 (1) 注意点集与数集的区别, 如 (3) 小题是一个点集, 写成 $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ 或 $\left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$ 都是错误的.

(2) 列举法一般用于有限集, 元素之间有明显规律的无限集可用描述法(如自然数集). 列举法的优点是直观, 便于看出这个集合是由哪些元素组成的, 不足是当元素个数较多时, 表示比较烦琐.

(3) 描述法适用于有限集、无限集.

考查点 4: 集合中元素的个数

例 5 设 P, Q 为两个非空实数集合, 定义集合 $P+Q = \{a+b | a \in P, b \in Q\}$, 若 $P = \{0, 2, 5\}$, $Q = \{1, 2, 6\}$, 则 $P+Q$ 中元素的个数是 ()

A. 9 个

B. 8 个

C. 7 个

D. 6 个



【分析】 根据题意, P, Q 为有限集, 求 $P+Q$ 中元素的个数, 只需把 $P+Q$ 中所取到的每个元素列举出来即可. 因为 $P=\{0, 2, 5\}, Q=\{1, 2, 6\}$, 所以当 $a=0$, 且 $b=1, 2, 6$ 时, $a+b=1, 2, 6$; 当 $a=2$, 且 $b=1, 2, 6$ 时, $a+b=3, 4, 8$; 当 $a=5$, 且 $b=1, 2, 6$ 时, $a+b=6, 7, 11$. 由上可知, 只有一个相同的元素 6, 其他均不相同, 故 $P+Q=\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11\}$. 其所含元素个数为 8 个, 故选 B.

【规律·方法】 (1) 注意元素个数较少时采用列举法.

(2) 会把数学语言与集合语言相互转化.

例 6 (信息题) 对任意两个正整数 m, n , 定义某种运算 (用 $\otimes$ 表示运算符号): 当 m, n 都是正偶数或都是正奇数时, $m \otimes n = m+n$, 如 $4 \otimes 6 = 4+6=10, 3 \otimes 7 = 3+7=10$; 当 m, n 中有一个为正奇数, 另一个为正偶数时, $m \otimes n = mn$, 如 $3 \otimes 4 = 3 \times 4 = 12, 4 \otimes 3 = 4 \times 3 = 12$. 则在上述定义下, 集合 $M = \{(m, n) | m \otimes n = 36, m, n \in \mathbf{N}_+\}$ 中的元素个数是多少?

【分析】 近几年, 在各地的模拟试题或高考题中, 常出现这样一种新题型, 题目中出现的一些符号或运算法则是教材中不曾介绍过的内容, 但我们可以根据题中所给条件, 通过自学, 利用我们大脑中已储备的知识解题.

解: ① 当 m, n 都为正偶数或都为正奇数时,

因为 $m \otimes n = m+n=36$,

所以 $m=1, n=35; m=2, n=34; m=3, n=33; \dots; m=35, n=1$.

集合 M 中共有 35 个元素.

② 当 m, n 中有一个为正偶数, 一个为正奇数时,

因为 $m \otimes n = m \cdot n = 36$, 又因为 $1 \times 36 = 36, 3 \times 12 = 36, 4 \times 9 = 36$,

所以 $\begin{cases} m=1, \\ n=36, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=36, \\ n=1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=3, \\ n=12, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=12, \\ n=3, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=4, \\ n=9, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=9, \\ n=4, \end{cases}$

M 中共有 6 个元素.

综上所述, M 中共有 $6+35=41$ 个元素.

【解题策略】 对于开放题, 要注意从基本概念、基本公式着手, 对于信息题, 要注意理解题目中给出的信息是什么, 此类题目虽然“陌生”, 但难度不会太大.

考查点 5: 集合与方程、不等式的联系

例 7 已知集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbf{R}\}$.

(1) 若集合 A 中只有一个元素, 求 a 的取值范围;

(2) 若集合 A 中至多有一个元素, 求 a 的取值范围;

(3) 若集合 A 中至少有一个元素, 求 a 的取值范围.

【分析】 对本题中集合 A 的元素的个数的讨论, 实际上是讨论方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 的实数根的个数, 从而确定 a 的取值范围.

解: (1) 当 $a=0$ 时, 原方程变为 $2x+1=0$, 此时 $x=-\frac{1}{2}$, 符合题意;

当 $a \neq 0$ 时, 方程为一元二次方程, 当 $\Delta = 4 - 4a = 0$, 即 $a=1$ 时, 原方程的解为 $x_1 = x_2 = -1$, 符合题意.

所以当 $a=0$ 或 $a=1$ 时, 原方程只有一个解, 此时集合 A 中只有一个元素.

(2) 集合 A 中至多有一个元素, 即 A 中有一个元素或没有元素,



当 $\Delta = 4 - 4a < 0$, 即 $a > 1$ 时, 方程无实数根,

结合(1)知, 当 $a = 0$ 或 $a \geq 1$ 时, 集合 A 中至多有一个元素.

(3) 集合 A 中至少有一个元素, 即 A 中有一个或两个元素.

由 $\Delta = 4 - 4a > 0$ 得 $a < 1$, 结合(1)得 $a \leq 1$, 此时集合 A 中至少有一个元素.

【解题策略】 对于方程 $ax^2 + bx + c = 0$.

(1) $a = 0$ 且 $b \neq 0$, 方程有一解.

(2) $a \neq 0$, ① $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; ② $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; ③ $\Delta < 0$ 时, 方程无实数根.

易错疑难辨析

易错点 忽略集合中元素的特征

【易错点解读】 集合中元素的互异性是集合的重要属性, 有时因忽略元素的互异性, 而导致解题出现错误. 如对 $a \in \{1, a^2\}$, 由于 1 和 a^2 是两个不同的元素, 因此 a 只能等于 0.

疑难点 不能区分数集与点集

【疑难点解读】 以数或点为元素的集合分别叫做数集或点集, 这是我们研究的主要对象, 因此研究集合, 必须清楚集合的元素是什么. 如: 对于集合 $A = \{x | y = x^2 - 2x + 5, 0 \leq x \leq 3\}$, $B = \{y | y = x^2 - 2x + 5, 0 \leq x \leq 3\}$, $C = \{(x, y) | y = x^2 - 2x + 5, 0 \leq x \leq 3\}$. 集合 A 中的元素是函数 $y = x^2 - 2x + 5, 0 \leq x \leq 3$ 中自变量 x 的取值, B 中的元素则是上述函数的函数值组成的集合, C 中的元素则是上述函数图象上的点的坐标组成的集合.

高考解读

点击高考

高考命题总结与展望

本节是高中数学的起始节, 是为其他章节的学习做铺垫. 本节所介绍的集合知识是以后学习的基础, 在高考中以两种形式出现, 一是以选择题、填空题为主, 二是在其他知识为背景的综合题中, 渗透集合的内容, 体现其基础性与应用性.

高考真题解读与预测

例 1 (08 · 宁夏模拟) 若集合 $M = \{a, b, c\}$ 中元素是 $\triangle ABC$ 的三边长, 则 $\triangle ABC$ 一定不是 ()

- A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 等腰三角形

【分析】 依集合中元素的特性解题. 由集合中元素的互异性 (集合中任意两个元素都不相同) 可知选 D.

【解题策略】 集合元素特性中的互异性在考查中往往是一个隐含条件, 特别是集合中含有字母参数时, 常被忽略, 解题时要特别注意.

例 2 (06 · 山东) 定义集合运算: $A \odot B = \{z | z = xy(x+y), x \in A, y \in B\}$. 设集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{2, 3\}$, 则集合 $A \odot B$ 的所有元素之和为 ()

- A. 0 B. 6 C. 12 D. 18

