高等学校基础课程配套辅导用书

恩波教育 ENBO

高等数学

同济六版 全一册合订本

同步精讲

主编 恩 波

- 紧扣教材，知识框图清晰梳理知识要点
- 全面讲解知识重点及难点
- 深度解析典型例题
- 精选综合例题提升训练

赠 同济六版 习题解答

学苑出版社

高等数学同步精讲

同济六版(全一册)

主　编　恩　波

编　委　(按姓氏笔画为序)

东　南　大　学　王海燕

同　济　大　学　刘庆生

上海交通大学　李　铮

解放军理工大学　顾宛成

修订者　江　平　汪　洋

学苑出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学同步精讲：合订本/恩波主编.—4版.—北京：学苑出版社，2007.1(2009.6重印)
ISBN 978-7-5077-1938-3

Ⅰ.高… Ⅱ.恩… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第006902号

责任编辑：刘　涟
责任校对：崔　娇
封面设计：朱　颜
出版发行：学苑出版社
社　　址：北京市丰台区南方庄2号院1号楼　100079
网　　址：www.book001.com
电子信箱：xueyuanyg@sina.com
xueyuan@public.bta.net.cn
销售电话：010-67674055、67675512、67678944
印 刷 厂：南京雄州印刷有限公司
开本尺寸：1000×1400　1/32
印　　张：16.25
字　　数：450千字
版　　次：2009年6月第4版第1次修订
印　　次：2009年6月第3次印刷
印　　数：5000册
定　　价：29.80元

前　言

高等数学是高等院校理工科各专业的一门重要基础课程，是学习后续课程及进行科学理论研究与实践的数学基础，也是研究生入学考试的必考科目之一，其重要性是不言而喻的．为此，恩波编辑部精心组织策划了这本复习辅导用书．

本书根据高等工业院校的《高等数学课程教学基本要求》编写而成，是与《高等数学》（同济六版）同步配套的复习辅导用书，其章节次序、术语、符号均与此书相同．编写本书的目的有两个：一是帮助读者快速掌握课程知识，顺利通过学校组织的考试；二是借助于精心选取的部分考研真题，为有志攻读研究生的读者打下基础．

本书特色有下列四部分组成：

知识要点　归纳每节基本概念、定理、公式与结论，以图表形式列出，条理清晰，一目了然，便于查阅．

重点及难点解读　继知识要点之后，梳理容易混淆的概念，突出重点、难点，总结常用的、重要的解题方法与技巧．以使读者加深对基本概念的理解．

典型例题　在无边无涯的题海中，尽可能地总结本节所涉及到的题型，给出了详细的解答过程并指出易犯的错误，分析解题思路及来龙去脉，对不同方法进行比较，指出彼此的联系；并通过"一题多解"和"多题一解"揭示有关概念、方法之间的深刻联系．从更高的视角帮助读者掌握解题的思维方法，达到举一反三，融会贯通的目的．

综合例题　精心选取部分院校高等数学的考试试题和部分考研真题．这些题目大都是数学知识的综合应用，通过对这些例题的研究、练习，读者将逐步树立灵活应用所学知识分析问题、解决问题的能力．

考虑到读者学习的需要，本书将《高等数学》（同济六版）全部习题的解答汇编成册，随书赠送．在习题解答中，按不同深度将全部题目分为A，B，C三级，并用相应的字母标在题首．A级：基础练习．为理解课本内容所必需．B级：提高类型．有助于对课本内容的深入理解及对解题方法、技巧的进一步提高．C级：难度较高．用于提高对问题的分析、综合能力及对课本知识的灵活运用．编者建议，先练后看，边练边看，解决练习过程中的所有问题．

本书由于水平所限，不妥之处在所难免，恳请读者及同行批评指正．

编著者

编者的话

为帮助大学生大幅度提高数学成绩，恩波诚邀同济大学名师加盟，设身处地，以学生（特别是使用同济六版教材的学生）为中心，推出了同济名师辅导系列．该系列由诸多高校名师合作编写，是几十年本科教学及十多年考研辅导经验之总结．既坚持对高等数学学科内容的全面覆盖，又注意因材施教，准确把握不同层次同学的不同奋斗目标及不同类别考试的不同要求，给予不同深度的辅导，处处体现有的放矢，恰到好处．读者既可以多册在手，不断攀登，追求最高境界；也可以按自己的实际情况，参阅下图的箭头指向，选择一本或几本配套使用，对于实现您的既定目标，必将是事半而功倍．

教材同步辅导类

高等数学同步精讲（上下册合订本）

- ▷ 以基本概念为主线，章、节、术语、符号同于同济 6 版教材
- ▷ 围绕基本概念全方位列举典型例题，讲深讲透
- ▷ 多个知识点交叉运用的综合例题，不知不觉中提高解题能力

配套练习与测试类

高等数学习题全解

- ▷ 同济 6 版全部习题均有解答
- ▷ 必要时给出恰到好处的注释
- ▷ 先练后看，边练边看，解决练习过程中的所有困难
- ▷ 配以同步辅导

高等数学测试 AB 卷

- ▷ 选题精练，既覆盖知识点又不重复
- ▷ 测试有梯度，适用不同层次考试的要求
- ▷ 解析详实，既有思路启发又有难点剖析

高等数学典型题精解

- ▷ 例题多源于历年的考研真题
- ▷ 兼顾教材同步与考研准备
- ▷ 以题型为主线，揭示解题思路、方法与技巧

目录
Contents

第一章　函数与极限

第一节　映射与函数

知识要点

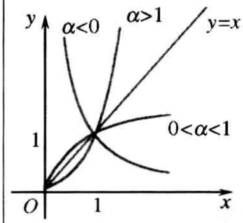
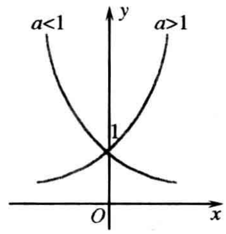
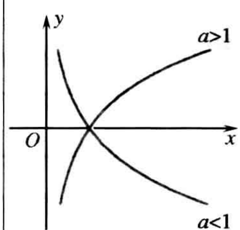
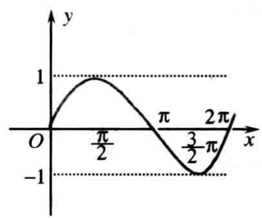
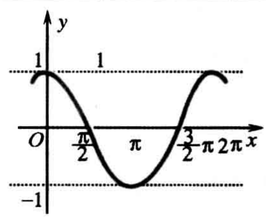
表 1.1　函数及相关的定义

名　称	定　义
函　数	设 X,Y 是两个非空实数集合，若存在对应法则 f，使得对于任给的 $x \in X$，存在唯一的 $y \in Y$ 与之对应，则称 f 是 X 到 Y 的函数，记作 $y=f(x)$. X 称为定义域，$W=\{y \mid y=f(x), x \in X\} \subset Y$，称为函数 f 的值域
反函数	设 $f(x)$ 的定义域为 X，值域为 W，若对于任给 $y \in W$，在 X 中只有一个数 x 与之对应，使得 $f(x)=y$，把 y 看作自变量，x 看作函数，得到的一个新函数，称为函数 f 的反函数，记作 f^{-1}. $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y$
复合函数	设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 X，值域为 U^*，且 $U^* \subset U$，则称函数 $y=f(\varphi(x))$ 或 $f \circ \varphi$ 为定义在 X 上的复合函数，u 为中间变量

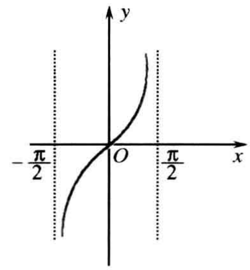
表 1.2　函数的基本属性

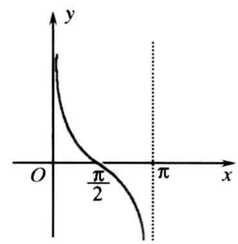
性　质	定　义
有界性	设 $f(x)$ 的定义域为 X，若存在 k_1，使得对于任给 $x \in X$，有 $f(x) < k_1$，则称 k_1 为 $f(x)$ 的上界. 若存在 k_2，使得对于任给 $x \in X$，$f(x) > k_2$，则称 k_2 为 $f(x)$ 的下界. 若存在 $M>0$，使得对于任给 $x \in X$，有 $\mid f(x) \mid < M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有界，或称 $f(x)$ 为 X 上的有界函数. 反之称 $f(x)$ 无界
单调性	设 $f(x)$ 的定义域为 X，若对于任意 $x_1, x_2 \in X$，当 $x_1 < x_2$ 时，若必有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上单调增；若必有 $f(x_1) < f(x_2)$，称 $f(x)$ 严格单调增. 当 $x_1 < x_2$ 时，若必有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上单调减；若必有 $f(x_1) > f(x_2)$，称 $f(x)$ 严格单调减
奇偶性	设 $f(x)$ 的定义域 X 关于原点对称，若对于任给 $x \in X$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若对于任给 $x \in X$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数
周期性	设 $f(x)$ 的定义域为 X，若存在 $T \neq 0$，使得对于任给 $x \in X$，有 $x+T \in X$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的周期. 通常把 $f(x)$ 的最小正周期简称为 $f(x)$ 的周期

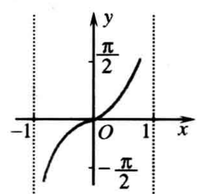
表 1.3　基本初等函数与初等函数

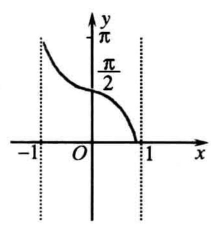
	名称	定义式	性质	要点	图形
基本初等函数	幂函数	$y=x^{\alpha}$（α 为常数） 定义域一般为 $(0,+\infty)$	$\alpha>0$ 时，严格单调增 $\alpha<0$ 时，严格单调减	定义域可为 $(-\infty,+\infty)$， 如 $y=x^2$，也可为$[0,+\infty)$，如 $y=x^{\frac{1}{2}}$	
基本初等函数	指数函数	$y=a^x(a>0,a\neq1)$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$	$a>1$ 时，严格单调增 $a<1$ 时，严格单调减		
基本初等函数	对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$ 定义域为$(0,+\infty)$	$a>1$ 时，严格单调增 $a<1$ 时，严格单调减	$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数， $\log_e x=\ln x$	
基本初等函数		正弦函数 $y=\sin x$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$	奇函数，周期函数 $T=2\pi$， 有界函数 $\lvert\sin x\rvert\leqslant1$	值域为$[-1,1]$	
基本初等函数	三角函数	余弦函数 $y=\cos x$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$	偶函数，周期函数 $T=2\pi$， 有界函数 $\lvert\cos x\rvert\leqslant1$	值域为$[-1,1]$	

（续表）

<table>
<tr><th colspan="2">名　称</th><th>定义式</th><th>性　质</th><th>要　点</th><th>图　形</th></tr>
<tr><td rowspan="6">基本初等函数</td><td rowspan="4">三角函数</td><td>正切函数 $y=\tan x$
定义域为
$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$,
$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$</td><td>奇函数，周期函数
$T=\pi$,
在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
内为严格增函数</td><td></td><td>


</td></tr>
<tr><td>余切函数 $y=\cot x$
定义域为 $x\neq k\pi$,
$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$</td><td>周期函数 $T=\pi$,
在区间$(0,\pi)$内为严格减函数</td><td></td><td>


</td></tr>
<tr><td>正割函数
$y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$</td><td>周期函数 $T=2\pi$，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上无界</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>余割函数
$y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$</td><td>周期函数 $T=2\pi$，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上无界</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">反三角函数</td><td>反正弦函数
$y=\arcsin x$
定义域为$[-1,1]$</td><td>奇函数，严格单调增</td><td>值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$</td><td>


</td></tr>
<tr><td>反余弦函数
$y=\arccos x$
定义域为$[-1,1]$</td><td>严格单调减</td><td>值域为$[0,\pi]$</td><td>


</td></tr>
</table>

（续表）

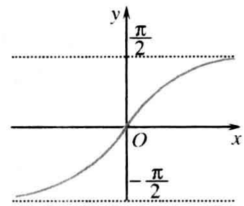
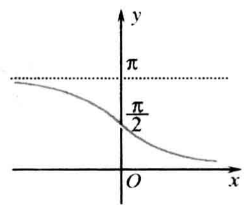
名称		定义式	性质	要点	图形
基本初等函数	反三角函数	反正切函数 $y=\arctan x$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$	奇函数，有界函数 $\lvert\arctan x\rvert<\frac{\pi}{2}$ 严格单调增	值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	
		反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$	有界函数 $0<\operatorname{arccot} x<\pi$ 严格单调减	值域为 $(0,\pi)$	
初等函数		由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合后且能用一个公式表示的函数称为初等函数			

表 1.4　双曲函数

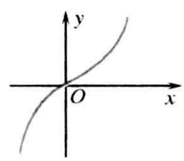
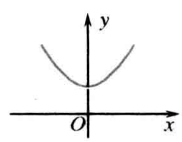
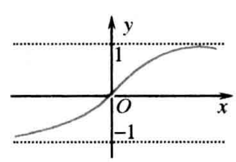
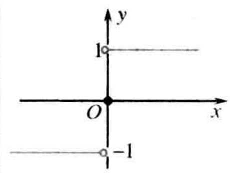
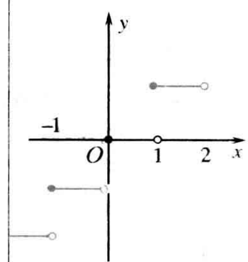
名称	定义式	性质	要点	图形
双曲函数	双曲正弦 $\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$	奇函数，严格单调增		
	双曲余弦 $\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$	偶函数		
	双曲正切 $\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$	奇函数，严格单调增，有界		

表 1.5　分段函数

名　称	定　义	要　点	图　形
分段函数	在不同区间上用不同解析式表示的函数	一般不是初等函数	
	符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$		
	取整函数$[x]$，不超过 x 的最大整数. 当 $x\in[n,n+1)$ 时，$[x]=n,n=0,\pm1,\pm2,\cdots$		

重点及难点解读

1. 函数的定义的两个要素：定义域 X 及对应法则 f.

(1) 当两个函数的定义域及对应法则均相同时，表示两个函数相同.

(2) 函数表示法中字母可随意选择，对同一定义域而言 $y=f(x),u=f(v),s=f(t)$ 等均表示同一函数，这一性质称为函数表示法的"无关特性".

2. $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 表示同一条曲线，若用 x 表示自变量，y 表示因变量，则 $y=f^{-1}(x)$ 及 $y=f(x)$ 图像关于直线 $y=x$ 对称，f^{-1} 的定义域即为 f 的值域.

3. 复合函数 $y=f(\varphi(x))$. 若存在 $X^*\subset X$，使得 $\varphi(x)$ 在 X^* 上的值域 $W^*\subset U$，而 U 为 $y=f(u)$ 的定义域，则 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域为 X^*. 若 $\varphi(x)$ 的值域不含在 $f(u)$ 的定义域内则不能复合. 例如 $y=\sqrt{u^2-2},u=\sin x$ 就不能复合成 $y=\sqrt{\sin^2x-2}$.

4. 若 $f(x)$ 有界，则 $f(x)$ 必有下界和上界；反之若 $f(x)$ 既有上界，又有下界，则 $f(x)$ 必有界.

$f(x)$ 无界的严格定义：对于任给 $M>0$，总存在 $x\in X$，使得 $|f(x)|\geqslant M$，即任何正数 M 都不可能是 $f(x)$ 的界.

5. 一般将 $f(x)$ 的最小正周期简称为 $f(x)$ 的周期，如 $y=\sin x$ 的周期为 2π，$y=\tan x$ 的周期为 π 等，但周期函数不一定存在最小正周期，如常数函数 $f(x)=C$，狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$ 均为周期函数，但均不存在最小正周数.

6. 既非奇函数，又非偶函数的函数是大量存在的.

7. 熟记基本初等函数的图形、性质.

8. 重点掌握分段函数的表示法、定义域.

9. 本节难点：分段函数的复合；分段函数的反函数.

典型例题

例 1.1　$f(x)=x+1$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 是否相同？为什么？

解　不相同. 因为定义域不相同. $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域为 $x\neq1$. 但若补充定义 $g(1)=2$，即 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同.

例 1.2　求下列函数的定义域.

(1) $y=\ln(x+1)+2^{\frac{1}{x-1}}$；

(2) $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x}$.

解　求函数的定义域一般从一些基本形式的定义域出发,然后综合考虑.基本形式有$\sqrt{A}$,$\dfrac{1}{A}$,$\log A$,$\arcsin A$,$\arccos A$等,其相应的定义域为$A \geqslant 0$,$A \neq 0$,$A > 0$,$|A| \leqslant 1$,$|A| \leqslant 1$等.

(1) $\begin{cases} x+1>0, \\ x-1 \neq 0, \end{cases}$定义域为$(-1,1) \cup (1,+\infty)$.

(2) $\begin{cases} \left|\dfrac{2x}{1+x}\right| \leqslant 1, \\ 1+x \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |2x| \leqslant |1+x|, \\ x \neq -1. \end{cases}$

定义域为$\left[-\dfrac{1}{3},1\right]$.

例 1.3　求下列函数的反函数的表示式.

(1) $y = \dfrac{2^x-1}{2^x+1}$;

(2) $y = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解　(1) $2^x = \dfrac{1+y}{1-y}$,$x = \log_2 \dfrac{1+y}{1-y}$,反函数为$y = \log_2 \dfrac{1+x}{1-x}$.

(2) $x+\sqrt{1+x^2} = e^y$,

$$e^{-y} = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = -x+\sqrt{1+x^2},$$

所以$x = (e^y - e^{-y}) \div 2$,所以反函数为$y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

例 1.4　下列函数中哪些是奇函数,哪些是偶函数,哪些是非奇非偶函数?

(1) $y = e^{x^2}\sin x$;

(2) $y = \log_a(x+\sqrt{1+x^2})$　$(a>0, a \neq 1)$.

解　(1) 因为$\sin x$为奇函数,x^2为偶函数,所以$y = e^{x^2}\sin x$为奇函数.

(2) $$\begin{aligned} f(-x) &= \log_a(-x+\sqrt{1+x^2}) \\ &= \log_a \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \\ &= -\log_a(x+\sqrt{1+x^2}) = -f(x), \end{aligned}$$

故$f(x)$为奇函数.

例 1.5(选择题)　狄利克雷函数$D(x) = \begin{cases} 1, & x\text{为有理数}, \\ 0, & x\text{为无理数} \end{cases}$是(　　).

(A) 以实数为周期的周期函数

(B) 以有理数为周期的周期函数

(C) 以无理数为周期的周期函数

(D) 不是周期函数

解　因为有理数+有理数仍为有理数,有理数+无理数为无理数,设r为有理数,则$D(x+r) = D(x)$,故有理数均为$D(x)$的周期,故选(B).注意:不存在最小的正的有理数.而无理数+有理数为无理数,无理数+无理数可能为有理数也可能为无理数,故无理数不是$D(x)$的周期.

例 1.6　证明:定义在区间$(-l,l)$上的任何函数$f(x)$必可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

证　设$g(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$,

$$h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

因为$g(-x) = \dfrac{f(-x)+f[-(-x)]}{2}$

$$= \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x),$$

所以$g(x)$为偶函数.

而　$h(-x) = \dfrac{f(-x)-f[-(-x)]}{2}$

$$= \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -h(x),$$

所以$h(x)$为奇函数.

故$f(x) = h(x)+g(x)$可表示奇函数与偶函数的和.

例 1.7　一球的半径为r,作外切于球的圆锥,试将圆锥体积表示为高的函数,并说明定义域.

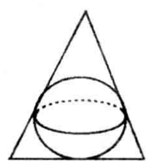


图 1-1

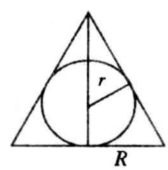


图 1-2

解　设圆锥的高为h,体积为V,则

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

由于$\dfrac{r}{R} = \dfrac{h-r}{\sqrt{R^2+h^2}}$,所以$R^2 = \dfrac{r^2 h}{h-2r}$.

所以$V = \dfrac{1}{3}\pi \dfrac{r^2h^2}{h-2r}$,定义域为$(2r,+\infty)$.

例 1.8　设$f(x) = \begin{cases} x^3+4x+1, & x \geqslant 1, \\ x+2, & x<1. \end{cases}$求$f(x+4)$.

解　$x+4\geqslant 1$，即 $x\geqslant -3$.

$$f(x+4)=\begin{cases}(x+4)^3+4(x+4)+1, & x\geqslant -3,\\ (x+4)+2, & x<-3.\end{cases}$$

例 1.9　求 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & -1\leqslant x<0\end{cases}$ 的反函数.

解　$0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y=x^2-1$，所以 $-1\leqslant y\leqslant 0$，

所以 $-1\leqslant y\leqslant 0$ 时，$x^2=1+y$，$x=\sqrt{1+y}$；

而 $-1\leqslant x<0$ 时，$y=x^2$，$0<y\leqslant 1$，

所以 $0<y\leqslant 1$ 时，$x^2=y$，$x=-\sqrt{y}$.

综上，反函数为

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{1+x}, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ -\sqrt{x}, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

例 1.10　设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x>1,\\ 2x, & x\leqslant 1,\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0,\\ x^2, & x\leqslant 0.\end{cases}$ 求 $f(\varphi(x))$.

解　$f(\varphi(x))=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)>1,\\ 2\varphi(x), & \varphi(x)\leqslant 1.\end{cases}$

当 $x<-1$ 时，$\varphi(x)>1$，当 $x\geqslant -1$ 时，$\varphi(x)\leqslant 1$.

所以　$f(\varphi(x))=\begin{cases}e^{x^2}, & x<-1,\\ 2x^2, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 2\sin x, & x>0.\end{cases}$

综合例题

综例 1.1（选择题）　设 $f(x-1)$ 的定义域为 $[0,a]$ $(a>0)$，则 $f(x)$ 的定义域为（　　）.

(A) $[1,a+1]$　　(B) $[-1,a-1]$

(C) $[1-a,1+a]$　　(D) $[a-1,a+1]$

分析　函数 $f(x-1)$ 的定义域是指 x 的变化范围，于是，由题设可知 $0\leqslant x\leqslant a$. 令 $t=x-1$，则 $-1\leqslant t\leqslant a-1$. 故对函数 $f(t)$ 而言，t 的变化范围为 $[-1,a-1]$，由函数表达式的“变量无关性”，知：$f(x)$ 的定义域为 $[-1,a-1]$. 故选(B).

常见错误　不少同学会选(A)，主要是对定义域所指的变量的取值范围理解不深，误认为 $0\leqslant x-1\leqslant a$，由此得到 $1\leqslant x\leqslant a+1$.

综例 1.2　设 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1]$，$\varphi(x)=1-\ln x$，则复合函数 $f(\varphi(x))$ 的定义域是什么？

解　$f(x)$ 的定义域是 $(0,1]$，即 $0<x\leqslant 1$，对于复合函数 $f(\varphi(x))$ 而言，应有 $0<\varphi(x)\leqslant 1$，或 $0<1-\ln x\leqslant 1$，解得 $1\leqslant x<e$，故 $f(\varphi(x))$ 的定义域为 $[1,e)$.

综例 1.3　已知 $2f(x)+f(1-x)=x^2$，求 $f(x)$.

解　函数的表示与变量用什么字母无关，

由 $\begin{cases}2f(x)+f(1-x)=x^2,\\ 2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2,\end{cases}$ 解得

$$f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}.$$

综例 1.4　设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求 $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$ 的定义域.

解　必须分开讨论.

$f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，所以

由 $0\leqslant x+a\leqslant 1$，解得 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$，即 $f(x+a)$ 的定义域为 $[-a,1-a]$；

由 $0\leqslant x-a\leqslant 1$，解得 $a\leqslant x\leqslant 1+a$，即 $f(x-a)$ 的定义域为 $[a,1+a]$.

故 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为 $[-a,1-a]\cap[a,1+a]$.

因为 $a>0$，所以

当 $a\leqslant 1-a$ 或 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为 $[a,1-a]$；

当 $1-a<a$ 或 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为空集 $\varnothing$.

综例 1.5　设对一切实数 x，有 $f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，试证明 $f(x)$ 是周期函数，有一个周期是 1.

证　$f\left[\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}+x\right)\right]$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{f\left(\frac{1}{2}+x\right)-f^2\left(\frac{1}{2}+x\right)}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}-f(x)\right)^2}.$$

由题意知 $f(x)\geqslant\dfrac{1}{2}$，所以 $f(1+x)=\dfrac{1}{2}+f(x)-\dfrac{1}{2}=f(x)$，故 $f(x)$ 是周期函数.

第二节　数列的极限

知识要点

表 2.1　数列极限与子数列的定义

名　称	定　义	说　明
数列的极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$	对于任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，有 $\lvert x_n - a\rvert < \varepsilon$	如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$，则 x_n 收敛于 a，称 $\{x_n\}$ 为收敛数列
数列 $\{x_n\}$ 的子数列	在 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序，这样得到的一个数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的子数列（或子列）	子数列仍然是数列

表 2.2　数列极限及收敛数列的性质

唯一性	若数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，则极限值是唯一的
有界性	若数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，则数列 $\{x_n\}$ 有界
保号性	若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，且 $a>0$（或 $a<0$），则必存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，恒有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）

表 2.3　收敛数列与其子数列的关系

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么它的任一子列也收敛，且极限也是 a

重点及难点解读

1. 要正确理解"ε-N"定义中的 ε 和 N. 对极限全过程而言，ε 要多小就可以取多小. 另一方面，对于极限全过程的瞬间而言，ε 又具有相对固定性. 定义中的"总存在正整数 N"是指一定存在正整数 N，但并未指出有几个. 事实上，N 不是唯一的. 这一点从定义中即可看出. 假如 N_1 满足当 $n>N_1$ 时，$\lvert a_n - a\rvert<\varepsilon$，则当 $n>N_1+1$ 时，显然也有 $\lvert a_n - a\rvert<\varepsilon$，故 N 既可以取 N_1，也可以取 N_1 后的任一个正整数，因而 N 不是唯一的. 由此可知 N 虽然与 ε 有关，但并不是 ε 的函数.

2. 按"ε-N"定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，一般可采用如下步骤：

(1) 给定任意 $\varepsilon>0$，解不等式 $\lvert a_n - a\rvert<\varepsilon$. 在此过程中，由于 N 不唯一，故可将 $\lvert a_n - a\rvert$ 放大为 $\lvert\cdots\rvert$，使放大后的不等式 $\lvert\cdots\rvert<\varepsilon$ 便于求出解集；

(2) 在上述解集中任取一正整数作为所求 N 即可. 通常，取这些正整数之最小者作为 N，故一般而言，ε 越小，N 就越大.

上述步骤可参见本节例 2.1.

3. **数列 $\{x_n\}$ 收敛，则其任一子列必收敛，且收敛**于同一极限. 利用这一性则，可以证明某些数列是不收敛的. 对此可参见本节例 2.2.

典型例题

例 2.1　用数列极限的定义证明下列等式.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n^2+n-4}=0$.

证　验证数列极限的方法一般为：

$\forall\varepsilon>0$，找正整数 N，使得当 $n>N$ 时，

$$\lvert x_n - a\rvert<\varepsilon.$$

(1) $\forall\varepsilon>0$，找正整数 N，使得 $\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$，即 $\dfrac{1}{2(2n+1)}<\varepsilon$，故 $2(2n+1)>\dfrac{1}{\varepsilon}$，即

$$n>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon}-1\right).$$

取 $N=\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2\varepsilon}-1\right)\right]=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon}-\dfrac{1}{2}\right]$.

所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon}-\dfrac{1}{2}\right]$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon.$$

这种通过解不等式 $\lvert x_n-a\rvert<\varepsilon$ 来求正整数 N 的