QQ教辅
QQJIAOFU

点击专项

根据新课标编写　适合各种版本教材　新课标

点击专项

DIANJIZHUANXIANG

主编：李永哲

高中数学

导数及其应用　复数

延边大学出版社

QQ教辅

QQJIAOFU

点击专项

根据新课标编写　适合各种版本教材　新课标

点击专项

DIANJIZHUANXIANG

高中数学

本册主编：王春花

编　　委：尹微微　徐丽瑷　徐　嵘　张　欣　刘晓菲　高　琨　兰俊义　石成合　曹艳菊

导数及其应用　复数

延边大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

点击专项·高中数学·导数及其应用、复数/李永哲主编.
—延吉:延边大学出版社,2009.8
ISBN 978-7-5634-2831-1

Ⅰ.点… Ⅱ.李… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 130274 号

点击专项·高中数学·导数及其应用、复数

主编:李永哲

责任编辑:秀　豪

出版发行:延边大学出版社

社址:吉林省延吉市公园路 977 号　　**邮编**:133002

网址:http://www.ydcbs.com

E-mail:ydcbs@ydcbs.com

电话:0433-2732435　　**传真**:0433-2732434

发行部电话:0433-2133001　　**传真**:0433-2733266

印刷:大厂回族自治县兴源印刷厂

开本:880×1230　1/32

印张:11.625　　**字数**:217 千字

印数:1—12000

版次:2010 年 3 月第 1 版

印次:2010 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5634-2831-1

定价:19.00 元

前 言 Foreword

在数学这门学科中,知识的各个部分是有关联的,但各知识都有自己的特点。因此,在学习过程中,数学各专题知识独特的规律就需要学生们细心把握。

正因为如此,我们聘请多年在一线教学工作岗位的特高级教师,根据教育部颁布的新课标和新大纲的要求,编写了本书《点击专项——高中数学 导数及其应用、复数》,目的是让学生们在学习本数学专题时对这部分知识内容有深刻的理解和掌握。

为使广大读者更方便地使用本书,本书按从易到难的梯度编写,这样,对本专题知识没有吃透的学生就可以迅速掌握本专题的知识;中等水平的学生在精读本书提高篇后会使自己更上一层楼;优秀的学生可以通过拓展篇的训练使自己处在更高的水平。

本书精选的大量不同难度的习题能让不同层次的学生有的放矢,并体验到学习的乐趣。

本书由如下版块构成:

知识归纳

本版块将导数及其应用、复数的知识和规律进行总结和归纳,将其主要规律呈示出来,使学生们在学习中能在最短的时间内掌握本章节的内容。

典型例题及训练题

本版块分为例题和训练题两部分。基础篇较简单。学生通过基础篇的训练能尽快地掌握本章节的基本内容,对基本内容和概念加深理解并熟练掌握。

提高篇具有相当的难度。学生通过提高篇的训练，不仅能更熟练地掌握本章节的基本内容，而且能对与本章节相关联的内容有一定的理解和掌握。

拓展篇的题难度很大，但这些题都是在本章节的基础知识之上进行变型和延伸的，因此，这些题是本章节内容的总结与拓展。学生通过拓展篇的训练，能够对本章节的内容有个明晰的认识。

参考答案

全书给出了标准答案，有一定难度的题还给出了解题思路和具体步骤。

充分阅读本书，通过这种阶梯式的训练，任何学生都能迅速有效地掌握本章节的内容，从而达到点击专项的目的。

目 录 Contents

第一章　导数及其应用

本章教学目标及要求

(1)导数概念及其几何意义

①通过对大量实例的分析,经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程,了解导数概念的实际背景,知道瞬时变化率就是导数,体会导数的思想及其内涵.

②通过函数图象直观地理解导数的几何意义.

(2)导数的运算

①能根据导数定义求函数$y=c$,$y=x$,$y=x^2$,$y=x^3$,$y=\frac{1}{x}$,$y=\sqrt{x}$的导数.

②能利用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则求简单函数的导数,能求简单的复合函数(仅限于形如$f(ax+b)$)的导数.

③会利用导数公式表.

(3)导数在研究函数中的应用

①结合实例,借助几何直观探索并了解函数的单调性与导数的关系;能利用导数研究函数的单调性,会求不超过三次的多项式函数的单调区间.

②结合函数的图象,了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件;会用导数求不超过三次的多项式函数最大值,最小值;体会导数方法在研究函数性质中的一般性和有效性.

(4)生活中的优化问题举例

例如:通过使利润最大、用料最省、效率最高等优化问题,体会导数在解决实际问题中的作用.

(5)定积分与微积分基本定理

①通过实例(如求曲边梯形的面积,变力做功等),从问题情境中了解定积分的实际背景:借助几何直观体会定积分的基本思想,初步了解定积分的概念.

②通过实例(如变速运动的物体在某段时间内的速度与路程的关系),直观了解微积分基本定理的含义.

(6)数学文化

收集有关微积分创立的时代背景和有关人物的资料,并进行交流;体会微积分的建立在人类变化发展中的意义和价值.

1.1 导数的概念

1.1.1 变化率问题

一、知识归纳

1. 平均变化率

(1)平均变化率的定义

对于函数 $f(x)$,当自变量 x 从 x_1 变到 x_2 时,函数值从 $f(x_1)$ 变到 $f(x_2)$ 则称式子 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 为函数 $f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率.

(2)符号表示

习惯用 $\Delta x=x_2-x_1$,$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$,于是平均变化率可以表示为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

二、学法指导

1. 求函数 $f(x)$ 在 $[x_0,x_1]$ 内平均变化率的步骤

(1)先计算函数的增量 $\Delta y=f(x_1)-f(x_0)$.

(2)计算自变量增量 $\Delta x=x_1-x_0$.

(3)得平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.

2. 对平均变化率意义的认识.

函数的平均变化率可以表现出函数的变化趋势,增量 Δx 取值越小,越能准确体现函数的变化情况.

在式子 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ 中,当 x_1 取定值,Δx 取不同的数值、函数的平均变化率不同,当 Δx 取定值,x_1 取不同的数值时,函数的平均变化率也不一样.

3. 平均变化率的几何意义

如图 1.1 -1 所示,函数 $f(x)$ 的平均变化率的几何意义是:直线 AB 的斜率. 事实上,$k_{AB}=\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. 根据平均变化率的几何意义,可求解有关曲线割线的斜率.

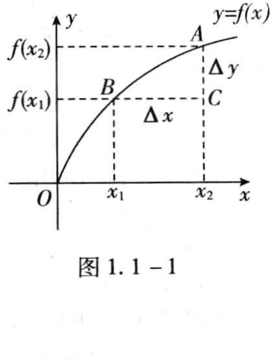

图 1.1 -1

三、典型例题及训练题

(一)基础篇

典例分析

题型一:求平均变化率

例1 求函数 $f(x)=1-2x$ 在下列区间上的平均变化率.

(1) $[-1,1]$;(2) $[0,4]$;(3) $[1,1+\Delta x]$ $(\Delta x>0)$.

解:(1)函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的平均变化率:$\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{-1-3}{2}=-2$;

(2)函数 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上的平均变化率:$\dfrac{f(4)-f(0)}{4-0}=\dfrac{-7-1}{4}=-2$;

(3)函数 $f(x)$ 在 $[1,H\Delta x]$ 上的平均变化率:$\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{1+\Delta x-1}=\dfrac{1-2-2\Delta x+1}{\Delta x}=-2$.

点评

由上可看出一次函数 $f(x)=ax+b(a\neq 0)$ 在任一闭区间上的平均变化率不变.

例2 物体做直线运动的方程为 $s=s(t)=3t^2-5t$(位移单位:m,时间单位为:s),求物体在2s到4s时的平均速度.

解:2s到4s时的平均速度:$\bar{v}=\dfrac{(3\times 4^2-5\times 4)-(3\times 2^2-5\times 2)}{4-2}=13(\mathrm{m/s})$

点评

物体在2s到4s时的平均速度,就是函数 $s=3t^2-5t$ 在 $[2,4]$ 上的平均变化率.

例3 求函数 $f(x)=x^2-2x+3$ 在 $[2,\frac{9}{4}]$ 上的平均变化率.

分析:函数在区间 $[x_1,x_2]$ 的平均变化率为 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

解:$\dfrac{f(\frac{9}{4})-f(2)}{\frac{9}{4}-2}=\dfrac{9}{4}$

点评

本题的思路明显,但要计算准确.

题型二:求平均变化率的最值

例 4 求函数 $y=x^2$ 在 $x=1,2$ 附近的平均变化率,取 $\Delta x=\frac{1}{3}$ 时,哪一点附近平均变化率大?

分析:运用函数平均变化率的公式,先算出 $\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$,再除以 Δx.

解:在 $x=1$ 附近的平均变化率为:$k_1=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=2+\Delta x$

在 $x=2$ 附近的平均变化率为:$k_2=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=4+\Delta x$

若 $\Delta x=\frac{1}{3}$ 时,则 $k_1=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$;$k_2=\frac{1}{3}+4=\frac{13}{3}$;所以 $k_1<k_2$.

即在 $x=2$ 附近的平均变化率大.

点评

注意结构的化简整理和平均变化率的求解方法.

基础训练

1. 函数 $f(x)=-3x+1$ 在区间 $[0,2]$ 上的平均变化率为 ( )

A. -1　　B. -2　　C. -3　　D. -4

2. 函数 $f(x)=ax+b$ 在 $[-1,0]$ 上的平均变化率为 -2,则 ( )

A. $a=2$　　B. $a=-2$　　C. $a=1$　　D. a 不确定

3. 函数 $f(x)=x^2-1$ 在区间 $[1,m]$ 上的平均变化率为 3,则 m 的值 ( )

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 4

4. 在曲线 $y=x^2+x$ 上取一点 $P(1,2)$ 和它附近的点 $Q(1+\Delta x,2+\Delta y)$,那么 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 为 ( )

A. $\Delta x+2$　　B. $2\Delta x+(\Delta x)^2$　　C. $\Delta x+3$　　D. $3\Delta x+(\Delta x)^2$

5. 函数 $f(x)=x^2$ 在下列区间上的平均变化率最大的是 ( )

A. $[1,1.1]$　　B. $[1,2]$　　C. $[1,3]$　　D. $[1,1.001]$

6. 函数 $y=\frac{1}{x}$ 上两点 $A(-1,-1)$,$B(-\frac{1}{2},-2)$ 连线的斜率是 ( )

A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. -2　　D. 2

7. 一质点的运动方程是 $s=5-3t^2$,则在一段时间 $[1,1+\Delta t]$ 内相应的平均速度为 ( )

A. $3\Delta t+6$　　B. $-3\Delta t+t$　　C. $3\Delta t-6$　　D. $-3\Delta t-6$

8. $f(x)=1-x^2$ 在 $[-1,\Delta x]$ 上的平均变化率小于 1,大于 $\frac{1}{2}$,则 Δx 范围是________.

9. 求证:函数 $y=kx+b$ 在区间 $[m,n]$ 上的平均变化率为 k.

10. 物体做直线运动的方程为 $s=3t^2-5t$(位移单位是 m,时间单位是 s),求物体在 2s 到 4s 时的平均速度及 2s 到 3s 时的平均速度.

(二)提高篇

典例分析

题型一:平均变化率

例1 已知自由落体的运动方程为 $s=\frac{1}{2}gt^2$.

求:(1)落体在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内的平均速度 $\bar{v}$.

(2)落体在 $t=10\text{s}$ 到 $t=10.1\text{s}$ 这段时间内的平均速度.

解:(1)当 t 由 t_0 取得一个改变量 Δt 时,s 取得相应的改变量为

$\Delta s=\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2=gt_0\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2$.

因此,在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内,落体的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{gt_0\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t}=g(t_0+\frac{1}{2}\Delta t) \quad ①$$

(2)当 $t_0=10\text{s}$,$\Delta t=0.1\text{s}$ 时,则①中的平均速度为 $\bar{v}=g(10+\frac{1}{2}\times 0.1)=10.05g$.

例2 若函数 $f(x)=2x^2-1$ 的图象上一点(1,1)及邻近一点 $(1+\Delta x,1+\Delta y)$,则 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=$ (　　)

A. 4　　B. $4x$　　C. $4+2\Delta x$　　D. $4+2(\Delta x)^2$

解:$\because \Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=2(1+\Delta x)^2-1-1=4\Delta x+2(\Delta x)^2$

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=4+2\Delta x$. 故选 C

题型二:已知变化率求 Δx 范围

例3 若函数 $f(x)=1-x^2$ 在区间 $[-1,-1+\Delta x]$ $(\Delta x>00)$ 上的平均变化率大于 -2,求 Δx 的范围.

解:$f(x)$ 在区间 $[-1,-1+\Delta x]$ 上的平均变化率为:

$$\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{-1+\Delta x-(-1)}=\frac{1-(\Delta x-1)^2-0}{\Delta x}=\frac{2\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}=2-\Delta x$$

$\therefore 2-\Delta x>-2$,$\therefore 0<\Delta x<4$,

$\therefore \Delta x$ 的范围是(0,4).

点评

函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,-1+\Delta x]$ 上的平均变化率是 Δx 的函数.

题型三:变化率在物理学中的应用

例4 一正方体铁板在0℃时,边长为10cm,加热后膨胀,当温度为t℃时,边长变为$10(1+at)$cm,a为常数,试求铁板面积对温度的膨胀率.

分析:膨胀率即为函数的平均变化率,运用平均变化率的求解方法求解.

解:面积的变化量为:

$\Delta S=10^2[1+a(t+\Delta t)]^2-10^2(1+at)^2=200(a+a^2t)\Delta t+100a^2\Delta t^2$

所以膨胀率为:$\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=200(a+a^2t)+100a^2\Delta t$

点评

这是变化率在物理学中的应用.

题型四:变化率在几何学中的应用

例5 设圆的面积为S,半径为r,求面积S关于半径r的变化率.

分析:先用r将S表示出来,运用$\dfrac{\Delta S}{\Delta r}$来求变化率.

解:$\because \Delta S=\pi(r+\Delta r)^2-\pi r^2=2\pi r(\Delta r)+\pi\Delta r^2$

$\therefore \dfrac{\Delta S}{\Delta r}=\dfrac{2\pi r(\Delta r)+\pi\Delta r^2}{\Delta r}=2\pi r+\pi\Delta r$

点评

体会变化率在几何中的应用.

例6 过曲线$y=f(x)=x^3$上两点$P(1,1)$和$Q(1+\Delta x,1+\Delta y)$作割线,求出当$\Delta x=0.1$时割线斜率.

分析:可以运用已知直线两点坐标的方法求出割线的斜率.

解:$\because k=\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\dfrac{(\Delta x+1)^3-1}{\Delta x}=(\Delta x)^2+3(\Delta x)+3$

当$\Delta x=0.1$时,割线的斜率为:$k=0.1^2+0.3+3=3.31$

点评

学会割线斜率的求解方法,这对后面学习导数的几何含义有重要意义.

提高训练

1. 在曲线$y=-x^2$上去一点A的横坐标为-6,在A处的横坐标的增量Δx为 ( )

A. 大于零　　B. 小于零　　C. 等于零　　D. 不确定

2. 已知函数$y=3x-x^2$在$x=2$处的增量为$\Delta x=0.1$,则Δy为 ( )

A. -0.11　　B. 1.1　　C. 3.80　　D. 0.29

3. 在导数定义中,自变量的增量 Δx　(　　)

A. $\Delta x>0$　B. $\Delta x<0$　C. $\Delta x=0$　D. $\Delta x\neq 0$

4. 设函数 $y=f(x)$,当自变量 x 由 x_0 改变到 $x_0+\Delta x$ 时,函数的改变量 Δy 为　(　　)

A. $f(x_0+\Delta x)$　B. $f(x_0)+\Delta x$

C. $f(x_0)\cdot\Delta x$　D. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

5. 将半径为 R 的球加热,若球的半径增加 ΔR,则球的体积增量 ΔV 约等于　(　　)

A. $\frac{4}{3}\pi R^2\Delta R$　B. $4\pi R^2\Delta R$　C. $4\pi R^2$　D. $4\pi R\Delta R$

6. 自由落体的方程为 $s=\frac{1}{2}gt^2$,$g=10\text{m/s}$,做一物体从 $t=1$ 状态下开始自由落下,0.01 秒后,物体的增量为________米,在 $t=1$ 处的平均变化率为________.

7. 求 $y=3+x-x^2$ 在 $x=1$ 附近的平均变化率.

8. 求函数 $y=x^2+\frac{1}{x}+5$ 从 1 到 2 的平均变化率.

(三)拓展篇

典例分析

题型一:求平均变化率在物理学中的应用

例 1　已知某质点按规律 $s=(2t^2+2t)$m 做直线运动,求:

(1)该质点在前 3s 内的平均速度.

(2)该质点在 2s 到 3s 内的平均速度.

分析: 平均速度为指定时间段距离差除以时间差.

解: (1)由题设知,$\Delta t=3\text{s}$,$\Delta s=s(3)-s(0)=24\text{m}$,所以平均速度为 $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=8\text{m/s}$

(2)由题设知,$\Delta t=3-2=1\text{s}$,$\Delta s=s(3)-s(2)=12\text{m}$,所以平均速度为 $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=12\text{m/s}$

点评

了解实际问题如何翻译数学问题,掌握函数平均变化率在物理中的应用.

题型二:求分段函数平均变化率

例 2　求 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & (x\leqslant 0)\\ x+1 & (x>0)\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的平均变化率.

分析: 对于分段函数在分段点处的平均变化率,要对其进行分段讨论.

解: 当 $x\leqslant 0$ 时,$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2+1-1}{x}=x$

当 $x>0$ 时，$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x+1-1}{x}=1$.

点评

在分类讨论时要注意所对应的表达式的结构，掌握分段函数在分段点平均变化率的求解方法：分段求解.

拓展训练

1. 设函数 $f(x)=2x+1$ 在区间 $[-3,-1]$ 上的平均变化率为 a，在区间 $[0,5]$ 上的平均变化率为 b，则下列结论中正确的是 ( )

A. $a>b$　　B. $a<b$　　C. $a=b$　　D. 不确定

2. 已知函数 $y=\frac{2}{x}$，当 x 由 2 变到 1.5 时，函数的增量 $\Delta y=$ ________.

3. 求函数 $y=x^2+ax+b$（a、b 为常数）在区间 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 的平均变化率.

四、参考答案

基础训练

1. C　**解析**：$f(x)=-3x+1$ 在区间 $[0,2]$ 上的平均变化率为 $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=-3$，故选 C.

2. B　**解析**：$f(0)=b$　$f(-1)=-a+b$　$\therefore \frac{b-(-a+b)}{0-(-1)}=-2$　$\therefore a=-2$.

3. B　**解析**：$f(m)=m^2-1$　$f(1)=0$　$\therefore \frac{m^2-1}{m-1}=3$　$\because m+1=3$　$\therefore m=2$

4. C　**解析**：$f(1+\Delta x)=(1+\Delta x)^2+(1+\Delta x)=(\Delta x)^2+3\Delta x+2$

$\therefore 2+\Delta y=(\Delta x)^2+3\Delta x+2$　$\therefore \Delta y=(\Delta x)^3+3\Delta x$　$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+3$

5. C　**解析**：$\frac{f(1.1)-f(1)}{1.1-1}=2.1$　$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=3$

$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=4$　$\frac{f(1.0001)-f(1)}{0.001}=2.001$.

6. C　**解析**：$k=\frac{-2-(-1)}{-\frac{1}{2}-(-1)}=\frac{-1}{\frac{1}{2}}=-2$

7. D　**解析**：平均速度在数值上等于平均变化率，则

$\frac{s(1+\Delta t)-s(1)}{\Delta t}=\frac{5-3(1+\Delta t)^2-5+3\Delta t}{\Delta t}=-3\Delta t-6$

8. $0<\Delta x<\frac{1}{2}$　**解析**：$f(\Delta x)-f(-1)=\frac{1-(\Delta x)^2-0}{\Delta x+1}=\frac{1-(\Delta x)^2}{1+\Delta x}=1-\Delta x$

$\therefore \frac{1}{2} < 1 - \Delta x < 1 \quad \therefore 0 < \Delta x < \frac{1}{2}$

9. **证明**:$\because f(m) = km + b, f(n) = kn + b, \therefore$ 平均变化率为:$\frac{f(n) - f(m)}{n - m} = k$

10. **解**:2s 到 4s 的平均速度为:$\frac{(3 \times 4^2 - 5 \times 4) - (3 \times 2^2 - 5 \times 2)}{4 - 2} = 13(\mathrm{m/s})$.

2s 到 3s 时的平均速度为:$\frac{(3 \times 3^2 - 5 \times 3) - (3 \times 2^2 - 5 \times 2)}{3 - 2} = 10(\mathrm{m/s})$.

提高训练

1. D　2. A　3. D　4. D

5. B　**解析**:$\Delta V = \frac{4}{3}\pi(R + \Delta R)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2 \Delta R + 4\pi R \Delta R^2 + \frac{4}{3}\pi \Delta R^3 \approx 4\pi R^2 \Delta R$.

6. 0.1005　10.05

7. **解**:$\frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{3 + (1 + \Delta x) - (1 + \Delta x)^2 - 3}{\Delta x} = \frac{-\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = -1 - \Delta x$.

8. **解**:$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 + \frac{1}{x + \Delta x} + 5 - (x^2 + \frac{1}{x} + 5)}{\Delta x} = 2x + \Delta x - \frac{1}{x(x + \Delta x)}$

$\therefore$ 求从 1 到 2 的平均变化率,$\therefore x = 1, \Delta x = 1, \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{2}$.

拓展训练

1. C　**解析**:原题通过求 $f(x) = 2x + 1$ 在不同区间上的平均变化率,进而由结果总结出结论:一次函数 $y = kx + b$ 在区间$[m,n]$上的平均变化率为常数 k.

2. $\frac{1}{3}$

3. **解**:$\Delta y = [(x_0 + \Delta x)^2 + a(x_0 + \Delta x) + b] - (x_0^2 + ax_0 + b) = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + a \cdot \Delta x$. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2x_0 + a)\Delta + (\Delta x)^2}{\Delta x} = (2x_0 + a) + \Delta x$.

1.1.2　瞬时变化率和导数

一、知识归纳

1. 瞬时变化率和导数的定义

设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点附近有定义,对自变量的任一改变量 Δx,函数的改变量为 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$,如果当 Δx 趋近于 0 时,平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 趋近于一个常数 m,那么常数 m 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的瞬时变化率.

若极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在,则称 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导.可以记作:$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$.所以在某点处瞬时变化率和此点处的导数是一个概念.

2. 导函数

如果 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点 x 都可导的,则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上可导.这样,对开区间 (a,b) 内每个值 x,都对应一个确定的导数 $f'(x)$,这个函数成为函数 $y=f(x)$ 的导函数,记为 $f'(x)$ 或 y' 或 $(y'x)$.

3. 瞬时速度

一般地,如果物体的运动规律是 $s=s(t)$,物体在时刻 t 的瞬时速度 v,就是物体在 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内,当 $\Delta t\to 0$ 时,平均速度的极限,即 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$

几点说明:(1)函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,是指 $\Delta x\to 0$ 时,$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$有极限.如果$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$不存在极限,就说函数在点 x_0 处不可导,或说无导数.

(2)$\Delta x=x-x_0$ 是自变量 x 在 x_0 处的改变量,所以 Δx 可以为正,也可以为负,也可以时正时负,但 $\Delta x\neq 0$,而函数变化可正、可负、也可以是零.

(3)"函数在某定点处的导数 $f'(x_0)$"是一个数,不是变量.

4. 求导数的一般方法

(1)求函数的改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

(2)求平均变化率$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

(3)取极限,得导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

二、典型例题及训练题

(一)基础篇

典例分析

题型一:求瞬时速度

例 1 物体做直线运动方程为 $s=s(t)=3t^2-5t$(位移单位:m,时间单位:s)

(1)求物体在 2s 时的瞬时速度;(2)求物体在 t_0 时的瞬时速度.

解:(1)设 $t_0=2$,则 $s(2+\Delta t)-s(2)=3(2+\Delta t)^2-5(2+\Delta t)-(3\times 2^2-5\times 2)=7\Delta t+3(\Delta t)^2$

$\dfrac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}=7+3\Delta$,∴ 当 $\Delta t\to 0$ 时,瞬时速度为 7m/s.