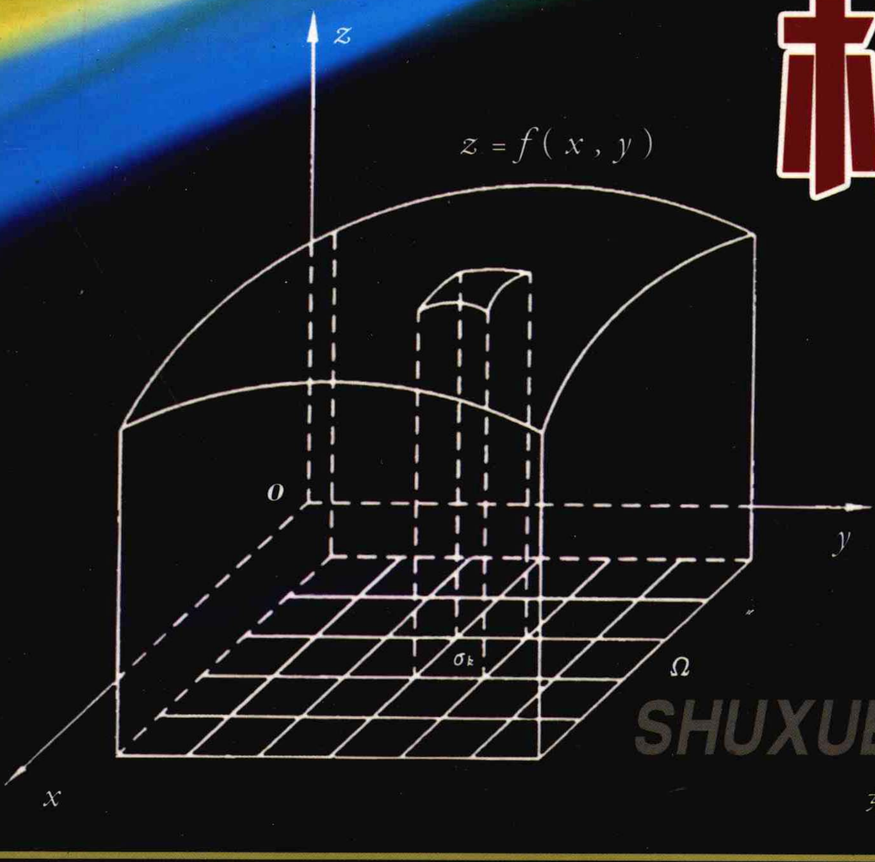
东北师范大学文库

数学分析

下册

赵洁 赵宏亮



SHUXUE FENXI

东北师范大学出版社

数 学 分 析

下 册

赵 洁 赵宏亮

东北师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析(下)/赵洁，赵宏亮. —长春：东北师范大学出版社，2004.10 ISBN 7-5602-3964-1

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①赵… ②赵… Ⅲ. 数学分析 Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 105616 号

□责任编辑：李震宇 □封面设计：李冰彬
□责任校对：沙铁成 □责任印制：张允豪

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 5268 号（130024）
销售热线：0431—5687213
传真：0431—5691969
网址：http：//www.nenup.com
电子函件：sdcbs@mail.jl.cn
东北师范大学出版社激光照排中心制版
吉林省吉新月历制版印刷有限公司印装
2004 年 10 月第 1 版 2004 年 10 月第 1 次印装
幅面尺寸：185mm×260mm 印张：21.5 字数：470 千
印数：0 001—3 000 册

本册定价：40.00 元
全套定价：70.00 元

本书系东北师范大学
图书出版基金项目

目　　录

第七章 多元函数微分学

我们在上册以极限理论和实数理论为基础,主要讨论了一元实值函数的微分学和积分学.

一元实值函数是数量之间最简单的关系,而自然界中事物的变化往往依赖于多种因素,必须考虑一个量同时依赖于许多其他的量的情形,这就需要多元实值函数(简称多元函数).

例如,圆柱体的体积 V 依赖于底面半径 r 与高 h,即

$$V=\pi r^2 h$$

这里 V 是 r 与 h 的二元函数.

又如,根据力学中的万有引力定律,任何两个物体是相互吸引的,引力 F 依赖于两个物体的质量 m_1 与 m_2 以及它们之间的距离 r,即

$$F=G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

其中 G 是引力常数,这里 F 是 m_1,m_2 与 r 的三元函数.

与一元函数一样,多元函数在实际应用中是非常广泛的.本章在一元函数微分学的基础上,讨论多元函数微分学,二者在理论和方法上既有许多共同之处,又有一些差异的地方.我们应该在学习时经常进行分析与对比.

我们将着重讨论二元函数,然后可以很自然地将二元函数的有关概念、理论和研究方法推广到二元以上的一般的多元函数中去.

§7.1 平面点集与多元函数

二元函数的定义域是坐标平面(以后简称平面)上的点集,所以我们首先讨论平面点集的基本概念和性质.

一、平面点集

定义 将有序实数对 (x,y) 的集合,即

$$\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\}$$

称为**二维空间**,表为 $\mathbb{R}^2$,称二维空间 $\mathbb{R}^2$ 的子集为**平面点集**.

显然,所有有序实数对与平面上的所有点之间建立了一一对应.因此,今后对有序实数对与平面上的点不加区别.

首先将实直线 $\mathbb{R}$ 上的邻域概念推广到二维空间 $\mathbb{R}^2$.

定义 平面点集

$$\{(x,y)\mid\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r\}$$

与

$$\{(x,y)\,|\,|x-a|<r,|y-b|<r\}$$

分别称为以点 $P(a,b)$ 为心的 r **圆邻域**与 r **方邻域**. 由于点 P 的这两种邻域可以互相包含,因此以后所说的"点 P 的 r 邻域"泛指这两种邻域,并将它们都记为 $U(P,r)$ 或简记为 $U(P)$.

$U(P,r)$ 中去掉点 P,即点集

$$\{(x,y)\,|\,0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r\}$$

或

$$\{(x,y)\,|\,|x-a|<r,|y-b|<r,(x,y)\neq(a,b)\}$$

称为点 P 的 r **去心邻域**,记为 $\mathring{U}(P,r)$ 或简记为 $\mathring{U}(P)$.

点集

$$(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)=\{(x,y)\,|\,a_1<x<b_1,a_2<y<b_2\}$$

与

$$[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]=\{(x,y)\,|\,a_1\leqslant x\leqslant b_1,a_2\leqslant y\leqslant b_2\}$$

分别称为**二维开区间**与**二维闭区间**.

下面利用邻域来刻画点与点集之间的关系,并给出一系列有关的概念.

定义 设 E 是平面点集,P 是平面上一点.

1. 若 $\exists\, r>0$,有 $U(P,r)\subset E$,则称 P 是 E 的**内点**,如图 7 - 1(a). E 的所有内点组成的点集称为 E 的**内部**,记为 $\operatorname{int} E$ 或 E°.

2. 若 $\exists\, r>0$,有 $U(P,r)\cap E=\varnothing$,则称 P 是 E 的**外点**,如图 7 - 1(b). E 的所有外点组成的点集称为 E 的**外部**,记为 $\operatorname{ext} E$.

3. 若 $\forall\, r>0$,有 $U(P,r)\cap E\neq\varnothing$ 且 $U(P,r)\cap E^C\neq\varnothing$,则称 P 是 E 的**边界点**,如图 7 - 1(c). E 的所有边界点组成的点集称为 E 的**边界**,记为 ∂E.

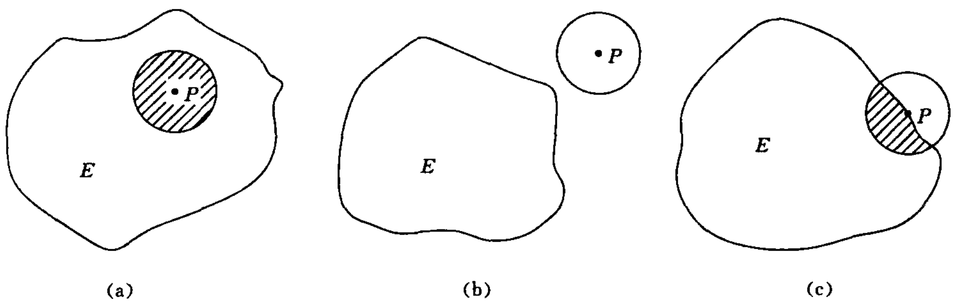


图 7 - 1

易知,E 的内点一定属于 E;E 的外点一定不属于 E;E 的边界点可能属于 E,也可能不属于 E. 显然,$\mathbb{R}^2=E^\circ\cup\partial E\cup\operatorname{ext} E$,且 $E^\circ,\partial E,\operatorname{ext} E$ 互不相交.

例 1 设平面点集

$$G=\{(x,y)\,|\,1<x^2+y^2\leqslant 9\}$$

可以看出,满足 $1<x^2+y^2<9$ 的点 (x,y) 都是 G 的内点,满足 $x^2+y^2<1$ 或 $x^2+y^2>9$ 的点 (x,y) 都是 G 的外点,圆周 $x^2+y^2=1$ 与 $x^2+y^2=9$ 是 G 的边界,而且外圆边界上的边界点都属于 G,内圆边界上的边界点都不属于 G. □

定义 设 E 是平面点集,P 是平面上一点.

1. 若 $\forall r>0, U(P,r)\cap E$ 是无限集，则称 P 是 E 的**聚点**. E 的所有聚点组成的集合称为 E 的**导集**，记为 E'.

2. 若 $\exists r>0, U(P,r)\cap E=\{P\}$，则称 P 是 E 的**孤立点**.

显然，$E-E'$ 为 E 的所有孤立点组成的集合，称为 E 的**孤立点集**.

易知 E 的孤立点一定属于 E，它的聚点可能属于 E，也可能不属于 E.

例如，对于例 1 中的点集 G 来说，它的一切内点和边界点都是聚点，它没有孤立点.

定义　设 $E\subset\mathbb{R}^2$ 是平面点集.

1. 若 $E=E^\circ$，即 E 的任意点都是 E 的内点，则称 E 是**开集**.

2. 若 $E\supset E'$，即 E 的所有聚点都属于 E，则称 E 是**闭集**. 特别地，若 E 没有聚点，也称 E 是闭集.

3. 称 $\bar{E}=E\cup E'$ 为 E 的**闭包**.

规定空集 $\varnothing$ 既是开集又是闭集.

易知，二维闭区间以及平面点集 E 的导集 E'，边界 ∂E，闭包 $\bar{E}$ 均是闭集，二维开区间以及 E 的内部 E°，外部 $\mathrm{ext}\,E$ 均是开集.

容易证明下面关于开集与闭集的重要特性：

定理 1　开集的补集是闭集，闭集的补集是开集.

定理 2　任意多个开集的并集是开集，有限多个开集的交集是开集；任意多个闭集的交集是闭集，有限多个闭集的并集是闭集.

注　可以举例说明任意多个开集的交集不一定是开集，任意多个闭集的并集不一定是闭集.

我们知道，一元微积分的命题都是在区间上建立的，而区间的一个特点是具有"连成一体"的性质——"连通性". 多元函数的许多命题同样必须在具有连通性的点集上才能成立.

考察实直线 $\mathbb{R}$ 上的没有"连成一体"的不连通集 $A=[0,1)\cup(1,2]$，令 $A_1=[0,1), A_2=(1,2]$，则有 $A=A_1\cup A_2$，且 $\overline{A_1}\cap A_2=\varnothing, A_1\cap\overline{A_2}=\varnothing$.

定义　设 $A\subset\mathbb{R}^2$，若存在非空点集 A_1 和 A_2，满足

(1) $A=A_1\cup A_2$；

(2) $\overline{A_1}\cap A_2=\varnothing, A_1\cap\overline{A_2}=\varnothing$.

则称 A 为**不连通集**，不是不连通的点集称为**连通集**.

显然，若 $A\subset\mathbb{R}^2$ 是连通的开集，则 A 内任意两点都能用属于 A 的折线连接起来.

定义　连通的开集 $D\subset\mathbb{R}^2$ 称为**开区域**，连通开集 D 的闭包 $\bar{D}$ 称为**闭区域**，开区域与闭区域统称为**区域**.

例 2　平面点集

$$E=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1\right\},\quad F=\{(x,y)\,|\,x>0,y>0\}$$

可以看出，E 是闭集，F 是开集，并且 E 是闭区域，F 是开区域，而例 1 中的 G 既不是开集，也不是闭集.　□

定义　$\forall P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$，称非负数

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

为点 P_1 与 P_2 的**距离**，记为 $\rho(P_1,P_2)$，即

$$\rho(P_1,P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

设 E 是平面点集，称

$$\sup\{\rho(P_1,P_2)\mid P_1,P_2\in E\}$$

为 E 的**直径**,记为 $d(E)$,即

$$d(E)=\sup\{\rho(P_1,P_2)\mid P_1,P_2\in E\}$$

若 $d(E)<+\infty$,则称 E 是**有界集**,否则称 E 是**无界集**.

容易证明,对于$\mathbb{R}^2$中的任意三点 P_1,P_2,P_3,它们之间的距离满足三角不等式,即

$$\rho(P_1,P_2)\leqslant\rho(P_1,P_3)+\rho(P_3,P_2)$$

不难看出,E 是有界集$\Leftrightarrow\exists r>0$,有 $E\subset U(O,r)$,其中 O 是坐标原点$(0,0)$.

可以看出,例 1 中的 G 和例 2 中的 E 都是有界集,例 2 中的 F.

以上关于平面点集的所有概念不难推广到 n 维空间$\mathbb{R}^n$中.

二、平面$\mathbb{R}^2$的连续性

反映实直线$\mathbb{R}$连续性的几个等价定理,是一元函数极限和连续的理论基础. 同样,为了讨论二元函数的极限与连续,需要讨论平面$\mathbb{R}^2$的连续性.

我们先介绍平面点列的收敛概念.

定义 设$\{P_n\}\subset\mathbb{R}^2$为平面点列. 若$\exists P_0\in\mathbb{R}^2$,$\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbb{N}$,$\forall n>N$,有

$$\rho(P_n,P_0)<\varepsilon$$

则称点列$\{P_n\}$**收敛或存在极限,极限是** P_0,记为

$$\lim_{n\to\infty}P_n=P_0 \quad \text{或} \quad P_n\to P_0(n\to\infty)$$

设(a_n,b_n)与(a,b)是点 P_n 与 P_0 的坐标,利用距离的三角不等式容易证明:

$$\lim_{n\to\infty}P_n=P_0\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=a \quad \text{与} \quad \lim_{n\to\infty}b_n=b$$

即平面点列的收敛等价于依坐标收敛. 由此根据数列收敛的柯西准则不难得到平面点列的相应的柯西收敛准则.

定理 3(柯西收敛准则) 平面点列$\{P_n\}$收敛$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbb{N}$,$\forall n,m>N$,有

$$\rho(P_n,P_m)<\varepsilon$$

证明 **必要性** 若点列$\{P_n\}$收敛,设$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$,则$\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbb{N}$,$\forall n>N$,有

$$\rho(P_n,P_0)<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是$\forall n,m>N$,由三角不等式有

$$\rho(P_n,P_m)\leqslant\rho(P_n,P_0)+\rho(P_m,P_0)<\varepsilon$$

充分性 已知$\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbb{N}$,$\forall n,m>N$,有

$$\rho(P_n,P_m)<\varepsilon$$

设(a_n,b_n)是点 P_n 的坐标,则$\forall n,m>N$,同时有

$$|a_n-a_m|\leqslant\rho(P_n,P_m)<\varepsilon$$
$$|b_n-b_m|\leqslant\rho(P_n,P_m)<\varepsilon$$

于是根据数列收敛的柯西准则,$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都收敛,设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$,设点 P_0 的坐标为(a,b),即

$$\lim_{n\to\infty}P_n=P_0 \qquad \square$$

下面介绍平面$\mathbb{R}^2$中的闭矩形套定理,它是实直线$\mathbb{R}$中的闭区间套定理的推广.

定理 4(闭矩形套定理) 设$\{D_n\}$是$\mathbb{R}^2$中的闭矩形区域列,其中

$$D_n=\{(x,y)\mid a_n\leqslant x\leqslant b_n,c_n\leqslant y\leqslant d_n\},\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

若闭矩形列$\{D_n\}$满足：

1. $D_1\supset D_2\supset\cdots\supset D_n\supset\cdots$；

2. $\lim\limits_{n\to\infty}d(D_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{(b_n-a_n)^2+(d_n-c_n)^2}=0$.

则存在唯一一点 P_0 属于所有的闭矩形区域，即

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}D_n=\{P_0\}$$

证明　由条件 1 和 2，$\forall n\in\mathbb{N}$，有

$$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$$

且

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$$

根据闭区间套定理，存在唯一一个 x_0，使 $\forall n\in\mathbb{N}$，有 $x_0\in[a_n,b_n]$.

同理可证，存在唯一一个 y_0，$\forall n\in\mathbb{N}$，有 $y_0\in[c_n,d_n]$. 因此，在平面上存在唯一一点 $P_0(x_0,y_0)$，属于所有的闭矩形区域 D_n.　□

下面我们利用闭矩形套定理证明平面$\mathbb{R}^2$上的有限覆盖定理，它是$\mathbb{R}$上的有限覆盖定理的推广.

定义　设 E 是平面点集，S 是平面上的开区域集合. 若 $\forall P\in E$，$\exists$ 开区域 $G\in S$，有 $P\in G$，则称开区域集 S 覆盖点集 E. 若 S 中的开区域个数是有限的，则称 E 有**有限覆盖**.

定理 5(有限覆盖定理)　若平面上开区域集合 S 覆盖有界闭区域 D，则 S 中存在有限个开区域也覆盖 D.

证明　应用反证法. 假设 D 没有有限覆盖，因为 D 有界，所以存在一个闭正方形 R_1，使 $D\subset R_1$. 设闭正方形 R_1 的边长是 a，于是其直径 $d(R_1)=\sqrt{2}a$. 通过闭正方形 R_1 的对边中点的两条直线将 R_1 分成四个相等的正方形，其中至少有一个闭正方形 R_2 所包含 D 的非空子集 D_1 没有有限覆盖，$d(R_2)=\frac{\sqrt{2}}{2}a$. 再通过闭正方形 R_2 的对边中点的两条直线将 R_2 分为四个相等的正方形，其中至少有一个闭正方形 R_3 所包含 D 的非空子集 D_2 没有有限覆盖，$d(R_3)=\frac{\sqrt{2}}{2^2}a$. 如此无限进行下去，得到闭正方形列$\{R_n\}$，满足下列条件：

(1) $R_1\supset R_2\supset\cdots\supset R_n\supset\cdots$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}d(R_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}a=0$；

(3) 每个 R_n 中所包含 D 的非空子集 D_{n-1} 没有有限覆盖.

根据闭矩形套定理，存在唯一一点 P 属于所有的闭正方形区域，即 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}R_n=\{P\}$.

下面证明 $P\in D$. 假设 $P\overline{\in}D$，因为 D 是闭区域，所以 P 是 D 的外点，即 $\exists r>0$，$U(P,r)\cap D=\varnothing$. 由条件(2)知，当 n 充分大时，$d(R_n)<r$. 已知 $P\in R_n$，从而 $R_n\subset U(P,r)$，于是 $R_n\cap D=\varnothing$. 这与 $R_n\cap D=D_{n-1}\neq\varnothing$矛盾，于是 $P\in D$.

由于 $P\in D$，而开区域集合 S 覆盖 D，故存在开区域 $G\in S$，使 $P\in G$，即 P 是 G 的内点. 于是 $\exists\delta>0$，使 $U(P,\delta)\subset G$，由条件(2)知，当 n 充分大时，有 $D_{n-1}\subset R_n\subset U(P,\delta)\subset G$. 这说明 D_{n-1} 有有限覆盖，但由条件(3)知，D_{n-1}没有有限覆盖，矛盾.　□

我们利用有限覆盖定理证明聚点定理.

定理 6(聚点定理) 平面上有界无限点集 E 至少有一个聚点.

证明 已知 E 有界,则存在有界闭区域 D,使 $E\subset D$.

假设 E 没有聚点,即 $\forall P\in D$,P 不是 E 的聚点,于是 P 只能是 E 的孤立点或外点,从而 $\exists r_p>0$,邻域 $U(P,r_p)$ 内至多含有 E 的一个点.

显然,开区域集

$$\{U(P,r_p)\mid P\in D\}$$

覆盖有界闭区域 D,根据有限覆盖定理,存在有限个开区域

$$\{U(P_k,r_{p_k})\mid k=1,2\cdots,n\}$$

也覆盖有界闭区域 D,从而也覆盖 E. 因此点集 E 至多有 n 个点,这与 E 是无限集矛盾. □

最后,我们讨论平面$\mathbb{R}^2$上的致密性定理.

定义 若平面点集$\{P_n\mid n\in\mathbb{N}\}$有界,则称点列$\{P_n\}$**有界**.

设平面上有点列$\{P_n\}$,在正整数列$\{n\}$中任选部分正整数

$$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots,\quad n_k\to+\infty\ (k\to\infty)$$

则称点列$\{P_{n_k}\}$是点列$\{P_n\}$的**子点列**,也简称**子列**.

定理 7(致密性定理) 有界点列$\{P_n\}$存在收敛的子点列.

证明 设$\{P_n(a_n,b_n)\}$是有界点列. 显然,$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都是有界数列. 根据实直线$\mathbb{R}$上的致密性定理,数列$\{a_n\}$存在收敛的子列$\{a_{n_k}\}$,设$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=a_0$. 相应的$\{b_{n_k}\}$也是有界数列,于是$\{b_{n_k}\}$也存在收敛的子数列$\{b_{n_{k_i}}\}$. 设$\lim\limits_{i\to\infty}b_{n_{k_i}}=b_0$,从而有界点列$\{P_n\}$的子点列$\{P_{n_{k_i}}\}$收敛于 $P_0(a_0,b_0)$. □

以上五个定理是平面$\mathbb{R}^2$的连续性的不同表现形式,它们是彼此等价的.

三、多元函数概念

在本章开始时已经看到,在许多数学的理论问题中和实际问题中常遇到一个变量同时依赖于多个变量的情形,我们将它们归结为多元函数.

定义 设平面点集 $D\subset\mathbb{R}^2$,$D\neq\varnothing$,称 D 到$\mathbb{R}$ 的映射 f 为**二元数值函数**,简称为**二元函数**,表为

$$f: D\to\mathbb{R}$$

点 $P(x_1,x_2)\in D$ 对应的实数 y,称为函数 f 在点 P 的**函数值**,表为

$$y=f(P)\quad 或\quad y=f(x_1,x_2)$$

D 称为函数 f 的**定义域**,数集

$$f(D)=\{y\mid y=f(P),P\in D\}\subset\mathbb{R}$$

称为函数 f 的**值域**. 通常还将 P 的坐标 $x_i(i=1,2)$称为 f 的**自变量**,而将 y 称为**因变量**.

与一元函数相同,为了方便,我们常常将二元函数 $f: D\to\mathbb{R}$,简记为

$$y=f(P)\quad 或\quad y=f(x_1,x_2),\quad P(x_1,x_2)\in D$$

二元函数的概念不难推广为 n 元函数的概念,这只要将平面点集 D 改为 n 维空间$\mathbb{R}^n$中的点集就可以了,我们简记 n 元函数为

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

二元和二元以上的函数统称为**多元函数**.

一般地说,二元函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 的**图像**是指三维空间$\mathbb{R}^3$的点集

$$G(f)=\{P(x,y,z)\mid(x,y)\in D,z=f(x,y)\}$$

我们经常遇到的二元函数 $z=f(x,y)$ 的图像绝大多数都是三维空间 $\mathbb{R}^3$ 的曲面.

例 3　求函数 $z=1-x-y$ 的定义域和值域,并描绘出它的图像.

解　定义域 $D=\mathbb{R}^2$,值域 $f(D)=\mathbb{R}$,图像(如图 7 - 2)是通过 A,B,C 三点的平面.　□

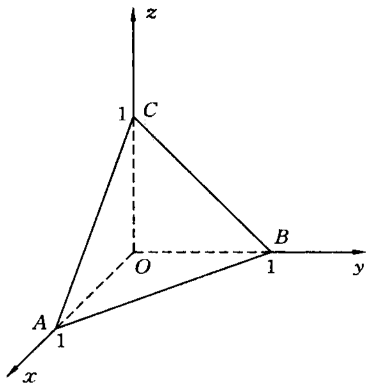


图 7 - 2

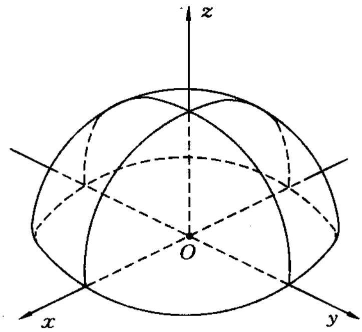


图 7 - 3

例 4　求函数 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的定义域和值域,并描绘出它的图像.

解　定义域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$ 是有界闭区域,值域 $f(D)=[0,R]$ 是有界闭区间,图像(如图 7 - 3)是以原点为中心,以 R 为半径的上半球面.　□

应该注意,若三维空间 $\mathbb{R}^3$ 有一曲面 S,平行于 z 轴的直线至多与 S 交于一点,则曲面 S 确定了一个二元函数 $z=f(x,y)$. 曲面 S 在 xy 平面的投影区域就是该函数的定义域.

练习题 7.1

1. 描绘下列平面区域,并指出它是否是开区域、闭区域、有界区域、无界区域:

(1) $\{(x,y)\mid x^2<y\}$;

(2) $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$;

(3) $\{(x,y)\mid |x+y|\leqslant 1\}$;

(4) $\{(x,y)\mid |x|+|y|<1\}$.

2. 描绘下列空间区域,并指出它是开区域还是闭区域:

(1) $V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 9\}$;

(2) $V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2<z,z<1\}$;

(3) $V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant 4,|z|\leqslant 2\}$;

(4) $V=\{(x,y,z)\mid |x|+|y|+|z|<1\}$.

3. 指出下列各平面点集 E 的边界 ∂E 以及所有内点组成的集合 E°:

(1) $E=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2<4\}$;

(2) $E=\{(x,y)\mid y>x^2\}$;

(3) $E=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y<1\}$;

(4) $E=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{Z},y\in\mathbb{Z}\}$.

4. 证明：若点 P 是平面点集 E 的聚点，但不是 E 的内点，则点 P 是 E 的边界点.

5. 证明：若点 P 是平面区域 D 的聚点，则 $\exists\{P_n\}\subset D$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P$.

6. 求下列函数的定义域：

(1) $z=\sqrt{4x^2+y^2-1}$；

(2) $z=\ln(x^2+y^2-1)+\sqrt{2-x^2-y^2}$；

(3) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$；

(4) $z=y+\arcsin x$；

(5) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}\quad(R>r)$；

(6) $u=\arccos\dfrac{z}{x^2+y^2}$.

7. 求下列函数在指定点的函数值：

(1) 若 $f(x,y)=xy+\dfrac{x}{y}$，求 $f\left(\dfrac{1}{2},3\right)$ 与 $f(1,-1)$；

(2) 若 $f(x,y)=x^2-y^2$，求 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)$；

(3) 若 $f\left(x+y,\dfrac{x}{y}\right)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

8. 描绘下列函数的图像：

(1) $z=1+x+y$； (2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$；

(3) $z=x^2+y^2$； (4) $z=xy$.

9. 在 $\mathbb{R}^2$ 中有点列 $P_n=\left(\dfrac{1}{n},\sqrt[n]{n}\right)$，$n\in\mathbb{N}$. 求证：

$P_n=\left(\frac{1}{n},\sqrt[n]{n}\right)$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}P_n=(0,1)$

10. 证明：$\mathbb{R}^2$ 中的收敛点列是有界的.

* * * *

11. 描述实数集 $\mathbb{R}$ 的连续性的确界原理和单调有界定理能否推广到二维空间 $\mathbb{R}^2$ 中.

12. 应用闭矩形套定理证明聚点定理.

§7.2 二元函数的极限与连续

一、二元函数的极限

我们首先讨论二元函数 $z=f(x,y)$ 的极限. 与一元函数极限类似，若在点 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$，即

$$\rho(P,P_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$$

时，对应的函数值 $f(x,y)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称 A 是二元函数 $f(P)$ 在 $P\to P_0$ 时的极限.

定义 设二元函数 $f(P)$ 在区域 D 有定义，P_0 是 D 的聚点. 若 $\exists A\in\mathbb{R}$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall P\in D$：$0<\rho(P,P_0)<\delta$，有