北京工业大学研究生创新教育系列教材

一般拓扑学讲义

彭良雪　编著

科学出版社

北京工业大学研究生创新教育系列教材

一般拓扑学讲义

彭良雪 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书从拓扑学最基本的概念及构造拓扑的方法开始，通过最基本的例子，逐步介绍一般拓扑学的基本概念与基本理论. 主要内容包括：集论初步知识、构造拓扑方法、几种可数性的关系、连续映射性质、紧性质、连通性质、分离性质、紧化与度量化定理等.

本书是拓扑学入门的书籍，可作为数学专业的本科生、研究生的拓扑学教材，也可供相关专业的教师和科人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

一般拓扑学讲义/彭良雪编著. —北京：科学出版社，2011
ISBN 978-7-03-030087-4
Ⅰ. ①一… Ⅱ. ①彭… Ⅲ. ① 拓扑-基本知识 Ⅳ. ①O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 012494 号

责任编辑：赵彦超 汪 操 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011 年 2 月第 一 版 开本：B5 (720 × 1000)
2011 年 2 月第一次印刷 印张：8 3/4
印数：1—3 000 字数：165 000

定价：36.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

拓扑学的发展非常迅速, 在数学各分支的应用也越来越广泛, 因此许多高校都把拓扑学, 特别是把一般拓扑学作为基础数学专业研究生的学位必修课. 另外, 许多高校数学系为本科生也开设了拓扑学选修课程. 编写本书的目的, 就是为了更好地方便初学者及讲授该门课程的教师.

本书的编写参照了参考文献中的相关文献. 作者精选了一些内容, 详细地论述了各空间类的关系与性质, 并根据自己多年的教学经验, 给出了易于学生接受的定理证明. 特别地在第 2 章构造拓扑的方法中对几种可数性质展开讨论, 这样会让学生进一步熟悉构造拓扑的方法及所构造拓扑空间的性质.

本书是一般拓扑学的入门教材, 适合于本科生、研究生及拓扑学爱好者使用. 对于本科生, 通过前五章的学习, 可以对数学分析中的实数连续性理论、闭区间上连续函数的最大 (最小) 值性质及介值性质等理论有个全新的认识; 对于拓扑学方向的研究生, 可用 80~90 个左右的学时学完本书; 对于非拓扑学方向的研究生, 可用 50~60 个学时选学完前六章. 通过对本书的学习, 可以为进一步学习更深入的拓扑学知识打下基础.

本书是作者在多年教学经验的基础上写成的. 作者通过教学发现, 很多初学者, 特别是本科生, 学习拓扑学都有一定的困难, 他们希望有一本更适合初学者学习的书 —— 证明详尽、例子充分的拓扑学入门书籍. 基于此目的, 作者编写了本书, 希望能对初学者有所帮助.

一般拓扑学的内容是丰富多彩的, 本书只选编了适合初学者学习的最基本内容. 读者若想学习更深入的一般拓扑学知识, 可参阅文献 [2], [4], [6] 与 [8].

感谢北京工业大学研究生课程建设项目的资助, 在该项目的支持下, 本书才能与读者见面.

由于本人学识所限, 书中疏漏乃至错误在所难免, 敬请读者批评指正.

彭良雪

2010 年 7 月 1 日于北京

目　　录

第1章　预 备 知 识

一般拓扑学主要讲述拓扑空间的内部结构及拓扑空间相互间的关系. 由于拓扑结构是在集合上建立的, 因此有必要讨论一下集合的基本知识.

在学习一门课程的时候, 往往要给出最基本定义, 那什么是集合呢? 以前往往这样定义: 集合就是具有特定性质的事物的全体, 如用符号表示应是: 集合 $A=\{x:x$ 具有性质 $\mathcal{P}\}$. 其实如上定义将会导致矛盾的出现. 例如, 令 $X=\{x:x$ 是集合 $\}$, $A=\{x:x\in X, x\notin x\}$ (其中 $\notin$ 为不属于符号, $\in$ 为属于符号), 则 A 是集合, 这样 $A\in X$. 如果 $A\in A$, 则 $A\notin A$; 如果 $A\notin A$, 则 $A\in A$, 这是相互矛盾的, 因此说 “集合就是具有特定性质的事物的全体” 这句话是有问题的. 这就是著名的 Rusell 悖论. 为了避免上面所出现的矛盾, 人们给出了有关集合的一些公理, 可参阅文献 [5].

只需对集合有个初步的了解, 即只需知道所用到的集合是有意义的, 一些详细的知识可参阅文献 [5]. 下面来看集合的表示与运算.

1.1　集合的表示

一般用大写字母表示集合, 如集合 A, B, C 等, 用小写字母表示集合中的元素, 如 $A=\{a,b,c\}$, 则称 a 是集合 A 的元素, 用 $a\in A$ 表示 a 是集合 A 的元素, 若 d 不是 A 的元素, 用 $d\notin A$ 表示. 用 R 表示实数集, 即 $R=\{x:x$ 是实数$\}$. 令 $Q=\{x:x$ 是有理数$\}$, $N=\{n:n$ 是正整数$\}$, $Z=\{n:n$ 是整数$\}$, 以后将用 R, Q, N 和 Z 来分别表示实数集、有理数集、自然数集和整数集. 用 $\varnothing$ 表示空集, 即不含任何元素的集合. 如果集合 A 中的每一元素都是集合 B 中的元素, 则称集合 A 是集合 B 的子集, 记为 $A\subset B$, 如果 $A\subset B$ 不成立, 记为 $A\not\subset B$. 有时集合也简称为集. 如果 $A\subset B$ 同时 $B\subset A$, 则 $A=B$; 如果 $A\subset B$ 与 $B\subset A$ 不同时成立, 则称 $A\neq B$.

1.2　集合的运算

定义集合的并、交、差运算:

$$A\bigcup B=\{x:x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$

$$A\bigcap B=\{x:x\in A \text{ 且 } x\in B\};$$

$$A\setminus B=\{x:x\in A \text{ 但 } x\notin B\}.$$

常用 $\mathcal{U}$ 来表示一集族, 即 $\mathcal{U}$ 中的每一元素也是集合, 例如, $\mathcal{U}=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$. 定义集族 $\mathcal{U}$ 的交与并分别为: $\bigcap\mathcal{U}=\{x:\text{对每一 } A\in\mathcal{U}, x\in A\}$, $\bigcup\mathcal{U}=\{x:\text{存在 } A\in\mathcal{U}, \text{使得 } x\in A\}$. 例如, 若 $\mathcal{U}=\{\{a\},\{a,c\}\}$, 则 $\bigcap\mathcal{U}=\{a\}$, $\bigcup\mathcal{U}=\{a,c\}$.

关于集合与集族, 有下面的运算:

$$A\setminus(B\bigcup C)=(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C);$$

$$A\setminus(B\bigcap C)=(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C);$$

$$A\setminus\bigcup\mathcal{U}=\bigcap\{A\setminus U:U\in\mathcal{U}\};$$

$$A\setminus\bigcap\mathcal{U}=\bigcup\{A\setminus U:U\in\mathcal{U}\}.$$

1.3 映　射

定义 1.1　设 A 与 B 是两个集合, 集合 $\{(a,b):a\in A,b\in B\}$ 称为集合 A 与集合 B 的笛卡儿积, 记为 $A\times B$, 读作 “A 叉乘 B” 或 “A 与 B 的积”, 其中 (a,b) 为一有序偶, 称 a 为 (a,b) 的第一个坐标, b 为 (a,b) 的第二个坐标. 称 A 为 $A\times B$ 的第一坐标集, B 为 $A\times B$ 的第二坐标集. 把 $A\times B$ 称为 A 与 B 的积集, 简称为积.

定义 1.2　设 X 与 Y 是两集合, 如果 F 是 $X\times Y$ 的一个子集, 即 $F\subset X\times Y$, 则称 F 是从 X 到 Y 的关系, 如果 $(x,y)\in F$, 则称 xFy.

定义 1.3　若 F 是从 A 到 B 的关系, 且对每一 $a\in A$, 都存在唯一的 $b\in B$, 使得 aFb, 则称 F 是从 A 到 B 的映射.

一般用 f 来表示一映射, 即 $f:A\to B$, 称 A 是映射 f 的定义域, B 是 f 的值域. 值域为实数直线或实数直线子集的映射称为函数. 因此 $f(A)=\{b:\text{存在 } a\in A, \text{使得 } f(a)=b\}$, 于是 $f(A)\subset B$, 称 $f(A)$ 为 A 在 f 下的像. 如果 $f(A)=B$, 则称 f 是满映射, 简称为满射. 对于任意 $a\in A$, $b\in A$, 若 $a\neq b$, 有 $f(a)\neq f(b)$, 则称 f 是单映射, 简称为单射. 如果 f 既是单映射又是满映射, 则称 f 是一一映射, 或称为双映射. 对于 $C\subset B$, 令 $f^{-1}(C)=\{a:a\in A \text{ 且 } f(a)\in C\}$.

若 $f: X \to Y$ 是一个映射, 则 f 的一些基本性质如下:

(1) $f(X) \subset Y$;

(2) $f(A \bigcap B) \subset f(A) \bigcap f(B)$;

(3) $f(A \bigcup B) = f(A) \bigcup f(B)$;

(4) $f^{-1}(A \bigcap B) = f^{-1}(A) \bigcap f^{-1}(B)$;

(5) $f^{-1}(A \bigcup B) = f^{-1}(A) \bigcup f^{-1}(B)$; $f^{-1}(\bigcup \mathcal{U}) = \bigcup \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$;
$f^{-1}(\bigcap \mathcal{U}) = \bigcap \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$;

(6) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$, 其中 $C, D \subset Y$.

如果 $f: X \to Y$ 是一个映射, $g: Y \to Z$ 是一个映射, 则称 $g \circ f: X \to Z$ 是 f 与 g 的复合, 即 $(g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in X$.

例 1.4　$X = \{1, 2, 3\}, Y = \{a, b\}$.

$f: X \to Y$ 满足: $f(1) = a$; $f(2) = a$; $f(3) = b$. 令 $A = \{1\}, B = \{2\}$, 则 $A \bigcap B = \varnothing$, 但 $f(A) \bigcap f(B) = \{a\} \neq \varnothing$. □

下面几点是值得注意的:

(1) 一个单映射不一定是满映射.

例 1.5　$f_1 : \{1, 2, 3\} \to \{4, 5, 6, 7\}$, 令 $f_1(1) = 4$, $f_1(2) = 5$, $f_1(3) = 6$, 则 f_1 是单映射, 但不是满映射.

(2) 一个满映射不一定是单映射.

例 1.6　$f_2 : \{1, 2, 3\} \to \{a, b\}$, 令 $f_2(1) = a$, $f_2(2) = a$, $f_2(3) = b$, 则 f_2 是满映射, 但不是单映射.

(3) 如果 $f: X \to Y$ 是一映射, $A \subset X$, 则 $A \subset f^{-1}(f(A))$, 但不能推出 $A = f^{-1}(f(A))$.

例如例 1.6 中的映射 f_2, 若 $A = \{1\}$, 则 $f_2^{-1}(f_2(A)) = \{1, 2\} \neq A$. 应说明的一点是若 f 是单映射, 则一定有 $A = f^{-1}(f(A))$, 其中 $A \subset X$.

(4) 如果 $f: X \to Y$ 是一映射, 对任一 $B \subset Y$, 有 $f(f^{-1}(B)) \subset B$, 但不能推出 $B = f(f^{-1}(B))$.

对于例 1.5 中的映射 f_1, 若令 $B=\{6,7\}$, 则 $f_1^{-1}(B)=\{3\}$. 因此 $f_1(f_1^{-1}(B))=f_1(\{3\})=\{6\}\subset B$, 但 $\{6\}\neq B$. 应说明的一点是若 f 是满映射, 则一定有 $B=f(f^{-1}(B))$, 其中 $B\subset Y$.

1.4 序

实数集 R 具有如下性质:

(1) 对于任意 $x\in R, y\in R$, 若 $x\neq y$, 则有 $x<y$ 或 $y<x$;

(2) 若 $x\in R, y\in R, z\in R$, 且 $x<y, y<z$, 则一定有 $x<z$ 成立.

把具有上述性质 (1) 与 (2) 的集合称为线性序集, 下面是序的具体定义.

定义 1.7 在集合 A 上的一关系 F, 如果满足如下条件, 称之为序关系:

(1) 对任意 $x\in A, y\in A$, 如果 $x\neq y$, 则有 xFy 或 yFx 成立;

(2) 对任意 $x\in A$, xFx 都不成立;

(3) 如果 xFy, yFz, 则有 xFz.

如果在集合 A 上有如上的序关系, 则称 A 是一线性序集, 称 F 为 A 上的线性序关系.

定义 1.8 如果 X 是一集合且 $<$ 是 X 上的线性序关系, 且 $a<b$, 用 (a,b) 表示集合 $\{x: a<x<b\}$, 一般称 (a,b) 为一区间. 如果 $(a,b)=\varnothing$, 则称 b 是 a 的后继元.

定义 1.9 如果 A 与 B 是两集合, 且分别有序关系 $<_A$ 与 $<_B$, 若存在一双映射 $f: A\to B$, 使得当 $a_1<_A a_2$ 时有 $f(a_1)<_B f(a_2)$, 则称 A 与 B 有相同的序型, 称这样的 f 是序保持双映射.

例 1.10 实数直线 R 上的区间 $(-1,1)$ 与 R 有相同的序型.

令 $f:(-1,1)\to R$, 满足 $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$, 则 f 是一序保持双映射.

定义 1.11 若 A 是一序集, $<$ 为 A 上的线性序关系, $A_0\subset A$.

(1) 如果 $b\in A_0$, 且对每一个 $x\in A_0$, 若 $x\neq b$, 都有 $x<b$, 则称 b 是 A_0 的最大元, 记为 $b=\max A_0$;

(2) 如果存在 $b \in A$, 对任意 $x \in A_0$, 都有 $x < b$ 或 $x = b$, 则称 b 是 A_0 的上界;

(3) 如果 b 是 A_0 的上界, 且对 A_0 的每一上界 c, 若 $c \neq b$, 都有 $b < c$, 则称 b 是 A_0 的上确界, 记为 $b = \sup A_0$.

类似地有下界、最小元 (min) 及下确界 (inf) 的定义, 这里不再重复.

定义 1.12 若 A 是一线性序集, 且对 A 的任一非空子集 B 都存在最小元, 则称 A 是良序集.

定理 1.13 自然数集 N 是一良序集.

证明 按良序集的定义, 只需证 N 的每一非空子集 A 都存在最小元. 易知对任一 $n \in N$, $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的任一非空子集存在最小元. 令 $A \subset N$, $A \neq \varnothing$, 取 $a \in A$, 则有 $n \in N$, 使得 $a \in \{1, 2, \cdots, n\}$. 因此 $A \bigcap \{1, 2, \cdots, n\} \neq \varnothing$, 且有 $A \bigcap \{1, 2, \cdots, n\} \subset \{1, 2, \cdots, n\}$, 这样 $A \bigcap \{1, 2, \cdots, n\}$ 的最小元即是 A 的最小元. $\square$

注 整数集 Z 和实数集 R 都不是良序集, 但它们都是线性序集.

有了上述良序集的定义, 便有如下序数的概念.

定义 1.14 如果集合 A 的每个元素都是 A 的子集, 则称 A 是一传递集.

例如: $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$ 是一传递集.

定义 1.15 按 $\in$ 关系是良序的传递集合称为序数. 对于一序数 α, 如果存在序数 β, 使得 $\alpha = \beta \bigcup \{\beta\}$, 则称 α 是 β 的后继序数; 如果序数 α 不是后继序数且不等于 0, 则称 α 是极限序数; 如果 $\beta \in \alpha$, 则称 $\beta < \alpha$.

例如: 令 $1 = \{\varnothing\}$, $n + 1 = n \bigcup \{n\}$, $\omega = \{0, 1, \cdots, n, \cdots\}$.

定理 1.16 (良序化定理) 如果 A 是一集合, 则在 A 上存在一序关系, 使 A 是一良序集.

一般这样来用这个定理: 对于给定的集 A, 不妨设 $A = \{a_\alpha : \alpha \in \gamma\}$, 其中 γ 是一序数.

定义 1.17 A 是一集合, 如果 A 上的一关系 $\prec$ 满足下述条件, 则称 A 是一严格偏序集:

(1) 对 $a \in A$, $a \prec a$ 不成立;

(2) 如果 $a \prec b$, $b \prec c$, 则 $a \prec c$.

如果 $\prec$ 是 A 上的严格偏序关系, 且 $B \subset A$ 满足对 B 中的任意两不同元 a 与 b, 都有 $a \prec b$ 或 $b \prec a$ 成立, 则称 B 是 A 在关系 $\prec$ 下的线性序子集.

定理 1.18　如果 A 是一集, $\prec$ 是 A 上的严格偏序关系, 则在 A 中存在极大的线性序子集 B (即不存在线性序子集 C, $C \subset A$, $B \subset C$, $B \neq C$).

定义 1.19　如果 A 是一集合, $\prec$ 是 A 上的严格偏序关系, $B \subset A$, $c \in A$, 如果对任一 $b \in B$, 都有 $b \prec c$ 或 $b = c$, 则称 c 是 B 的上界. A 中的元 c 如果满足对任一 $a \in A$, $c \prec a$ 都不成立, 则称 c 是 A 的极大元.

引理 1.20 (Zorn 引理)　A 是一严格偏序集, 如果 A 的每一线性序子集都有上界, 则 A 有极大元.

选择公理 1.21　A 是一集合, $\mathcal{B}$ 是由 A 的某些非空子集构成的集族, 则存在一映射 $f : \mathcal{B} \to \bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$, 使得对每一 $B \in \mathcal{B}$, 都有 $f(B) \in B$.

注　如果已知良序化定理, 可以把集合 A 先良序化, 对 A 中的任一非空子集 B, 可令 $f(B)$ 为 B 中的最小元. 因此, 如果已知良序化定理, 可证明选择公理, 另一方面, 若已知选择公理, 也可证良序化定理.

1.5 集合的势

前面介绍了序数, 对于自然数 m 与 n, 若 $m \neq n$, 不可能找到 m 与 n 间的双映射, 但对于 $\omega + 1 = \{0, 1, \cdots, n, \cdots, \omega\}$, 可建立 ω 与 $\omega + 1$ 间的双映射, 例如: $f : \omega + 1 \to \omega$, 令 $f(\omega) = 0$, $f(n) = n + 1$, $n \in \omega$, 因此 f 是一双映射. 把 n 与 ω 这样的序数称为基数.

定义 1.22　如果一序数 α 不能与比它小的序数建立双映射, 则称 α 是一基数.

因此 n 与 ω 都是基数, 但 $\omega + 1$ 不是基数.

定义 1.23　集合 A 的势是能与集合 A 建立双映射的最小序数, 记为 $|A|$.

由定义可知, $|A|$ 是一基数.

定义 1.24 对于集合 A 与 B, 如果存在一双映射 $f: A \to B$, 则称 $|A| = |B|$; 如果存在一单映射 $f: A \to B$, 则称 $|A| \leqslant |B|$.

易知, 若 $|A| = |B|, |B| = |C|$, 则 $|A| = |C|$.

例 1.25 若 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{m, n, p, q\}$, 则 $|A| = 3$, $|B| = 4$.

定理 1.26 存在从集合 A 到集合 B 的单映射等价于存在由集合 B 到集合 A 的满映射.

证明 "$\Rightarrow$" 令 $f: A \to B$ 是单映射, 令 $g: B \to A$, 满足: 如果 $b \in f(A)$, 令 $g(b) = f^{-1}(b)$, 这里 $f^{-1}(b)$ 代表 A 中唯一的元, 其在 f 下的像是 b; 取 $a \in A$, 如果 $b \in B \setminus f(A)$, 令 $g(b) = a$. 则易知 g 是满映射.

"$\Leftarrow$" 令 $g: B \to A$ 是满映射, 因此, 对于任意 $a \in A$, $g^{-1}(a) \neq \varnothing$. 令 $\mathcal{B} = \{g^{-1}(a) : a \in A\}$, 因此 $\bigcup \mathcal{B} = B$, 由选择公理可知存在 $f_1 : \mathcal{B} \to \bigcup \mathcal{B} = B$, 使得对任意 $a \in A, f_1(g^{-1}(a)) \in g^{-1}(a)$. 令 $f: A \to B$, 满足 $f(a) = f_1(g^{-1}(a))$, $a \in A$. 当 $a_1 \neq a_2$ 时, $g^{-1}(a_1) \bigcap g^{-1}(a_2) = \varnothing$, 因此 f 是单映射. □

推论 1.27 如果存在由集合 A 到集合 B 的满映射, 则 $|B| \leqslant |A|$.

定理 1.28 对于集合 A 与 B, 如果存在单映射 $f: A \to B$ 与单映射 $g: B \to A$, 则 $|A| = |B|$.

证明 目的是给出由 A 到 B 的双映射. 由于 f 与 g 都是单映射, 则复合映射 $g \circ f = k$ 是 A 到 A 的单映射. $|g(B)| = |B|, |A| = |g(f(A))|$, 因此只需给出由 $g(B)$ 到 $g(f(A))$ 的双映射即可.

令 $A_0 = g(B) \setminus g(f(A))$;
$A_1 = k(A_0)$, 则 $k(A_0) \subset k(A)$;
$A_2 = k(A_1)$, 则 $k(A_1) \subset k(A)$, 且 $k(A_1) \bigcap k(A_0) = \varnothing$ (因为 k 是单映射);
$A_{n+1} = k(A_n)$, 则 $k(A_n) \subset k(A)$, 且 $k(A_n) \bigcap k(A_i) = \varnothing$, $i < n$.

令 $C_0 = \bigcup \{A_i : i \in \omega\}$, $C_1 = \bigcup \{A_i : i \in N\}$. 由前述知 $k(C_0) = C_1$, 令 $C_2 = g(f(A)) \setminus C_1$. 对 $x \in C_0$, 令 $p(x) = k(x)$, 对 $x \in C_2$, 令 $p(x) = x$. 则 $p : g(B) \to g(f(A))$ 是双映射. 因此, $|g(B)| = |g(f(A))|$, 于是 $|B| = |A|$. □

下面将主要研究可与自然数集 N 或者 N 的子集建立一一对应的集合.

定义 1.29　A 是一非空集合, 如果存在一自然数 $n \in N$, 及一双映射 $f: A \to \{1,2,\cdots,n\}$, 则称 A 是有限集, 否则 A 为无限集. 如果 A 是空集, 也称其是有限集. 如果存在双映射 $f: A \to N$, 则称 A 是可数无限集. 若 A 是有限集或可数无限集, 称 A 为可数集.

看下面几个集合：$A_1 = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$, $A_2 = \omega$, $A_3 = \{2n : n \in N\}$, $A_4 = Z$. 则 A_1 是有限集, A_2, A_3, A_4 都是可数无限集. 对于 A_4, 可令 $f: Z \to N$, 其中, 当 $n \geqslant 0$ 时, $f(n) = 2n+1$; 当 $n < 0$ 时, $f(n) = -2n$.

定理 1.30　A 是集合, 若存在 $n \in N$, 且有单映射 $f: A \to \{1,2,\cdots,n\}$, 则 A 是有限集.

证明　对 n 归纳.

(1) $n = 1$ 时显然结论成立.

(2) 若 $n = m$ 时结论成立, 下证 $n = m+1$ 时也成立.

$f: A \to \{1,2,\cdots,m+1\}$ 是单映射. 若不存在 $a \in A$, 使得 $f(a) = m+1$, 则 $f(A) \subset \{1,2,\cdots,m\}$, 由 (2) 可知, A 是有限集. 若存在 $a \in A$, 使得 $f(a) = m+1$, 则 $f(A \setminus \{a\}) \subset \{1,2,\cdots,m\}$, 于是由 (2) 可知, $A \setminus \{a\}$ 是有限集. 因此由定义可知存在 $i \leqslant m$ 及双映射 $g: A \setminus \{a\} \to \{1,2,\cdots,i\}$. 令 $g_1: A \to \{1,2,\cdots,i+1\}$ 满足: 对 $x \in A$, 若 $x \neq a$, 则 $g_1(x) = g(x)$; 若 $x = a$, 则 $g_1(x) = i+1$. 因此 g_1 是双映射, 则 A 是有限集. □

对有限集不作过多的讨论, 下面将主要研究可数无限集.

引理 1.31　自然数集 N 的任一无限子集都可与自然数集 N 建立双映射.

证明　令 $A \subset N$, A 不是有限集. 由于 A 存在最小元, 令其为 a_1, 定义 $g(1) = a_1$. 对于 $n \geqslant 1$, 已定义 $g(m) = a_m$, $m \leqslant n$, 其中 a_m 是 $A \setminus \{a_1,\cdots,a_{m-1}\}$ 的最小元 $(m-1 \neq 0)$. 由于 $A \setminus \{a_1,\cdots,a_n\} \neq \varnothing$, 令其最小元为 a_{n+1}, 令 $g(n+1) = a_{n+1}$. 于是 $g: N \to A$ 是一双映射. □

由定理 1.26 及引理 1.31 可得如下推论:

推论 1.32　A 是一非空集合, 则下述三个条件等价:

(1) A 是可数集;

(2) 存在由 A 到 N 的单映射;

(3) 存在由 N 到 A 的满映射.

推论 1.33 可数集的子集是可数集.

定理 1.34 如果集合 B 是可数集的满映射像, 则 B 是可数集.

证明 令 $f: A \to B$ 是满映射且 A 是可数集. 因此存在 $g: N \to A$ 是满映射, 这样 $f \circ g$ 是从 N 到 B 的满映射. 于是由推论 1.32 可知 B 是可数集. □

由于非空可数集可以是 N 的满映射像, 因此, 如果 A 是非空可数集, 可令 $A = \{a_n : n \in N\}$.

为了研究可数集的可数并与有限积的可数性质, 先给出如下引理:

引理 1.35 $N \times N$ 是可数集.

证明 由推论 1.32 可知, 只需建立一由 $N \times N$ 到 N 单映射即可. 令 $f: N \times N \to N$, 使得 $f((n,m)) = 2^n \cdot 3^m$. 对于 $(n_1, m_1) \neq (n_2, m_2)$, 假若有 $2^{n_1} \cdot 3^{m_1} = 2^{n_2} \cdot 3^{m_2}$, 若 $n_1 \neq n_2$, 不妨设 $n_1 < n_2$, 则有 $3^{m_1} = 2^{n_2 - n_1} \cdot 3^{m_2}$, 左边是奇数, 右边是偶数, 这样必须有 $n_1 = n_2$, 因此有 $3^{m_1} = 3^{m_2}$. 由于 $n_1 = n_2$ 时有 $m_1 \neq m_2$, 不妨设 $m_1 < m_2$, 则有 $1 = 3^{m_2 - m_1}$, 矛盾. 因此有 $f((n_1, m_1)) \neq f((n_2, m_2))$. 于是 $N \times N$ 是可数集. □

由推论 1.33、定理 1.34 及引理 1.35 可知有理数集 Q 是可数集.

定理 1.36 可数个可数集的并是可数集.

证明 令 $A = \bigcup\{A_n : n \in N\}$, 其中对每个 $n \in N$, 不妨令 A_n 是非空可数集. 于是令 $A_n = g_n(N), n \in N$, 其中 g_n 是满映射. 对任一 $a \in A$, 存在 $n \in N$, $m \in N$, 使得 $a = g_n(m)$. 于是 $g: N \times N \to A$, 满足 $g((n,m)) = g_n(m)$ 是满映射. 因此由引理 1.35 可知 $N \times N$ 是可数集, 而 g 是满映射, 再由定理 1.34 可知, A 是可数集. □

定理 1.37 有限个可数集的积集是可数集.

证明 只需证两个可数集的积集是可数集. 不妨令 A 与 B 是两非空可数集, 则存在满映射 $g_1: N \to A$ 与 $g_2: N \to B$. 令 $g: N \times N \to A \times B$, 满足 $g((n,m)) = (g_1(n), g_2(m))$, 则 g 是满映射. 因此由定理 1.34 及引理 1.35 可知 $A \times B$ 是可数集. □

若 Λ 是一集, 对于任意 $\alpha \in \Lambda$, A_α 是一集, 且 $A_\alpha \neq \varnothing$. 令 $\prod\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x = (x_\alpha : \alpha \in \Lambda)$, 其中 $x_\alpha \in A_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$, 称 x_α 是 x 的第 α 个分量, 称 $\prod\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ 为 $A_\alpha, \alpha \in \Lambda$ 的积集.

下面说明可数集的无限积可能不是可数集.

例 1.38　若对每一 $n \in N$, 令 $A_n = \{0, 1\}$, 且 $X = \prod\limits_{n \in N} A_n$, 则 X 不是可数集.

证明　假若 X 是可数集, 则存在双映射 $g : N \to X$. 对 $n \in N$, 当 $g(n)_n = 0$ 时, 令 $a_n = 1$; 当 $g(n)_n = 1$ 时, 令 $a_n = 0$, 即 $a_n = 1 - g(n)_n$. 令 $a = (a_n : n \in N)$, 则 $a \in X$. 因此存在 $m \in N$, 使得 $g(m) = a$, 则 $g(m)_m = a_m = 1 - g(m)_m$, 矛盾. 因此不存在双映射 $g : N \to X$, 于是 X 不是可数集. □

若 A 是一集合, 令 $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subset A\}$, 则称 $\mathcal{P}(A)$ 是集合 A 的幂集.

若 $A_1 = \{0, 1\}$, 则 $\mathcal{P}(A_1) = \{\varnothing, \{0, 1\}, \{0\}, \{1\}\}$, 且 $|\mathcal{P}(A_1)| = 4$.

若 $A_2 = \{1, 2, 3\}$, 则 $\mathcal{P}(A_2) = \{\varnothing, \{1, 2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$, 且 $|A| = 3, |\mathcal{P}(A_2)| = 2^3 = 8$.

下面将说明 $|\mathcal{P}(A)| > |A|$.

定理 1.39　A 是一集合, 则 $|\mathcal{P}(A)| > |A|$.

证明　显然有 $|A| \leqslant |\mathcal{P}(A)|$. 因此只需证明不存在由 $\mathcal{P}(A)$ 到 A 的单映射, 或者说明不存在由 A 到 $\mathcal{P}(A)$ 的满映射, 这里用后一种来说明. 假若 $f : A \to \mathcal{P}(A)$ 是满映射, 令 $B = \{a : a \notin f(a), a \in A\}$, 则 $B \subset A$. 由于 f 是满映射, 因此存在 $b \in A$, 使得 $f(b) = B$. 若 $b \notin B = f(b)$, 则 $b \in B$; 若 $b \in B = f(b)$, 则 $b \notin f(b)$, 矛盾. 因此 $|\mathcal{P}(A)| > |A|$. □

由于 $|\mathcal{P}(A)| > |A|$, 那么 $|\mathcal{P}(A)|$ 与 $|A|$ 还有什么确切的关系呢?

定理 1.40　A 是一集合, 则 $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

证明　令 $g : \mathcal{P}(A) \to \{0, 1\}^A$ (其中 $\{0, 1\}^A$ 是由 A 到 $\{0, 1\}$ 的所有映射构成的集). 对任意 $B \subset A$, 如果 $x \notin B$, 令 $g(B)_x = 0$; 如果 $x \in B$, 令 $g(B)_x = 1$. 则易知 g 是一双映射, 而 $|\{0, 1\}^A| = 2^{|A|}$, 因此有 $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. □