高中课程学习指导丛书

高中数学学习指导

全国十五所重点中学教师　编

高中课程学习丛书

高中数学学习指导

全国十五所重点中学教师　编

天津科学技术出版社

高中课程学习丛书

高中数学学习指导

全国十五所重点中学教师　编

*

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道130号

天津新华印刷一厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本787×1092毫米 1/32 印张15.75　字数358 000

1989年10月第1版

1990年8月第2次印刷

印数：16 951—49 350

ISBN 7-5308-0726-9/G·185　定价：6.20元

前　言

《高中课程学习丛书》，是由全国十五所重点中学部分富有教学经验的教师联合编写的。丛书是在1986年出版的《高中课程总复习丛书》的基础上，根据新教材内容和标准化考试的要求，以巩固基础知识、加强基本训练、提高灵活运用知识能力为目的，依照少而精和实用性原则修订而成。丛书包括数学、物理、化学、生物、历史、地理、语文、英语、政治9册。丛书作者所在的重点中学是：天津南开中学、北大附中、北京景山学校、北京实验中学、北京师院附中、上海师大附中、华东师大一附中、华东师大二附中、南京师大附中、苏州中学、杭州学军中学、福州三中、东北师大附中、辽宁省实验中学、人大附中等十五所。

本书为《高中数学学习指导》，由郗昌盛、高学仁、韩子阳、董晶达、王剑青、毛梦奇、徐望根编写。参加部分章节编写的还有林立茂、范培瑜。全书由郗昌盛统稿。本书书后附有1989年全国高考数学试题及综合练习题。

编　者

1989年5月

目　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

学习要点

一、集合

1.描述　具有某种属性（或性质）的事物的全体构成一个集合，其中每一个具体事物都叫作集合的一个元素.

（1）构成集合的两个必要条件是：研究的对象是具体的，它们的特征是明显的.二者缺一不可.

（2）能否构成集合与集合内元素是否存在无关.

2.集合内元素的特征　元素的确定性、互异性和无序性.

3.集合的表示方法

（1）列举法　把集合中的元素无遗漏地一个个列举出来，写在大括号内.

（2）描述法　把集合中元素的共同属性写在大括号内.

（3）平面直观图法　把集合中元素特征的几何意义在平面直角坐标系中表示出来.

（4）韦恩图法　用一条封闭的曲线把元素圈起来.

4.元素与集合的关系　从属关系.用$\in$或$\bar{\in}$（$\notin$）表示.

5.集合与集合的关系　包含或相等的关系.用$\subseteq$或$\subset$或$=$表示.

6.子集　用$A\subseteq B$或$B\supseteq A$表示.

7.真子集　用$A\subset B$或$B\supset A$表示.

（1）真子集一定是子集，而子集不一定是真子集.

（2）空集是任何非空集合的子集，而且是真子集.

（3）集合A与集合B相等的充要条件是$A\supseteq B$且$B\supseteq A$.

（4）任何一个非空集合都是自身的子集而不是真子集.

8.集合的运算

（1）交集：$A\cap B=\{x|x\in A，且x\in B\}$.

①$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$；

②$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap A=A$；

③$A\cap B=B\cap A$.

（2）并集：$A\cup B=\{x|x\in A，或x\in B\}$.

①$A\cup A=A$；

②$A\cup\varnothing=A$；

③$A\cup B=B\cup A$；

④$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$，$A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$.

（3）全集：I

（4）补集：$A\subseteq I$，$B\subseteq I$，则$\bar{A}=\{x|x\in I，且x\notin A\}$.

①$\bar{\bar{A}}=A$，$\bar{\varnothing}=I$，$\bar{I}=\varnothing$，

②$A\cup\bar{A}=I$，$A\cap\bar{A}=\varnothing$，

③$A\cap I=A$，$A\cup I=I$，

④$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$，$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

9.两个公式

（1）两个有限集合子集和真子集个数公式：2^n，和2^n-1（其中n表示集合中元素的个数）.

（2）两个有限集合并集中元素个数公式：$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$（其中$n$表示集合中元素个数）.

二、映射

1.对应　已知两个集合A与B，根据某种确定的关系，

“f”使集合A中任何一个元素在集合B中都有跟着的确定的元素出现，则称这种关系为从集合A到集合B的一个对应关系，简称对应。

两个集合，元素间的对应关系有四种形式：

①一对一的对应；

②一对多的对应；

③多对一的对应；

④多对多的对应。

2.映射

（1）映射是对一形式的对应。

（2）集合A叫起始集，集合B叫终止集.起始集元素的任意性和终止集元素的唯一性是构成映射的核心.

（3）象与原象　在映射作用下象唯一，原象允许不唯一，也允许终集中有些元素无原象.

三、函数

1.函数是由定义域、值域以及定义域到值域上的对应法则三部分组成的特殊的映射.

2.$f(a)$表示自变量x在定义域内任取一个确定的值a时，对应的函数值.

3.函数通性的研究内容

（1）定义域　原象集合A.

（2）值域　象的集合B.

（3）单调性　证明单调性，或确定单调区间.

（4）奇偶性　判断奇偶性的前提是：定义域必须以原点为对称.

①存在着又奇又偶函数.

②非零常值函数必是偶函数.

（5）函数图象的对称性　只指图象以原点或y轴的对称性。

（6）函数的最大值或最小值，以及取得最值时自变量的取值情况。

四、反函数

1.原函数与其反函数的定义域值域互换

2.原函数与其反函数的图象以$y=x$为对称。

五、幂函数、指数函数和对数函数图象和性质的研究

六、换底公式及推论

1.公式：$\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$（$a>0$，且$a\neq1$，$b>0$，$b\neq1$）。

2.推论

（1）$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$（$a$，$b>0$且$a\neq1$　$b\neq1$）。

（2）$\log_{a^n} b^m=\dfrac{m}{n}\log_a b$（$a>0$且$a\neq1$）。

（3）$\log_{a^n} b^n=\log_a b$（$a>0$且$a\neq1$）。

（4）$a^{\log_a N}=N$（$a>0$且$a\neq1$）。

七、指数方程与对数方程

1.指数方程的类型及一般解法

（1）形如$a^x=b$（$a>0$且$a\neq1$）或$a^{f(x)}=b^{\phi(x)}$（a，b均大于零且均不等于1）的，采用取对数法。

（2）形如$a^{f(x)}=a^{\phi(x)}$（$a>0$且$a\neq1$）的，采用比较指数法。

（3）形如$f(a^x)=0$（$a>0$且$a\neq1$）的，采用换元法。

（4）形如$a^x\pm b^x=c^x$（a，b，c均大于零且不等于1）

的，采用方程各项同除以a^x或b^x或c^x，而后换元。

说明：指数方程一般不需验根。只有在$a^{f(x)}=a^{\phi(x)}$形式中$f(x)=\phi(x)$出现分式方程或无理方程时要验根。

2. 对数方程的类型及一般解法

（1）形如$\log_a f(x)=b$（$a>0$且$a\neq 1$）的，采用化成指数方程法。

（2）形如$\log_a f(x)=\log_a \phi(x)$（$a>0$且$a\neq 1$）的，采用比较真数法。

（3）形如$f(\log_a x)=0$（$a>0$且$a\neq 1$）的，采用换元法。

（4）形如$f(x)+\log_a f(x)=c$（$a>0$且$a\neq 1$），采用图象法。

3. 形如$f(x)^{\phi(x)}=c$或$f(x)^{\phi(x)}=g(x)$的，采用先取对数后换元法。

说明：此种方程为幂指型方程，此种方程和对数方程必须验根。

例　　题

【例1】已知：$x^2+px+q=0$的两个不等根是α和β，$X=\{\alpha, \beta\}$，$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$，$B=\{1, 4, 7, 10\}$，$X\cap A=\phi$，$X\cap B=X$　求p，q。

解：$\because$　$X\cap A=\phi$，$\therefore$　$\alpha\notin A$且$\beta\notin A$。

又　$X\cap B=X$，$\therefore$　$\alpha\in B$且$\beta\in B$。而属于B但不属于A的元素只有4和10。故α，β分别是4和10。又α，β是$x^2+px+q=0$的两个根。

$$\therefore \begin{cases}\alpha+\beta=-p, \\ \alpha\cdot\beta=q.\end{cases} \quad \therefore \quad p=-14, \ q=40.$$

【例2】$I=\{2x|1\leqslant x\leqslant 7$，且$x\in Z\}$，$A\cap B=\{2,8,14\}$，$\bar{A}\cap B=\{10,12\}$，$\overline{A\cup B}=\{6\}$，求$A$，$B$。

解：$I=\{2x|1\leqslant x\leqslant 7$，且$x\in Z\}=\{2,4,6,8,10,12,14\}$。又$\bar{A}\cap B=\{10,12\}$，∴ $10\notin A$，$10\in B$。$12\notin A$，$12\in B$。

又∵ $A\cap B=\{2,8,14\}$，$\overline{A\cup B}=\{6\}$，但$4\in I$，故$4\in A$，而$4\notin B$。∴ $A=\{4,2,8,14\}$，$B=\{2,8,14,12,10\}$。

【例3】若方程$x^2-x-m=0$的解集是A，方程$4x^2-nx+1=0$的解集是B，且$A\cap B=\{-1\}$求$A\cup B$。

解：∵ $A\cap B=\{-1\}$，∴ $-1\in A$且$-1\in B$。即-1满足两个方程。

由$(-1)^2-(-1)-m=0$得$m=2$，

由$4(-1)^2-n(-1)+1=0$得$n=-5$。

故两个方程分别是：$x^2-x-2=0$，$4x^2+5x+1=0$。

∴ $A=\{2,-1\}$，$B=\{-\frac{1}{4},-1\}$。

∴ $A\cup B=\{-1,-\frac{1}{4},2\}$。

【例4】$A=\{1,2,3,\cdots\}$，$B=\{\frac{1}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{7}\cdots\}$。"$f$"：$x\to y=\frac{2x-1}{2x+1}$是从$A$到$B$的映射，其中$x\in A$，$y\in B$。求在"$f$"作用下象是$\frac{15}{17}$的元素。

解：设此元素是x'，则$x'\in A$。又"f"是从A到B的映射且$\frac{15}{17}$是"f"作用下某一元素的象，∴ $\frac{15}{17}\in B$。

$\therefore \quad \frac{15}{17}=\frac{2x'-1}{2x'+1}$，得出$x'=8$．

故在“f”作用下象是$\frac{15}{17}$的元素是A中元素8．

【例5】$f(x-1)=(x^2-2x)^2+3(x^2-2x+2)$，在$R$内将$f(x)$因式分解．

解：$\because \quad f(x-1)=(x^2-2x)^2+3(x^2-2x+2)$

$$=(x^2-2x+1-1)^2+3(x^2-2x+1+1)$$

$$=[(x-1)^2-1]^2+3[(x-1)^2+1].$$

设$x-1=t$，则$f(t)=[t^2-1]^2+3[t^2+1]=t^4+t^2+4$．

$\therefore \quad f(x)=x^4+x^2+4=x^4+4x^2+4-3x^2$

$$=(x^2+2)^2-3x^2$$

$$=(x^2+2+\sqrt{3}x)(x^2+2-\sqrt{3}x).$$

【例6】设$f(x)=\frac{x}{x-1}$，试用$f(x)$表示$f(3x)$．

解：由$f(x)=\frac{x}{x-1}$得 $x=\frac{f(x)}{f(x)-1}$．

$$\therefore \quad f(3x)=\frac{3x}{3x-1}=\frac{3\cdot\frac{f(x)}{f(x)-1}}{3\frac{f(x)}{f(x)-1}-1}=\frac{3f(x)}{2f(x)+1}.$$

【例7】画出$y=|2x-1|-|x-1|$的图象，指出单调区间．

解：$y=\begin{cases}-x & x<\frac{1}{2},\\ 3x-2 & \frac{1}{2}\leqslant x<1,\\ x & x\geqslant 1.\end{cases}$

图象见图1-1。

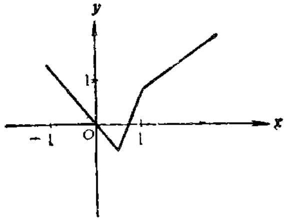

图 1-1

单增区间是$\left[\frac{1}{2},\ +\infty\right)$，单减区间是$\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right]$。

【例 8】$f(x)=\begin{cases} x+1 & x>0, \\ \pi & x=0, \\ 0 & x<0. \end{cases}$

求$f\left\{f\left[f\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\right\}$值.

解：$\because -\frac{1}{2}<0 \quad \therefore f\left(-\frac{1}{2}\right)=0 \quad \therefore f\left\{f\left[f\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\right\}$

$=f\{f[0]\}$。

又$f(0)=\pi$，故原式$=f\{\pi\}$.

又$\pi>0$，$\therefore f(\pi)=\pi+1$，$\therefore f\left\{f\left[f\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\right\}=\pi+1$.

【例 9】判断$y=x\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)$的奇偶性.

解：$\because x\in R$但$x\neq 0$，故定义域以原点对称.

又$f(-x)=(-x)\left(\frac{1}{2^{-x}-1}+\frac{1}{2}\right)=x\left(\frac{1}{1-2^{-x}}-\frac{1}{2}\right)$

$$=x\left(\frac{1}{1-2^{\frac{1}{x}}}-\frac{1}{2}\right)=x\left(\frac{1}{\frac{2^x-1}{2^x}}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=x\left(\frac{2^x}{2^x-1}-\frac{1}{2}\right)=x\left(\frac{2^x}{2^x-1}-1+\frac{1}{2}\right)$$

$$=x\left(\frac{2^x-2^x+1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)=x\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)=f(x)$$

所以是偶函数。

【例10】 $y=a^{\log_x\frac{1}{3}}$，x为何值时$y>1$，$y<1$．

解：设$y'=\log_x\frac{1}{3}$，则原函数变为$y=a^{y'}$．

$\therefore a>1$时，$y'>0$有$y>1$，$y'<0$有$y<1$．

对于$y'=\log_x\frac{1}{3}$，$\because\frac{1}{3}<1$，故只有当$0<x<1$时$y'>0$，当$x>1$时$y'<0$．

$a>1$时，若$0<x<1$，有$y>1$，若$x>1$有$y<1$．

同理可得：

$0<a<1$时，若$0<x<1$，有$y<1$，若$x>1$有$y>1$．

【例11】 确定$y=\log_{0.3}(x^2-2x-2)$的单调区间．

解：设$y'=x^2-2x-2$，则原函数成$y=\log_{0.3}y'$．

又由$x^2-2x-2>0$得出$x<1-\sqrt{3}$或$x>1+\sqrt{3}$．

对于$y'=x^2-2x-2$，画其图象可知（∞，$1-\sqrt{3}$〕是单减区间，〔$1+\sqrt{3}$，$+\infty$）是单增区间．

又，$y=\log_{0.3}y'$是减函数，故（$-\infty$，$1-\sqrt{3}$〕是$y=\log_{0.3}(x^2-2x-2)$的单增区间，〔$1+\sqrt{3}$，$+\infty$）是单减区间．

【例12】 若$x\in(-1,1)$，证明$f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$是减函数．

证明：任取$-1<x_1<x_2<1$．

$$f(x_1)-f(x_2)=\lg\frac{1-x_1}{1+x_1}-\lg\frac{1-x_2}{1+x_2}=\lg\frac{\frac{1-x_1}{1+x_1}}{\frac{1-x_2}{1+x_2}}$$

$$=\lg\frac{(1-x_1)(1+x_2)}{(1+x_1)(1-x_2)}.$$

又 $\dfrac{(1-x_1)(1+x_2)}{(1+x_1)(1-x_2)}-1=\dfrac{(1-x_1)(1+x_2)-(1+x_1)(1-x_2)}{(1+x_1)(1-x_2)}$

$$=\frac{2(x_2-x_1)}{(1+x_1)(1-x_2)}>0.$$

$\therefore\ \dfrac{(1-x_1)(1+x_2)}{(1+x_1)(1-x_2)}>1$，$\therefore \lg\dfrac{(1-x_1)(1+x_2)}{(1+x_1)(1-x_2)}>0$，

$\therefore\ f(x_1)>f(x_2)$.

故 $f(x)$ 在 $(-1,\ 1)$ 上是减函数.

【例13】 求 $\sqrt{\dfrac{1}{27}}^{\frac{1}{5\log_5 3}+\log_{9\sqrt{3}}125}$ 的值.

解：$\sqrt{\dfrac{1}{27}}^{\frac{1}{5\log_5 3}+\log_{9\sqrt{3}}125}=\left(3^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{5}\log_3 5+\log_{3^{\frac{5}{2}}}5^3}$

$$=\left(3^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{5}\log_3 5+\frac{6}{5}\log_3 5}$$

$$=\left(3^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{7}{5}\log_3 5}$$

$$=\left(3^{\log_3 5}\right)^{-\frac{21}{10}}$$

$$=5^{-\frac{21}{10}}$$

【例14】 求 $y=(x+1)^2+2\ (x\geqslant-1)$ 的反函数，并指出反函数的定义域和值域.

解：由 $y=(x+1)^2+2$ 得 $(x+1)^2=y-2$. 又 $x\geqslant-1$，

$\therefore x+1=\sqrt{y-2}$, $\therefore x=\sqrt{y-2}-1$.

故$y=(x+1)^2+2\ (x\geqslant -1)$的反函数是$y=\sqrt{x-2}-1$,反函数的定义域是$x\geqslant 2$, 值域是$y\geqslant -1$.

【例15】设$f(2x-1)=x^2, x\in R$,求$f[f(x)]$的值域.

解：设$2x-1=t$,则$x=\dfrac{t+1}{2}$.

故原函数式为$f(t)=\left(\dfrac{t+1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}(t+1)^2$.

$\therefore\quad f(x)=\dfrac{1}{4}(x+1)^2$.

$$\therefore\quad f[f(x)]=\frac{1}{4}[f(x)+1]^2=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}(x+1)^2+1\right]^2,$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{4}[(x+1)^2+4]\right\}^2=\frac{1}{64}[(x+1)^2+4]^2.$$

$\because\quad (x+1)^2\geqslant 0$, $\therefore (x+1)^2+4\geqslant 4$.

$\therefore\quad [(x+1)^2+4]^2\geqslant 16$.

$\therefore\quad \dfrac{1}{64}[(x+1)^2+4]^2\geqslant\dfrac{1}{64}\times 16=\dfrac{1}{4}$.

即$f[f(x)]$的值域是$[\dfrac{1}{4},+\infty)$.

【例16】 $5^{x-4}-5^{x-5}-2\cdot(5^{x-6})=2(3^{x-4})$,求$x$.

解：原方程可写成：

$5^{x-4}-5^{x-4}\circ 5^{-1}-2\cdot 5^{x-4}\cdot 5^{-2}=2(3^{x-4})$.

方程两端同除以$2(3^{x-4})$有：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^{x-4}-\frac{1}{10}\left(\frac{5}{3}\right)^{x-4}-\frac{1}{25}\left(\frac{5}{3}\right)^{x-4}=1.$$

设$y=\left(\dfrac{5}{3}\right)^{x-4}$, 则$\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{10}y-\dfrac{1}{25}y=1$. $\therefore y=\dfrac{25}{9}$.