运筹与管理科学丛书 10

整 数 规 划

孙小玲 李端 著

科学出版社
www.sciencep.com

运筹与管理科学丛书 10

整数规划

孙小玲 李端 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

整数规划是运筹学与最优化理论的重要分支之一. 整数规划模型、理论和算法在管理科学、经济、金融工程、工业管理和其他领域有着广泛的应用. 本书主要介绍经典的线性整数规划理论和算法, 同时简单介绍近年发展起来的非线性整数规划理论. 主要内容包括: 线性和非线性整数规划问题和模型、线性规划基础、全单模矩阵、图论和网络流问题、算法复杂性理论、分枝定界算法、割平面方法、多面体和有效不等式理论、整数规划对偶理论、0-1 二次整数规划与 SDP 松弛、0-1 多项式整数规划等.

本书适合运筹学、管理科学、应用数学和工程类专业的高年级本科生和研究生作为整数规划的教材和参考书, 读者只需具有高等数学基础就可以阅读.

图书在版编目(CIP)数据

整数规划/孙小玲, 李端著. —北京: 科学出版社, 2010

(运筹与管理科学丛书; 10)

ISBN 978 7-03-029380-0

Ⅰ. ①整… Ⅱ. ①孙… ②李… Ⅲ. ①整数规划 Ⅳ. O221.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 210382 号

责任编辑: 赵彦超 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年11月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2010年11月第一次印刷 印张:13 1/2
印数:1-2 000 字数:253 000

定价: 39.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《运筹与管理科学丛书》序

运筹学是运用数学方法来刻画、分析以及求解决策问题的科学. 运筹学的例子在我国古已有之, 春秋战国时期著名军事家孙膑为田忌赛马所设计的排序就是一个很好的代表. 运筹学的重要性同样在很早就被人们所认识, 汉高祖刘邦在称赞张良时就说道:“运筹帷幄之中, 决胜千里之外.”

运筹学作为一门学科兴起于第二次世界大战期间, 源于对军事行动的研究. 运筹学的英文名字 Operational Research 诞生于 1937 年. 运筹学发展迅速, 目前已有众多的分支, 如线性规划、非线性规划、整数规划、网络规划、图论、组合优化、非光滑优化、锥优化、多目标规划、动态规划、随机规划、决策分析、排队论、对策论、物流、风险管理等.

我国的运筹学研究始于 20 世纪 50 年代, 经过半个世纪的发展, 运筹学研究队伍已具相当大的规模. 运筹学的理论和方法在国防、经济、金融、工程、管理等许多重要领域有着广泛应用, 运筹学成果的应用也常常能带来巨大的经济和社会效益. 由于在我国经济快速增长的过程中涌现出了大量迫切需要解决的运筹学问题, 因而进一步提高我国运筹学的研究水平、促进运筹学成果的应用和转化、加快运筹学领域优秀青年人才的培养是我们当今面临的十分重要、光荣, 同时也是十分艰巨的任务. 我相信,《运筹与管理科学丛书》能在这些方面有所作为.

《运筹与管理科学丛书》可作为运筹学、管理科学、应用数学、系统科学、计算机科学等有关专业的高校师生、科研人员、工程技术人员的参考书, 同时也可作为相关专业的高年级本科生和研究生的教材或教学参考书. 希望该丛书能越办越好, 为我国运筹学和管理科学的发展做出贡献.

袁亚湘

2007 年 9 月

序

2008 年春, 袁亚湘教授访问复旦大学, 建议我们为《运筹与管理科学丛书》写一本整数规划方面的专著. 为满足国内运筹与管理科学发展之需要, 写一本系统地介绍整数规划理论和方法的中文著作一直是我们的心愿, 袁教授的鼓励和提议促使我们开始认真考虑和计划本书的写作.

整数规划的历史可以追溯到古希腊数学家丢番图 (Diophantine) 对线性不定方程的整数解的研究. 现代整数规划的理论和方法几乎是和线性规划 (运筹学) 同时产生和发展的. 自从运筹学创始人之一 Dantzig 与 Fulkerson 及 Johnson 等在 20 世纪 50 年代发表利用整数规划方法求解旅行售货员问题 (TSP) 的论文以来, 经过五十多年的研究, 整数规划已发展成为利用最优化方法解决经济和管理科学问题的最成功方法之一. 特别是基于分枝定界和各种松弛技术的算法已日趋成熟并开发为各种优化建模和算法商业软件, 使整数规划在学术界和工业界得到了广泛的应用. 近年来, 锥优化方法特别是半定规划多项式时间算法的发展为处理 NP 难整数规划问题提供了新的思路和方法, 例如, 二次 0-1 规划和多项式规划领域近年来都取得了不少突破, 是国际运筹学和最优化研究的热点之一.

本书试图对整数规划的经典理论和算法进行比较系统和深入的介绍, 其中线性整数规划部分的内容主要参考了文献 [16, 20, 25], 由于篇幅所限, 许多内容和证明不能一一展开, 有兴趣的读者可以进一步参考上述著作的相关章节. 同时, 我们还介绍了两类重要的非线性整数规划问题：0-1 二次规划和多项式规划, 这是近年来非线性整数优化的研究热点之一. 有关非线性整数规划的系统介绍可参见文献 [13]. 经典的线性整数规划已有很好的英文著作和教科书, 例如, 整数规划专家 Schrijver, Nemhauser 和 Wolsey 等的相关英文专著和教科书在国外大学被广泛采用 [16,20,25], 但尚未见同时讨论线性整数规划和非线性整数规划的中文或英文学术专著或面向高年级本科生和研究生的教科书, 这也是本书希望达到的目标之一：利用近年来发展起来的有效线性和凸松弛方法, 在统一的框架下处理线性和非线性 NP 难离散优化问题. 近年来, 最优化理论和方法的发展已经打破了连续与离散、线性与非线性以及确定性与随机之间的 "界限", 不同分支和领域中发展的方法的交叉研究已经产生了丰硕的成果. 读者可以从本书的 0-1 二次规划和多项式规划章节中看出这种交叉研究的趋势.

本书的主要内容曾作为 "整数规划" 研究生课程在复旦大学管理学院和香港中文大学系统工程与工程管理系讲授过. 根据我们的教学经验, 本书的主要内容可以

在一个学期完成 (40—60 个学时). 我们希望本书能激发运筹和管理科学领域的青年学者对整数规划的兴趣, 并通过学习本书进入相关研究的前沿, 也希望能帮助国内的运筹和管理科学工作者了解和应用整数规划的模型和方法解决经济、管理和工程中遇到的实际问题.

本书部分章节的初稿是根据作者在复旦大学和香港中文大学的相关课程英文讲义整理而成, 博士生郑小金和崔雪婷对本书的顺利完成帮助极大, 作者谨此表示衷心感谢; 感谢我们的学生冀淑慧和陈杰认真校对初稿, 冀淑慧对多项式优化部分的写作亦有贡献. 感谢袁亚湘教授和胡晓东教授对我们的支持和鼓励, 没有他们的鼓励本书可能仍然停留在计划之中. 感谢科学出版社责任编辑提供的专业和热心的帮助. 感谢中国科学院科学出版基金对本书的资助. 复旦大学管理学院和香港中文大学系统工程与工程管理系为我们提供了良好的科研环境和写作条件. 最后, 我们要感谢各自的家人对我们工作的一贯支持和理解, 没有家人的支持, 我们是不可能潜心于学术研究并完成本书的.

由于作者水平有限, 本书难免有错误和疏漏之处, 欢迎读者批评指出.

孙小玲　李　端

复旦大学, 香港中文大学

2010 年 8 月

目　录

第1章 引　　言

1.1 整数规划问题

整数规划是带整数变量的最优化问题, 即最大化或最小化一个全部或部分变量为整数的多元函数受约束于一组等式和不等式条件的最优化问题. 许多经济、管理、交通、通信和工程中的最优化问题都可以用整数规划来建模.

考虑一个电视机工厂的生产计划问题, 如果线性规划模型给出的最优生产计划是每天生产 102.4 台, 则可以选择每天 102 或 103 台的生产计划. 另一方面, 若考虑的问题是仓库的选址问题, 设线性规划给出的最优解是在甲地点建或买 0.6 个仓库, 在乙地点建或买 0.4 个仓库, 因仓库的个数必须是整数, 这时线性规划的解不能提供任何有用的决策方案. 实际上, 除了可以描述决策变量的离散性外, 整数变量可以帮助我们刻画最优化建模中的许多约束条件, 如逻辑关系、固定费用、可选变量的上界、顺序和排序关系、分片线性函数等.

整数规划的历史可以追溯到 20 世纪 50 年代, 运筹学创始人和线性规划单纯形算法发明者 Dantzig 首先发现可以用 0-1 变量来刻画最优化模型中的固定费用、变量上界、非凸分片线性函数等. 他和 Fulkerson 及 Johnson 对旅行售货员问题 (TSP) 的研究成为后来的分枝-割方法和现代混合整数规划算法的开端. 1958 年, Gomory 发现了第一个一般线性整数规划的收敛算法 —— 割平面方法. 随着整数规划理论和算法的发展, 整数规划已成为应用最广泛的最优化方法之一, 特别是近年来整数规划算法技术和软件系统 (如 CPLEX) 的发展和推广, 整数规划在生产企业、服务、运营管理、交通、通信等领域得到了极大的应用和发展.

整数规划的应用领域包括:

- 列车和公共交通调度
- 民航航班与机组调度
- 生产计划与调度
- 电厂发电计划
- 通信与网络
- 大规模集成电路设计等

1.2　整数规划分类与建模

1.2.1　线性混合整数规划

线性混合整数规划的一般形式为

$$\text{(MIP)}\qquad \begin{aligned} &\min\ c^{\mathrm{T}}x+h^{\mathrm{T}}y,\\ &\text{s.t.}\ \ Ax+Gy\leqslant b,\ x\in\mathbb{Z}_{+}^{n},\ y\in\mathbb{R}_{+}^{p}, \end{aligned}$$

这里 $\mathbb{Z}_{+}^{n}$ 是 n 维非负整数向量集合, $\mathbb{R}_{+}^{p}$ 是 p 维非负实数向量集合.

如果问题 (MIP) 中没有连续决策变量, 则 (MIP) 就是一个 (纯) 线性整数规划:

$$\text{(IP)}\qquad \begin{aligned} &\min\ c^{\mathrm{T}}x,\\ &\text{s.t.}\ \ Ax\leqslant b,\ x\in\mathbb{Z}_{+}^{n}. \end{aligned}$$

例 1.1 (背包问题)　设有一个背包, 其承重为 b. 考虑 n 件物品, 其中第 j 件的重量为 a_j, 价值为 c_j. 问如何选取物品装入背包, 使背包内物品的总价值最大?

设

$$x_j=\begin{cases}1, & \text{若选取第 } j \text{ 件物品},\\ 0, & \text{若不选取}.\end{cases}$$

则背包问题可以表示为下列线性 0-1 规划:

$$\begin{aligned} \max\ &\sum_{j=1}^{n}c_jx_j,\\ \text{s.t.}\ &\sum_{j=1}^{n}a_jx_j\leqslant b,\\ &x\in\{0,1\}^{n}. \end{aligned}$$

项目计划和许多复杂整数规划问题的子问题也可以归结为背包问题模型. 例如, 在项目管理中, 设年度总预算是 b, 有 n 个项目可以考虑投资或新建, 由于预算原因, 这 n 个项目不能全部新建. 设第 j 个项目的建设费用是 a_j, 期望收益是 c_j. 则项目计划问题可以归结为: 如何在预算约束下选取适当的项目使期望总收益最大化, 这即是一个背包问题.

例 1.2 (指派问题)　设有 m 台机器, n 个工件, 第 i 台机器的可用工时数为 b_i, 第 i 台机器完成第 j 件工件需要的工时数为 a_{ij}, 费用为 c_{ij}. 问如何最优指派机器生产.

设

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若第 } i \text{ 机器加工第 } j \text{ 件工件},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则指派问题可表示为如下 0-1 线性规划问题:

$$\begin{aligned}
\min\ & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}, \\
\text{s.t.}\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \leqslant b_i,\ i=1,\cdots,m, \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,\ j=1,\cdots,n, \\
& x_{ij} \in \{0,1\}.
\end{aligned}$$

例 1.3 (集覆盖问题) 设某地区划分为若干个区域, 需要建立若干个应急服务中心 (如消防站、急救中心等), 每个中心的建立都需要一笔建站费用, 设候选中心的位置已知, 每个中心可以服务的区域预先知道, 问如何选取中心使该应急服务能覆盖整个地区且使建站费用最小.

记 $M=\{1,\cdots,m\}$ 为该地区中的区域, $N=\{1,\cdots,n\}$ 是可选的中心, 设 $S_j \subseteq M$ 为中心 $j \in N$ 可以服务的区域集合, c_j 是中心 j 的建站费用, 定义 0-1 关联矩阵 $A=(a_{ij})$, 其中 $a_{ij}=1$, 如果 $i \in S_j$, 否则 $a_{ij}=0$.

设

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{选中心 } j, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

则问题可以表示为

$$\begin{aligned}
\min & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \\
\text{s.t.}\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant 1,\ i=1,\cdots,m, \\
& x \in \{0,1\}^n.
\end{aligned}$$

例 1.4 (旅行售货员问题 (TSP)) 设有一个旅行售货员需要去 n 个城市推销他的产品, 他必须而且只能访问每个城市一次, 并最后返回出发城市. 设每个城市直接到达另一个城市的距离已知 (如不能直接到达, 则可设其距离为 $+\infty$), 他应该如何选择旅行路线使得总的旅行距离最短?

设城市 i 到城市 j 的距离为 c_{ij}. 设

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若他的旅行路线包括了直接从城市 } i \text{ 到城市 } j \text{ 的行程}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

约束条件:

- 他离开城市 i 一次：

$$\sum_{j\neq i} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \cdots, n.$$

- 他到达城市 j 一次：

$$\sum_{i\neq j} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \cdots, n.$$

- 上面的约束条件使得每个城市正好经过一次，但仍可能包括含圈但不联通的路线，我们需要用下面的约束条件来去除这种情况发生：

$$\sum_{i\in S}\sum_{j\notin S} x_{ij} \geqslant 1, \quad \forall S \subset N = \{1, \cdots, n\},\ S \neq \varnothing,$$

或

$$\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} x_{ij} \leqslant |S| - 1, \quad \forall S \subset N,\ 2 \leqslant |S| \leqslant n-1.$$

从而旅行售货员问题可以表示为

$$\begin{aligned}
\min\ & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}, \\
\text{s.t.}\ & \sum_{j\neq i} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \cdots, n, \\
& \sum_{i\neq j} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \cdots, n, \\
& \sum_{i\in S}\sum_{j\in S} x_{ij} \leqslant |S| - 1, \quad \forall S \subset N,\ 2 \leqslant |S| \leqslant n-1, \\
& x \in \{0, 1\}^n.
\end{aligned}$$

1.2.2 非线性整数规划

一般非线性混合整数规划问题可表为

$$\begin{aligned}
\text{(MINLP)} \qquad & \min\ f(x, y), \\
& \text{s.t.}\ g_i(x, y) \leqslant b_i, \quad i = 1, \cdots, m, \\
& \qquad x \in X,\ y \in Y,
\end{aligned}$$

这里 $f, g_i, i = 1, \cdots, m$ 是 $\mathbb{R}^{n+q}$ 上的实值函数，X 是 $\mathbb{Z}^n$ 的子集，Y 是 $\mathbb{R}^q$ 的一个子集.

当 (MINLP) 中没有连续变量 y 时，(MINLP) 即是一个 (纯) 非线性整数规划：

$$
\begin{aligned}
\text{(NLIP)} \qquad & \min\ f(x), \\
& \text{s.t.}\ \ g_i(x) \leqslant b_i, \quad i = 1, \cdots, m, \\
& \qquad x \in X.
\end{aligned}
$$

例 1.5 (最大割问题) 设 $G = (V, E)$ 是有 n 个顶点的无向图, 设边 (i, j) 上的权为 $w_{ij}(w_{ij} = w_{ji} \geqslant 0)$. 图 G 的一个割 (S, S') 是指 n 个顶点的一个分割: $S \cap S' = \varnothing$, $S \cup S' = V$. 最大割问题是求一个分割 (S, S') 使连接 S 和 S' 之间的所有边上的权之和最大.

设 $x_i = 1, i \in S, x_i = -1, i \in S'$. 则分割 (S, S') 上的权为

$$
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} w_{ij} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} w_{ij}x_ix_j\right) = \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n} w_{ij}(1 - x_ix_j).
$$

故最大割问题可以表为

$$
\begin{aligned}
& \max\ \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n} w_{ij}(1 - x_ix_j), \\
& \text{s.t.}\ x \in \{-1, 1\}^n.
\end{aligned}
$$

最大割问题是组合优化中著名的 NP 难问题, 1995 年, Goemans 和 Williamson 对最大割问题的 SDP 松弛给出了一个漂亮的结果:

$$
f_{\text{opt}} \leqslant f_{\text{SDP}} \leqslant \alpha f_{\text{opt}}, \quad \alpha = 1.138\cdots,
$$

这里 f_{opt} 是最大割问题的最优值, f_{SDP} 是 SDP 松弛问题的最优值.

例 1.6 (最优订货批量) 最优订货批量问题是生产计划中的一个重要问题, 设生产中需要订购和存储 n 种物品. 设 x_j 表示第 j 种物品的订购量, D_j 表示第 j 种物品的需求量, O_j 表示第 j 种物品每次的订购费用, h_j 表示第 j 种物品的单位存储费用, c_j 表示第 j 种物品的重量, C 表示仓库的可存储物品总重量. 问如何确定订货量 x_j 使总费用最小?

因第 j 种物品的订购次数是 D_j/x_j , 故订购费是 O_jD_j/x_j. 另外, $h_jx_j/2$ 是平均存储费用, 故最优批量问题可以表为

$$
\begin{aligned}
\text{(OL)} \qquad & \min\ \sum_{j=1}^{n}(O_jD_j/x_j + h_jx_j/2), \\
& \text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \leqslant C, \\
& \qquad x \in \mathbb{Z}_+^n.
\end{aligned}
$$

例 1.7 (投资组合) 设市场有 n 种股票和一种无风险资产, 投资者把初始财富 W_0 投资于这 n 种股票和一种无风险资产, 以保证在平均收益达到一定水平的条件下使投资风险最小.

设 X_i 是一随机变量, 表示第 i 种股票每手未来的价值, $(X_1, \cdots, X_n)$ 的期望和协方差为

$$\mu_i = E(X_i), \quad \sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j), \quad i, j = 1, \cdots, n.$$

设 x_i 是整数变量, 表示投资于第 i 种股票的手数, $x = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 是投资组合决策变量, 其对应的随机收益为 $P_s(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i X_i$. 则投资组合收益 $P_s(x)$ 的均值和方差分别为

$$s(x) = E[P_s(x)] = E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$$

和

$$V(x) = \mathrm{Var}(P_s(x)) = \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} = x^{\mathrm{T}} C x,$$

这里 $C = (\sigma_{ij})_{n\times n}$ 表示协方差矩阵. 设 r 是无风险资产的收益率, $b = (b_1, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$ 是当前股票的价格. 注意到投资者在无风险资产上的投资额为 $x_0 = \left(W_0 - \sum_{i=1}^{n} b_i X_i\right)$. 设交易费用为 $c(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i)$, 则投资组合的净收益为

$$R(x) = s(x) + r x_0 - \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} [(\mu_i - r b_i) x_i - c_i(x_i)] + r W_0.$$

从而均值-方差投资组合模型为

$$\begin{aligned}
(\mathrm{MV}) \qquad & \min\ V(x) = x^{\mathrm{T}} C x, \\
& \text{s.t.}\ \ \sum_{i=1}^{n} [(\mu_i - r b_i) x_i - c_i(x_i)] + r W_0 \geqslant \varepsilon, \\
& \qquad b^{\mathrm{T}} x \leqslant W_0, \\
& \qquad x \in X = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid l_i \leqslant x_i \leqslant u_i\}.
\end{aligned}$$

在以上的模型中, 我们以最终财富的方差来度量投资风险. 注意到决策变量 x 为有界整数变量.

例 1.8 (可靠性网络) 考虑有 n 个子系统的网络. 设 r_i $(0 < r_i < 1)$ 是第 i 个子系统中的部件可靠性, x_i 表示第 i 个子系统的冗余部件的个数. 网络可靠性优化问题是求最优的冗余向量 $x = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 使网络的整体可靠性最大.

第 i 个子系统的可靠性为

$$R_i(x_i) = 1 - (1 - r_i)^{x_i}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

整个网络的可靠性 $R_s(x)$ 是关于 $R_1(x_1), \cdots, R_n(x_n)$ 的增函数. 例如图 1.1 所示的网络的可靠性为

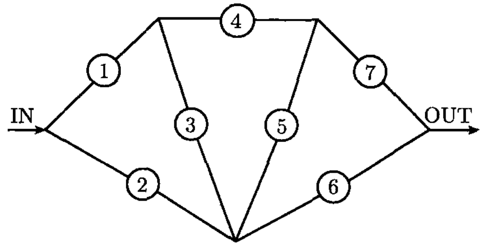

图 1.1 7 个节点的 ARPA 网络

$$R_s = R_6R_7 + R_1R_2R_3(Q_6 + R_6Q_7) + R_1R_4R_7Q_6(Q_2 + R_2Q_3),$$

这里 $Q_i = 1 - R_i, i = 1, \cdots, n$. 相应的最优冗余问题是

$$\begin{aligned} \max\ & R_s(x) = f(R_1(x_1), \cdots, R_n(x_n)), \\ \text{s.t.}\ & g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j) \leqslant b_i, \quad i = 1, \cdots, m, \\ & x \in X = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid 1 \leqslant l_j \leqslant x_j \leqslant u_j,\ j = 1, \cdots, n\}, \end{aligned}$$

这里 $g_i(x), i = 1, \cdots, m$ 代表不同的资源消耗函数, 例如费用、体积、重量等.

1.2.3 分片线性函数与分离约束

下面讨论利用 0-1 变量来表示分片线性函数和分离约束条件. 考虑可分离非线性函数 $f(y_1, \cdots, y_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(y_j)$. 函数 $f_j(y_j)$ 可以用分段线性函数来逼近, 其逼近的精度依赖于分段线段的长度.

设 $g(y)$ 是一元函数, 取断点 $(a_i, g(a_i)), i = 1, \cdots, r$, 设 $l(y)$ 是连接这些断点的分段线性函数. 则任意 $a_1 \leqslant y \leqslant a_r$ 可以表为

$$y = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i, \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1, \quad \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \in \mathbb{R}_+^r.$$

上述表示中 λ 并不唯一, 若 $a_i \leqslant y \leqslant a_{i+1}$ 且选取 λ 使 $y = \lambda_i a_i + \lambda_{i+1}a_{i+1}$, $\lambda_i + \lambda_{i+1} = 1$, 则有 $l(y) = \lambda_i f(a_i) + \lambda_{i+1} f(a_{i+1})$. 所以, 若 $\lambda_i, i = 1, \cdots, r$ 最多只有 2 个非零, 且若 λ_j 和 λ_k 为正, 则有 $k = j-1$ 或 $j+1$, 故 $l(y)$ 可以表为

$$l(y) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(a_i), \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^r. \tag{1.1}$$

上面表达式成立的条件可以利用 0-1 变量来刻画, 设 $x_i \in \{0,1\}, i = 1, \cdots, r-1$, 其中, 如果 $a_i \leqslant y \leqslant a_{i+1}$, 则 $x_i = 1$, 否则 $x_i = 0$. 则下面的约束条件刻画了表达式 (1.1) 成立的条件 (最多只有 2 个相邻的 λ_i 非零):

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \leqslant x_1, \\
&\lambda_i \leqslant x_{i-1} + x_i, \quad i = 2, \cdots, r-1, \\
&\lambda_r \leqslant x_{r-1}, \\
&\sum_{i=1}^{r-1} x_i = 1, \\
&x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \cdots, r-1.
\end{aligned}$$

分离约束出现在很多最优化模型中, 典型的分离约束是要求一个点满足 m 个线性约束中的 k 个. 设 $P^i = \{y \in \mathbb{R}^p \mid A^i y \leqslant b^i,\ 0 \leqslant y \leqslant d\}, i = 1, \cdots, m$. 注意到存在向量 ω 使对任意 i, $A^i y \leqslant b^i + \omega$, $0 \leqslant y \leqslant \omega$. 故存在 y 包含在 k 个 P^i 中当且仅当下列约束条件相容:

$$\begin{aligned}
&A^i y \leqslant b^i + \omega(1 - x_i), \quad i = 1, \cdots, m, \\
&\sum_{i=1}^{m} x_i \geqslant k, \\
&y \leqslant d, \\
&x \in \{0,1\}^m, \quad y \in \mathbb{R}_+^p.
\end{aligned}$$

当 $k = 1$ 时, 要求 m 个线性约束中一个满足的条件也可以表示为

$$\begin{aligned}
&A^i y^i \leqslant x_i b^i, \quad i = 1, \cdots, m, \\
&y^i \leqslant x_i d, \quad i = 1, \cdots, m, \\
&\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \\
&\sum_{i=1}^{m} y^i = y, \\
&x \in \{0,1\}^m, \quad y \in \mathbb{R}_+^p,\ y^i \in \mathbb{R}_+^p,\ i = 1, \cdots, m.
\end{aligned} \tag{1.2}$$