21世纪高职高专“十二五”规划教材

一元函数微积分典型题型及解题技巧

YIYUANHANSHU WEIJIFEN DIANXING TIXING JI JIETIJIQIAO

许 军/编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

21世纪高职高专"十二五"规划教材

一元函数微积分典型题型及解题技巧

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书根据《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》一元函数微积分部分编写，全书共九章，包括函数定义及其性质的应用、极限的求法、函数连续性的判断与应用、导数的计算、中值定理与导数应用、不定积分的计算、定积分的计算、定积分的应用以及常微分方程解法等内容，精选了这些内容中的典型题型，并给出了详尽的分析和具体解法.

本书可作为高职高专工科类各专业习题课教材，也可供经管类专业使用，还可作为“专升本”及学历文凭考试的参考书及相关学习资料.

图书在版编目(CIP)数据

一元函数微积分典型题型及解题技巧/许军编. —天津：天津大学出版社，2010.10

21世纪高职高专“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5618-3478-7

Ⅰ.①一… Ⅱ.①许… Ⅲ.①微积分－高等学校：技术学校－教学参考资料 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第193944号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
网　　址 www.tjup.com
印　　刷 肃宁县科发印刷厂
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 169mm×239mm
印　　张 9
字　　数 186千
版　　次 2010年10月第1版
印　　次 2010年10月第1次
定　　价 16.00元

前　　言

随着经济和科学技术的进步,数学对于当代科学乃至整个社会的影响和推动作用日益显著.数学成为科学研究的主要支柱:数学方法及计算已经与理论研究和科学实验同样成为科研中不可缺少的有效手段.同时,现代数学几乎已经渗透到包括自然科学、工程技术、经济管理以至人文社会科学的所有学科和应用领域中,从宇宙飞船到家用电器、从质量控制到市场营销,通过建立数学模型、应用数学理论和方法解决实际问题成为十分普遍的模式.这一切都对科学技术人才的数学素质和能力提出了更新更高的要求.

数学习题课作为近年来大学数学教学改革中的一门新型课程,诞生的时间并不长,却引起十分广泛的兴趣和关注.它最早在上世纪 80 年代末出现于美国的一些大学,被称为"数学实验室". 我国高校在上世纪 90 年代中期开始设置"数学习题"课,发展极为迅速,目前许多学校已经或准备开设这门课.

数学习题课的设立,首先提高了学生在教学过程中的参与程度,学生的主观能动性在习题课中能得到相当充分的发挥,能引起学生学习数学知识和方法的强烈兴趣并激发他们自已去解决相关实际问题的欲望,因此数学习题课有助于促进独立思考和创新意识的培养.

其次,数学习题课让学生了解和初步实践应用数学知识和方法解决实际问题的全过程,它还反映了学生对数学原理、数学方法、建模方法等多方面内容的掌握程度和应用的能力.因此数学习题课有助于促进在实际工作中非常需要的综合应用能力的培养.

另外,数学习题课可以将先进的技术工具引进教学过程,不止是作为一种教学辅助手段,而且是作为解决问题的主要途径.因此数学习题课有助于促进数学教学手段现代化和让学生掌握先进的数学工具.

从这些方面可以看出:数学习题课并非是一种应景点缀的时髦课程,它的产生符合教育改革的方向 ,是很具生命力的新型课程. 要求学生全面地掌握高等数学所涉及的基本概念,基本理论和基本运算能力的技巧,具有高职高专学习所必须的抽象思

维能力、逻辑推理能力、空间想象能力以及综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力.

本书参考了很多专家关于数学习题课的论述和专著,根据编者多年教学经验,对高职高专数学课程中的一元函数微积分的典型题型及解题技巧做了归纳和总结,可以作为高职高专院校开设数学习题课的参考教材,也可以作为学生自主学习一元函数微积分知识必要的补充资料.

由于编者水平有限,且时间较为仓促,书中疏漏之处在所难免,敬请各位专家和使用者批评指正.

编者

2010 年 3 月于酒泉职业技术学院

目　录

第一章　函数定义及其性质的应用

一、函数的对应关系与函数值的求法

1. $y=f(x+1)=x^2+x-1$,求$f(x)$,$f(2)$,$f(x+1)$,$f\left(\frac{1}{x}\right)$,$f(f(x))$.

解　令$x+1=t$,则$x=t-1$,代入原函数有

$$f(t)=(t-1)^2+(t-1)-1=t^2-t-1,$$

故

$$f(x)=x^2-x-1,f(2)=2^2-2-1=1,$$

$$f(x+1)=(x+1)^2-(x+1)-1=x^2+x-1,$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-\frac{1}{x}-1=\frac{1-x-x^2}{x^2},$$

$$f(f(x))=(f(x))^2-f(x)-1=(x^2-x-1)^2-(x^2-x-1)-1$$

$$=x^4-2x^3-2x^2+3x+1.$$

2. 设函数$f(x)=\mathrm{e}^x$,为使$f(\varphi(x))=1-x^2$,求$\varphi(x)$.

解　因为$f(x)=\mathrm{e}^x$,则$f(\varphi(x))=\mathrm{e}^{\varphi(x)}$,由$f(\varphi(x))=1-x^2$,就有$\mathrm{e}^{\varphi(x)}=1-x^2$.两边同时取自然对数,就有$\ln \mathrm{e}^{\varphi(x)}=\ln(1-x^2)$,即$\varphi(x)=\ln(1-x^2)$.

3. 若$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^x, & x>0,\end{cases}$求$f(0)$,$f(-1)$,$f(2)$,$f(x-1)$.

解　这是分段函数的对应关系及函数值的求解问题,在$f(0)$,$f(-1)$,$f(2)$中,明确给出了自变量的取值,此类题型解答时,要根据函数的分段点,判断所要计算函数值的自变量位于函数定义域的哪一取值区间,然后选择函数对应的表现形式计算函数值即可.

当$x=0$时,对应$f(x)$的表现形式为$f(x)=0$,所以$f(0)=0$;$x=-1$时,对应$f(x)$的表现形式为$f(x)=0$,所以$f(-1)=0$;$x=2$时,对应$f(x)$的表现形式为$f(x)=\mathrm{e}^x$,所以$f(2)=\mathrm{e}^2$.

而对于$f(x-1)$,没有给出自变量的确定取值,我们无法判断$x-1$的取值范围,此类问题解答时,只需将原来函数中的自变量用所求函数值中的变量代换即可.如要计算$f(x-1)$的值,只需将$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^x, & x>0\end{cases}$中的$x$用$x-1$代换即可,即有$f(x-1)=\begin{cases}0, & x-1\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^{x-1}, & x-1>0,\end{cases}$此时还需注意将分段函数中的变量$x-1$的两个不等式解出,就有

$$f(x-1)=\begin{cases}0, & x\leqslant 1,\\ \mathrm{e}^{x-1}, & x>1.\end{cases}$$

4. 设$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\0, & |x|=1,\\-1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$，求$f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & |e^x|<1,\\0, & |e^x|=1,\\-1, & |e^x|>1,\end{cases}=\begin{cases}1, & x<0,\\0, & x=0,\\-1, & x>0;\end{cases}$

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e, & |x|<1,\\1, & |x|=1,\\\dfrac{1}{e}, & |x|>1.\end{cases}$$

5. 设$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant 0,\\x^2+4, & x<0,\end{cases}$ 求$f(x-1)+f(x+1)$.

解 $f(x-1)=\begin{cases}2x-1, & x\geqslant 1,\\x^2-2x+5, & x<1;\end{cases}$ $f(x+1)=\begin{cases}2x+3, & x\geqslant -1,\\x^2+2x+5, & x<-1;\end{cases}$

故 $$f(x-1)+f(x+1)=\begin{cases}2x^2+10, & x<-1,\\x^2+8, & -1\leqslant x<1,\\4x+2, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

6. 已知$f(x)$是二次多项式，且$f(x+1)-f(x)=8x+3$，求$f(x)$.

解 设$f(x)=ax^2+bx+c$，由$f(x+1)-f(x)=8x+3=a(x+1)^2+b(x+1)+c-(ax^2+bx+c)=2ax+a+b$，得$2a=8$，$a+b=3$，即$a=4$，$b=-1$，

所以 $f(x)=4x^2-x+c$.

二、函数定义域的求法

自变量在分母上，例如$\dfrac{1}{x}$，这时要求$x\neq 0$；函数中出现$\sqrt[2n]{x}$时，则要求$x\geqslant 0$；函数中含有$\ln x$或$\log_a x$时，要求$x>0$；函数中含有$\tan x$或$\sec x$时，要求$x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$；含有$\cot x$或$\csc x$时，要求$x\neq k\pi$；函数中出现$\arccos x$或$\arcsin x$时，要求$-1\leqslant x\leqslant 1$.

当然，在给出的定义域求解题例中，未必每道题都是上述六类常见问题的单一模式，恰恰相反，几乎每种题例都包含了其中的两种或两种以上的函数表现形式，此时只需要给出在单一模式下每种表现形式的定义域，然后联立求不等式的解集，得到的就是所给题例的定义域. 还需要指出的是，上述六类常见函数中的自变量x在具体的问题中可以变换为x的函数，例如$\dfrac{1}{x}$可以变换为$\dfrac{1}{x+2}$、$\dfrac{3}{(1-x)\cos 2x}$、$\dfrac{1}{\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$等各种形式，此时，只需要把对形如$\dfrac{1}{x}$时的要求$x\neq 0$分别变换为形如$\dfrac{1}{x+2}$、$\dfrac{3}{(1-x)\cos 2x}$、

$\dfrac{1}{\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}}$时的对应要求,即分别为 $x+2\neq 0$、$(1-x)\cos 2x\neq 0$、$\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}\neq 0$ 就可以,然后再对变换出的不等式求解.其他类型的变换同理.

1. 求函数 $y=\dfrac{1}{\ln(x-1)}+\sqrt{x^2-1}$的定义域.

分析:本题中所给函数由上述六类常见函数类型中的$\frac{1}{x}$、$\sqrt[2n]{x}$、及 $\ln x$ 等三种单一模式对应的$\dfrac{1}{\ln(x-1)}$、$\sqrt{x^2-1}$、$\ln(x-1)$三个复合而成,因此分别要求 $\ln(x-1)\neq 0$、$x^2-1\geq 0$、$x-1>0$,上述三个条件必须同时成立.联立解方程组即可.

解　函数定义域满足下列不等式$\begin{cases}\ln(x-1)\neq 0,\\ x^2-1\geq 0,\\ x-1>0,\end{cases}$

逐个求解得$\begin{cases}x>1, x\neq 2,\\ x\geq 1 \text{ 或 } x\leq -1,\\ x>1,\end{cases}$联立解得 $x\in(1,2)\cup(2,+\infty)$.

2. 求函数$f(x)=\begin{cases}x+2, & x\leq -1,\\ 2x, & -1<x<2,\\ \frac{x^2}{2}, & x\geq 2\end{cases}$的定义域与值域.

解　$f(x)$的定义域为$(-\infty,-1]\cup(-1,2)\cup[2,+\infty)$.当 $x\leq -1$ 时,$f(x)\in(-\infty,1)$,当$-1<x<2$ 时,$f(x)\in(-2,4)$.当 $x\geq 2$ 时,$f(x)\in[2,+\infty)$.所以$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域也为$(-\infty,+\infty)$.

3. 求函数$f(x)=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$的定义域.

解　$x\neq 0$ 且 $1-x^2\geq 0\Rightarrow x\neq 0$ 且$|x|\leq 1$.

4. 求下列函数的定义域.

(1)$y=\sin\sqrt{4-x^2}$;　　(2)$y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}+\sqrt{x+2}$;

(3)$y=\arccos\ln\dfrac{x}{10}$;　　(4)$y=\tan(x+1)$;

(5)$y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$;　　(6)$y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$.

解　(1)要使 $\sin\sqrt{4-x^2}$有意义,必须 $4-x^2\geq 0$,即使$|x|\leq 2$.

所以定义域为$[-2,2]$.

(2)当 $x\neq 3$ 且 $x\neq 1$ 时,$\dfrac{1}{x^2-4x+3}$有意义;而要使$\sqrt{x+2}$有意义,必须 $x\geq -2$,故

函数的定义域为$[-2,1)\cup(1,3)\cup(3,+\infty)$.

(3)要使$\arccos\ln\frac{x}{10}$有意义,则有$-1\leqslant\ln\frac{x}{10}\leqslant1$,即$\frac{1}{e}\leqslant\frac{x}{10}\leqslant e$. 所以$\frac{10}{e}\leqslant x\leqslant 10e$,即函数定义域为$[\frac{10}{e},10e]$.

(4)要使$\tan(x+1)$有意义,则必有$x+1\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$,即函数定义域为$\{x|\in\mathbf{R}$且$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}-1,k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$.

(5)当$x\leqslant3$时$\sqrt{3-x}$有意义;又当$x\neq0$时$\arctan\frac{1}{x}$有意义,故函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,3]$.

(6)当$2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$时$\sqrt{\sin x}$有意义;又要使$\sqrt{16-x^2}$有意义,必须有$-4\leqslant x\leqslant4$. 所以函数的定义域为:$[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$.

5. 设$f(x)=\sqrt{x},g(x)=-x^2+4x-3$,求$f[g(x)]$的定义域.

解　$f[g(x)]=\sqrt{-x^2+4x-3}$,因此要使$\sqrt{-x^2+4x-3}$有意义,必须$1\leqslant x\leqslant3$,即$f[g(x)]$的定义域为$[1,3]$.

6. 设$f(x)$的定义域是$[0,1]$,求$f(\sin x)$的定义域.

解　当$0\leqslant\sin x\leqslant1$时$f(\sin x)$有意义,故其定义域为$[2k\pi,(2k+1)\pi](k=0,\pm1,\pm2\cdots)$.

三、判断两个函数是否相同

两个函数相同的条件:对应关系相同;定义域相同;值域相同. 三个条件缺一不可.

1. 判断下列各组函数是否相同.

(1)$y=\ln x^2,y=2\ln x$;

(2)$y=\sqrt{x^2},y=x$;

(3)$y=\arcsin x,y=\frac{\pi}{2}-\arccos x$;

(4)$y=x\sqrt{1-\cos^2 x};y=x\sin x$.

解　在(1)中,$y=\ln x^2$的定义域为$x\neq0$,但$y=2\ln x$的定义域为$x>0$,所以两个函数是不相同的.

在(2)中,$y=\sqrt{x^2},y=x$的定义域都是全体实数,但$y=\sqrt{x^2}$的值域为$y\geqslant0,y=x$的值域为全体实数,所以两个函数不相同.

在(3)中,$y=\arcsin x,y=\frac{\pi}{2}-\arccos x$的定义域都是$-1\leqslant x\leqslant1$,值域都是全体实数,且对任意$-1\leqslant x\leqslant1,y=\arcsin x,y=\frac{\pi}{2}-\arccos x$的取值都相同,即对应关系也

相同,因此两个函数相同.

在(4)中,$y=x\sqrt{1-\cos^2 x}$,$y=x\sin x$ 的定义域相同,值域相同,但 $y=x\sqrt{1-\cos^2 x}$;$y=x\sin x$ 对应关系却不相同,因为存在 $x=-\frac{\pi}{2}$,此时 $y=x\sqrt{1-\cos^2 x}=-\frac{\pi}{2}$,而 $y=x\sin x=\frac{\pi}{2}$,所以两个函数的对应关系不相同,因此两个函数是不相等的.

2. 设自变量 $x\in\{1,2,3,4\}$,判断下列数学结构哪些是函数?哪些不是函数?为什么?

$$(1)f:\begin{array}{cccc}1&2&3&4\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\0&2&1&-1\end{array}$$

$$(2)\varphi:\begin{array}{cccc}1&2&3&4\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\1&1&1&1\end{array}$$

$$(3)y:\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&1\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\2&3&0&1&4\end{array}$$

$$(4)h:\begin{array}{cccc}1&2&3&4\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\\1&2&3&\end{array}$$

答:(1)是,因为对任意 $x\in\{1,2,3,4\}$,按规则 f 有唯一的 y 与之对应.

(2)是,因为对任意 $x\in\{1,2,3,4\}$,按规则 φ 有唯一的 y 与之对应.

(3)不是. 因为对 $x=1\in\{1,2,3,4\}$,有 $y=2$ 与 $y=4$ 两个值与之对应.

(4)不是. 因为对 $x=4\in\{1,2,3,4\}$,没有 y 值与之对应.

四、函数重要性质的应用

单调性:反映了函数图像沿 x 轴正方向的升降.

有界性:反映了函数图像是否在平行于 x 轴的两条直线之间.

奇偶性:反映了函数图像的对称性. 奇函数图像关于原点对称;偶函数图像关于 y 轴对称;

周期性:反映了函数图像是否重复出现.

1. 设 $f(x)$ 为奇函数,$g(x)$ 为偶函数,试证:$f[f(x)]$ 为奇函数,$g[f(x)]$ 为偶函数.

证明　因为 $f[f(-x)]=f[-f(x)]=-f[f(x)]$,所以 $f[f(x)]$ 为奇函数.

因为 $g[f(-x)]=g[-f(x)]=g[f(x)]$,所以 $g[f(x)]$ 为偶函数.

2. 证明 $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

证明　当$|x|\geqslant 1$时，$x^2\leqslant x^4$，因此$\left|\dfrac{1+x^2}{1+x^4}\right|\leqslant 1$；当$|x|<1$时，$\left|\dfrac{1+x^2}{1+x^4}\right|\leqslant 1+x^2\leqslant 2$；所以对任意$x\in(-\infty,+\infty)$，$|f(x)|\leqslant 2$，即$f(x)$有界.

五、反函数法及复合函数的分解与复合

直接函数$y=f(x)$，其直接反函数为$x=\varphi(y)$，其矫形反函数为$y=f^{-1}(x)=\varphi(x)$. 这时，$x=\varphi(y)$与$y=f(x)$为同一函数. $y=f(x)$，$x=\varphi(y)$，$y=f^{-1}(x)$在同一坐标系中的几何表现是$y=f(x)$与$x=\varphi(y)$在同一坐标系中的图像相同，$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$在同一坐标系中的图像关于直线$y=x$对称.

任意两个函数不一定可以复合成一个复合函数，例如：$y=\ln u$与$u=-|x|$两个函数就不可以复合成一个复合函数.

1. 求下列函数的反函数.

(1)$y=\ln(x+2)+1$；　　(2)$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$；

(3)$y=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0,\\ x^3, & x<0.\end{cases}$

解　(1)由$y=\ln(x+2)+1$得$\ln(x+2)=y-1$，即$x+2=e^{y-1}$，$x=e^{y-1}-2$. 所以$y=\ln(x+2)+1$的反函数为$y=e^{x-1}-2$.

(2)由$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$得$2^x=\dfrac{y}{1-y}$，

即
$$x=\log_2\frac{y}{1-y},$$

反函数为$y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

(3) 当$x\geqslant 0$时$y\geqslant 1$；$x<0$时，$y<0$.

反函数为$y=\begin{cases}x-1, & x\geqslant 1,\\ \sqrt[3]{x}, & x<0.\end{cases}$

2. 将下列函数拆开成若干个基本初等函数的复合.

(1)$y=\sin^3(1+2x)$；　(2)$y=10^{(2x-1)^2}$；　(3)$y=\arctan[\tan(a^2+e^x)]^2$.

解　(1)由$y=u^3$，$u=\sin(1+2x)$有$y=u^3$，$u=\sin v$，$v=1+2x$.

(2)由$y=10^u$，$u=(2x-1)^2$有$y=10^u$，$u=v^2$，$v=2x-1$.

(3)由$y=\arctan u$，$u=(\tan(a^2+e^x))^2$有$y=\arctan u$，$u=v^2$，$v=\tan(a^2+e^x)$；

故
$$y=\arctan u,u=v^2,v=\tan w,w=a^2+e^x.$$

六、函数关系式的建立

1. 一球的半径为r，作外切于球的正圆锥，试将其体积表示为高的函数，并说明定义域.

解　设正圆锥的高为h，底半径为R，体积为V，由立体几何学知：$V=\dfrac{1}{3}\pi R^2h$. 又

利用两直角三角形相似可得

$$\frac{r}{R}=\frac{h-r}{\sqrt{R^2+h^2}},R^2=\frac{r^2h^2}{h(h-2r)}=\frac{r^2h}{h-2r},$$

所以　$$V=\frac{\pi r^2h^2}{3(h-2r)},h\in(2r,+\infty).$$

2. 一位旅客住在旅馆里，右图 1-1 描述了他的一次行动，请你根据图形给纵坐标赋予某一个物理量后，再叙述他的这次行动. 你能给图 1-1 标上具体的数值，精确描述这位旅客的这次行动并用一个函数解析式表达出来吗？

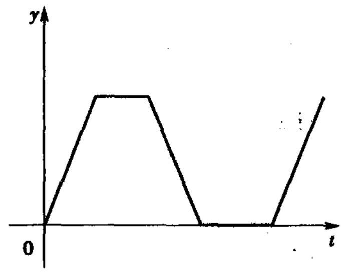

图 1-1

答：设纵坐标 y 为离开旅馆的距离，时间为 t，则右图可描述为：此旅客离开旅馆出外办事，一件事办完后，又回到旅馆，休息一段时间然后再离开旅馆. 标明具体数据如图 1-2 所示，设距离 y 的单位为 km，时间 t 的单位为 h，则这位旅客的这次行动可描述为：他以 2 km/h 的速度出外办事行走 1 h 到达办事处，到达办事处，用 1 h 办完一件事，以同样的速度回到旅馆休息 1 h，又以同样的速度离开旅馆. 行动用函数解析式表达如下：

$$y=\begin{cases}2t, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 2, & 1<t\leqslant 2,\\ -2t+6, & 2<t\leqslant 3,\\ 0, & 3<t\leqslant 4,\\ 2t-8, & t>4.\end{cases}$$

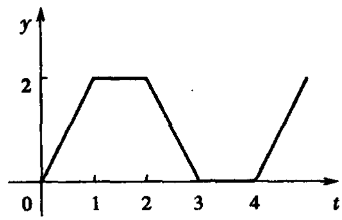

图 1-2

第二章　极限的求法

一、极限的定义及性质应用

在$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$的定义中，因为$x\to x_0$表示$x$无限接近$x_0$而不等于$x_0$，故$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$f(x)$在点$x_0$有无定义无关. 所以只要求$f(x)$在$x_0$的空心邻域$N(\hat{x}_0,\delta)$内有定义.

(一)数列极限定义及性质的应用

1. 判断题：

(1)设在常数a的无论怎样小的ε邻域内存在着$\{x_n\}$的无穷多点，则$\{x_n\}$的极限为a(错). 例如$x_n=1+\dfrac{(-1)^n n}{2n+1}, a=\dfrac{3}{2}$.

(2)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a, \lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$(对).

(3)设$x_n=0.\underbrace{11\cdots1}_{n个1}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{9}$(对).

2. 用数列极限定义证明.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{4n+3}=\dfrac{1}{2}$；　　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

证明　(1)因为$\left|\dfrac{2n-1}{4n+3}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{5}{2(4n+3)}<\dfrac{5}{8n}<\dfrac{1}{n}$，
所以任给$\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，有$\left|\dfrac{2n-1}{4n+3}-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$.

由定义有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{4n+3}=\dfrac{1}{2}$.

(2)$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，所以任给$\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right]$，当$n>N$时，$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

3. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

证明　因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，所以任给$\varepsilon>0$，存在$N>0$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$，又$||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|<\varepsilon(n>N$时)，所以$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

4. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，证明$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{x_n}{n^2}=0$.

证明　因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，所以存在$M>0$，有$|x_n|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$，又因为

$\left|n\sin\frac{x_n}{n^2}\right|\leqslant\frac{|x_n|}{n}\leqslant\frac{M}{n}$,所以任给 $\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{M}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,有 $\left|a\sin\frac{x_n}{n^2}-0\right|\leqslant\frac{M}{n}$ $<\varepsilon$,故 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{x_n}{n^2}=0$.

5. 若数列 x_n 有界,又 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=0$.

证明 因为 $\{x_n\}$ 有界,所以存在 $M>0$,使得 $|x_n|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$. 又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ $=0$,所以任给 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,当 $n>N$ 时有 $|y_n|<\frac{\varepsilon}{M}$,而 $|x_ny_n|=|x_n||y_n|\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{M}$ $=\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=0$.

(二)函数极限的定义及性质

1. 举例说明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的几何意义.

解 例如:对 $y=\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ 表示当 x 沿 x 轴的正向远离原点时,曲线 $y=\frac{1}{x}$ 无限靠近直线 $y=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ 表示当 x 沿 x 轴的负方向远离原点时,曲线 $y=\frac{1}{x}$ 无限靠近直线 $y=0$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ 表示当 x 沿 x 轴远离原点时,曲线 $y=\frac{1}{x}$ 无限靠近直线 y $=0$.

2. 举例说明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$ 的几何意义.

解 例如:对 $y=\frac{1}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ 表示当 x 沿 x 轴无限接近 0 时,曲线 $y=\frac{1}{x^2}$ 向上无限远离原点;对 $y=-\frac{1}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{x^2}=-\infty$ 表示当 x 沿 x 轴无限接近 0 时,曲线 $y=\frac{-1}{x^2}$ 向下无限远离原点,对 $y=-\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to0^-}\left(-\frac{1}{x}\right)=+\infty$ 表示当 x 沿 x 轴负向无限接近 0 时,曲线 $y=-\frac{1}{x}$ 向上无限远离原点; $\lim\limits_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ 表示当 x 沿 x 轴正方向无限接近 0 时,曲线 $y=-\frac{1}{x}$ 向下无限远离原点.

3. 用"$\varepsilon-M$"或"$\varepsilon-\delta$"语言,写出下列各极限的定义.

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-1$;

(3) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=1$;　　(4) $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=4$.

答:(1)任给 $\varepsilon>0$,存在 $M>0$,使当 $x<-M$ 时,恒有 $|f(x)-2|<\varepsilon$ 成立.

(2)任给 $\varepsilon>0$,存在 $M>0$,使当 $|x|>M$ 时,恒有 $|f(x)+1|<\varepsilon$ 成立.

(3)任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当 $0<x-2<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-1|<\varepsilon$ 成立.

(4)任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当 $-\delta<x+2<0$ 时,恒有 $|f(x)-4|<\varepsilon$ 成立.

4. 用定义证明.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x-1}=\dfrac{1}{2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to1^-}(2x-1)=1$;　　(4) $\lim\limits_{x\to4}\sqrt{x}=2$.

证明　(1)任给 $\varepsilon>0$,取 $M=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$,当 $x>M$ 时, $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|=\dfrac{|\sin x|}{\sqrt{x}}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$ 成立.

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

(2)因为 $\left|\dfrac{x+1}{2x-1}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{3}{2|2x-1|}<\dfrac{2}{|2x-1|}<\dfrac{2}{2|x|-1}$. 所以任给 $\varepsilon>0$,取 $M=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{\varepsilon}+1\right)$,当 $|x|>M$ 时,有 $\left|\dfrac{x+1}{2x-1}-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{2}{2|x|-1}<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x-1}=\dfrac{1}{2}$.

(3)因为 $|(2x-1)-1|=2|x-1|$. 所以任给 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$,当 $-\delta<x-1<0$ 时,有 $|(2x-1)-1|=2|x-1|<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{x\to1^-}(2x-1)=1$.

(4)因为 $|\sqrt{x}-2|=\dfrac{|x-4|}{\sqrt{x}+2}<\dfrac{|x-4|}{2}$,所以任给 $0<\varepsilon<1$ 取 $\delta=2\varepsilon$,当 $0<|x-4|<\delta$ 时,有 $|\sqrt{x}-2|<\dfrac{|x-4|}{2}<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{x\to4}\sqrt{x}=2$.

二、极限运算法则及存在准则

1. 是非题,若非,请举例说明.

(1)若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,而 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 不存在. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)$ 不存在.(对)

(2)若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,而 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 不存在. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)$ 不存在.(错)

例如: $x_n=\dfrac{1}{n}$, $y_n=\sin n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在,但 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\sin n=0$ 存在.

(3)若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}v_n$ 都存在,且满足 $u_n<v_n(n=1,2,\cdots)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n<\lim\limits_{n\to\infty}v_n$.(错)

例如: $u_n=\dfrac{1}{n^2+1}$, $v_n=\dfrac{1}{n}$, $u_n<v_n(n=1,2,\cdots)$,但 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2+1}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

2. 下列运算错在何处?

(1) $\lim\limits_{x\to0}\sin x\cos\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\sin x\cdot\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}=0\cdot\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2}{2-x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to2}x^2}{\lim\limits_{x\to2}(2-x)}=\infty$.

答:(1) $\lim\limits_{x\to0}\sin x\cos\dfrac{1}{x}\neq\lim\limits_{x\to0}\sin x\cdot\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$ ($\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在).

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{2-x}\neq\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}x^2}{\lim\limits_{x\to 2}(2-x)}\left(\lim\limits_{x\to 2}(2-x)=0\right)$.

3. 设有两个数列 u_n 与 v_n，已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=a\neq 0$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$.

证明　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=a\neq 0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\frac{u_n}{v_n}}=\dfrac{1}{a}$，即 $\left\{\dfrac{v_n}{u_n}\right\}$ 有界，而 $v_n=\dfrac{v_n}{u_n}\cdot u_n$，由数列极限的定义及性质可知 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$.

4. 证明数列 $x_n=\dfrac{1}{2+1}+\dfrac{1}{2^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{2^n+1}$ 有极限.

证明　$\{x_n\}$ 单调增加，且

$$x_n=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}<1,$$

所以 $\{x_n\}$ 单调增加有上界，故有极限.

5. 设 $0<x_1<2$，$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\,(n=1,2,\cdots)$，证明数列 x_n 有极限，并求出该极限.

证明　显然 x_n 单调递增 $0<x_1<2$，设 $x_n<2$，则 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<2$，即数列 x_n 有界，那么 $\{x_n\}$ 有极限，设极限为 a，则 $a=\sqrt{2+a}$，解得 $a_1=2$，$a_2=-1$（舍去），所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

6. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\arctan nx}{\sqrt{n^2+n}}$.

解　$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\arctan nx}{\sqrt{n^2+n}}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x<0.\end{cases}$$

7. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}$.

解　$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

8. 设 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x<1,\\ 0, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 问 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 是否存在？

答：$\lim\limits_{x\to 1^-}(2x-1)=1$，而 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}0=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在.

9. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，证明在 x_0 的某一个去心邻域内 $f(x)>0$.