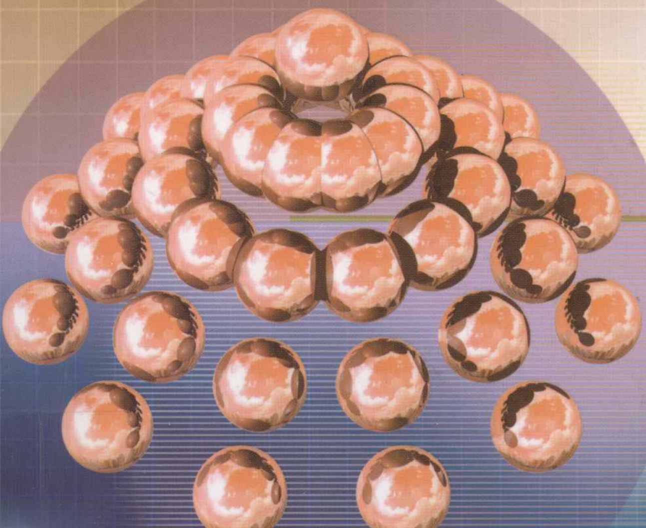
普通高等教育"十一五"国家级规划教材

大学数学
——线性代数习题课教程

(第二版)



吉林大学数学学院
黄万风　赵玉娟　李　宾　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

大学数学——线性代数习题课教程

Daxue Shuxue——Xianxing Daishu Xitike Jiaocheng

（第二版）

吉林大学数学学院
黄万风　赵玉娟　李　宾　主编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是与《大学数学 —— 线性代数》(第二版) 配套的习题课教材。本书密切配合主教材，共分七讲，内容包括：矩阵的运算与初等变换，方阵的行列式，可逆矩阵，线性方程组与向量组的线性相关性，方阵的特征值、特征向量与相似化简，二次型与对称矩阵，线性空间与线性变换；书末附综合练习题及其参考答案。全书各讲包含内容提要、例题解析、练习题及其参考答案。

本书可供高等学校非数学类理工科各专业学生使用，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

大学数学. 线性代数习题课教程 / 黄万风，赵玉娟，李宾主编. — 2 版. — 北京：高等教育出版社，2010. 8
ISBN 978-7-04-030069-7

I. ①大… Ⅱ. ①黄… ②赵… ③李… Ⅲ. ①线性代数 - 高等学校 - 解题 Ⅳ. ①O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 124221 号

策划编辑 兰莹莹　**责任编辑** 边晓娜　**封面设计** 于　涛
版式设计 王艳红　**责任校对** 王　超　**责任印制** 尤　静

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010—58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400—810—0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京四季青印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	2006 年 5 月第 1 版
开　　本	787×960　1/16		2010 年 8 月第 2 版
印　　张	12.75	印　　次	2010 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	230 000	定　　价	17.30 元

物料号　30069—00

第二版前言

《大学数学》系列教材面世已经 5 年了。在此期间, 有不少高校同行在使用本系列教材的过程中提出了许多宝贵意见, 结合过去 5 年我们使用本系列教材的教学实践经验和近几年大学数学课程改革的一些新动态, 编委会决定对本系列教材进行修订、完善。

这次习题课教程修订的指导思想是: 1. 与主教材紧密配合, 通过习题课的讲解, 使读者进一步加深对课程内容的理解。2. 基本按习题课的学时安排编写每一讲, 教师也可根据教学情况进行调整。3. 习题的难易搭配适中。

本书密切配合《大学数学 —— 线性代数》(第二版), 共分七讲, 内容包括: 矩阵的运算与初等变换, 方阵的行列式, 可逆矩阵, 线性方程组与向量组的线性相关性, 方阵的特征值、特征向量与相似化简, 二次型与对称矩阵, 线性空间与线性变换; 书末附综合练习题及其参考答案。全书内容充实, 题型全面。各讲首先概括总结主要内容, 继而进行例题选讲, 最后配有练习题及参考答案。本书总结学习规律, 解决疑难问题, 提示注意事项, 特别注重提高学生分析问题、解决问题的能力。书中的 “△” 表示该题难度较大, “*” 表示该题与教材中带 “*” 内容相对应。

本书第一、二、三讲由赵玉娟编写, 第四、五讲由李宾编写, 第六、七讲及综合练习题由黄万凤编写, 最后由黄万凤统审、定稿。

在本书的修订过程中, 得到了吉林大学数学学院和高等教育出版社数学分社的大力支持和帮助, 吴晓俐女士承担了本系列教材的编务工作, 在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平所限, 书中的错误和不当之处, 敬请读者批评指正。

《大学数学》系列教材编委会

2010 年 3 月

第一版前言

大学数学习题课教程系列教材是普通高等教育“十五”国家级规划教材《大学数学》的配套教材。本套教材分两册:《微积分习题课教程》和《线性代数与随机数学习题课教程》。每册分上、下两篇。《微积分习题课教程》的上篇为一元微积分, 下篇为多元微积分。《线性代数与随机数学习题课教程》的上篇为线性代数, 下篇为随机数学。

大学数学习题课教程系列教材借鉴了国内外同类教材的精华, 汲取了当前教学改革和教学研究的最新成果; 是针对非数学类专业理工科大学生对基础数学的要求而编写的。本教材密切配合大学数学系列教材, 注意到了时代的特征和学生的特点, 本着“加强基础、强化应用、整体优化、注重后效”的原则, 力争做到科学性、系统性与可行性的统一。其特点是: 体现了现代数学思想与方法, 解决疑难问题, 总结学习规律, 提示注意事项, 特别注重培养学生分析问题、解决问题的能力。本教材可作为高等学校非数学类理工科各专业学生学习数学的辅助教材或参考书。本教材内容充实, 每章配有综合练习及参考答案与提示。参考答案与提示只是作为一种参考提供给读者。

《线性代数与随机数学习题课教程》上篇共九章, 第一、二、三章由赵玉娟编写, 第四、五章由李宾编写, 第六、七章由谢敬然编写, 第八、九章由黄万风编写; 上篇由黄万风统审、定稿。下篇共九章, 第十、十一章由孙毅编写, 第十二、十五章由李忠范编写, 第十三、十四章由高彦伟编写, 第十六、十七、十八章由郑文瑞编写; 下篇由李忠范统审、定稿。在《大学数学习题课教程》的编写过程中, 得到了吉林大学教务处和数学学院的大力支持。青年教师孙鹏、任长宇及研究生王军林、姜政毅、徐忠海、高懿、陈明杰、杨旭辉、朱复康完成了本套教材的排版制图工作。在此一并致谢。编者要特别感谢高等教育出版社数学分社的领导和编辑们, 他们对本系列教材的编辑出版工作给予了精心指导和大力支持。

由于我们水平有限, 书中的错误和不妥之处, 恳请广大读者批评指正。

编　者

2006 年 5 月

目　　录

第一讲　矩阵的运算与初等变换

内 容 提 要

1. 矩阵与向量的概念

1.1 矩阵的概念

(1) **矩阵**　由 $m \times n$ 个数排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 m **行** n **列的矩阵**, 或称为 $m \times n$ **矩阵**. 通常用大写字母 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 表示. 有时也记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 其中 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的元素, 简称为 (i,j) 元. 元素为实数的矩阵称为**实矩阵**. 元素为复数的矩阵称为**复矩阵**.

(2) **同型矩阵**　若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 m 行 n 列的矩阵, 则称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为**同型矩阵**.

(3) **矩阵相等**　若两个矩阵同型, 并且对应元素相等, 即对 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 有 $a_{ij}=b_{ij}$, $i=1,2,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots,n$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相等**, 记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

(4) **零矩阵**　$m \times n$ 个元素全为零的矩阵称为**零矩阵**, 记作 $\boldsymbol{O}$.

(5) **方阵**　当 $m=n$ 时, 称 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 为 $\boldsymbol{n}$ **阶方阵**, 并将 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 简记为 $\boldsymbol{A}_n$ (一阶方阵等同于构成它的元素).

(6) **行矩阵与列矩阵**　当 $m=1$ 时, 称 $\boldsymbol{A}_{1\times n}$ 为**行矩阵**; 当 $n=1$ 时, 称 $\boldsymbol{A}_{m\times 1}$ 为**列矩阵**.

1.2 向量的概念

(1) **向量**　n 行 1 列的矩阵称为 n 维**列向量**. 1 行 n 列的矩阵称为 n **维行向量**, n 维列向量与 n 维行向量统称为 n **维向量**, 简称为**向量**. 常用来表示向量的

记号有 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ 等. n 维向量的元素也称为分量. 若两个 n 维列 (行) 向量的对应分量相等, 则称这两个 n 维列 (行) **向量相等**. 把分量全为 0 的向量称为**零向量**, 记作 $\mathbf{0}$.

(2) **基本向量组** 第 i 个分量为 1, 其余分量均为 0 的 n 维列 (行) 向量称为一个 n 维**基本列 (行) 向量**, 用 $\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{f}_i)$ 表示 $(i=1,2,\cdots,n)$, 则

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{e}_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

是互不相同的 n 个 n 维**基本列向量**, 类似地,

$$\boldsymbol{f}_1=(1,0,\cdots,0),\boldsymbol{f}_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,\boldsymbol{f}_n=(0,0,\cdots,1)$$

是互不相同的 n 个 n 维**基本行向量**. 二者统称为 n 维**基本向量组**.

(3) **单位矩阵** n 个不同的 n 维基本列 (或行) 向量可排成一个 n 阶方阵

$$\boldsymbol{E}_n=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix},$$

则称 $\boldsymbol{E}_n$ 为 n 阶**单位矩阵**, 简记为 $\boldsymbol{E}$. 单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的 (i,j) 元为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当 } i=j,\\0, & \text{当 } i\neq j.\end{cases}$$

2. 矩阵的运算

2.1 矩阵的线性运算

(1) **矩阵加法** 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, 规定

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&\cdots&a_{1n}+b_{1n}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&\cdots&a_{2n}+b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}+b_{m1}&a_{m2}+b_{m2}&\cdots&a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix}.$$

(2) **负矩阵** 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, 记 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})$, 则称 $-\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**. 显然有 $(-\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

(3) **矩阵的减法** 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的减法定义为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

(4) **矩阵加法满足下列运算规律** (设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵):

i) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

ii) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

iii) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{O}$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 同型的零矩阵.

(5) **数乘矩阵** 数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}\lambda$, 规定

$$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=(\lambda a_{ij})_{m\times n}.$$

(6) **数乘矩阵满足下列运算规律** (设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵, λ,μ 为数).

i) $\lambda(\mu\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$;

ii) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$;

iii) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$;

iv) $(-1)\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$.

矩阵的加法和数乘运算统称为矩阵的**线性运算**.

2.2 矩阵的乘法运算

(1) **矩阵乘法** 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p}$, 规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times p}$, 其中 c_{ij} 就是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的 "对乘加", 即 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,p$, 记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

(2) **矩阵乘法满足以下运算律** (假设运算是可行的):

i) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;

ii) $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$ (其中 λ 是数);

iii) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC},(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$.

(3) **可换矩阵** 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是**可换的**. 显然可换的矩阵必须是同阶方阵.

(4) **方阵的幂** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 定义

$$\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA},\cdots,\ \boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{A},$$

其中 k 为正整数, 称 $\boldsymbol{A}^k$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂. 矩阵的幂运算满足 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$, $(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$, 其中 k,l 为正整数. 特别地, 规定 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$.

(5) **矩阵多项式** 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和多项式

$$f(\lambda)=a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0,$$

则称 $f(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**矩阵多项式**.

2.3 矩阵的转置

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 不改变每行元素的相应顺序, 把 $\boldsymbol{A}$ 的行依次作为同序数的列所排成的矩阵

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵. 显然 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的 (i,j) 元是 $\boldsymbol{A}$ 的 (j,i) 元. 矩阵转置运算满足下述运算规律 (假设运算都是可行的):

(i) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

(ii) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(iii) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ (λ 为数);

(iv) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

3. 分块矩阵及矩阵的分块运算

3.1 分块矩阵

对于行数和列数较多的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 用若干条位于行与行之间的横线及若干条位于列与列之间的纵线将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分成许多个小矩阵, 每个小矩阵都称为 $\boldsymbol{A}$ 的**子块**. 以子块为元素形式的矩阵称为**分块矩阵**. 例如

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}_{12}=\begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}_{21}=\begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}_{22}=\begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$ 均为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的子块. 矩阵 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个分块矩阵, 简记为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{2\times 2}$.

3.2 矩阵的分块运算

(1) **矩阵的分块加、减法运算** 对矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}_{m\times n}$ 采用相同的分块方法, 得到分块矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_{ij})_{s\times t}$, 其中子块 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,t)$ 是同型矩阵, 则规定

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}_{ij}\pm\boldsymbol{B}_{ij})_{s\times t}.$$

这就是说, 如果两个同型矩阵的分块方法相同, 则它们相加或相减时, 只把对应的子块相加或相减; 而每对子块之间的加法或减法, 则按普通矩阵的加法或减法进行运算.

(2) **矩阵的分块数乘运算** 设 λ 为一个数, $\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}$, 则规定 $\lambda\boldsymbol{A}=(\lambda\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}$, 即数乘分块矩阵, 是用数遍乘矩阵中的每个子块, 而数乘子块则按普通的数乘矩阵进行运算.

(3) **矩阵的分块乘法运算** 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}_{n\times p}$ 分块为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{t1} & \boldsymbol{B}_{t2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{tr}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{i1},\boldsymbol{A}_{i2},\cdots,\boldsymbol{A}_{it}$ 的列数分别等于 $\boldsymbol{B}_{1j},\boldsymbol{B}_{2j},\cdots,\boldsymbol{B}_{tj}$ 的行数, 则规定 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{C}_{ij})_{s\times r}$, 其中 $\boldsymbol{C}_{ij}$ 是矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的子块, $\boldsymbol{C}_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{t}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}$ $(i=1,2,\cdots,s;\ j=1,2,\cdots,r)$. 两个分块矩阵相乘, 即是以子块为元素按矩阵的乘法规则相乘, 此时其相应的子块是可乘的, 并按普通的矩阵乘法规则相乘.

(4) **分块矩阵的转置** 设分块矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s2}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1t}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{2t}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

4. 几种特殊矩阵

4.1 对角矩阵

在方阵 $\boldsymbol{A}_n=(a_{ij})_{n\times n}$ 中, 主对角线以外的元素 a_{ij} $(i\neq j)$ 全为零的矩阵称为**对角矩阵**, 简记为 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}\{a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}\}$, 其中 a_{ii} $(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素. 主对角线元素全相等的对角矩阵称为**标量矩阵**.

4.2 上 (下) 三角形矩阵

主对角线下 (上) 方元素全为零的方阵称为上 (下) **三角形矩阵**.

4.3 对称矩阵

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}_n=(a_{ij})$, 如果 $a_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**.

易证, $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.

4.4 反称矩阵

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}_n=(a_{ij})$, 如果 $a_{ij}=-a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**反称矩阵**.

易证, $\boldsymbol{A}$ 为反称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$.

4.5 分块对角矩阵

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个分块矩阵, 如果其主对角线上的子块是方阵 (阶数可以不同), 其余子块均为零矩阵, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**分块对角矩阵**.

5. 矩阵的初等变换

5.1 矩阵的初等行 (列) 变换

(1) **倍法变换** 用一个非零常数乘矩阵的某行 (列), 这种变换称为**倍法变换**;

(2) **消法变换** 用一个数乘矩阵的某行 (列) 后再加到另一行 (列) 上去, 这种变换称为**消法变换**;

(3) **换法变换** 交换矩阵的两行 (列), 这种变换称为**换法变换**.

上述三种行 (列) 变换即为矩阵的**初等行 (列) 变换**. 初等行变换和初等列变换统称为**矩阵的初等变换**

5.2 矩阵的等价关系

(1) **矩阵等价** 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换化成矩阵 $\boldsymbol{B}$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **等价**, 记作 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

(2) **矩阵等价关系的性质**

i) 反身性 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{A}$;

ii) 对称性 若 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{A}$;

iii) 传递性 若 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{C}$, 则 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{C}$.

(3) **行阶梯形矩阵** 若矩阵的所有元素全为零的行 (如果存在的话) 都集中在矩阵的最下面, 且每行左起第一个非零元素 (称为首非零元) 的下方元素全为零, 则称该矩阵为**行阶梯形矩阵**.

(4) **行最简形矩阵** 在行阶梯形矩阵中, 如果非零行首非零元为 1, 且这些首非零元所在列的其他元素全为 0, 则称之为**行最简形矩阵**.

(5) **相关定理**

定理 1.1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 必可经过有限次初等变换化为如下形式:

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & \cdots & 0\\ & & & \vdots & & \vdots\\ & & & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \leftarrow 第\ r\ 行\\ \\ \\ \\ \end{matrix},$$

其中 $0\leqslant r\leqslant \min\{m,n\}$, $\boldsymbol{G}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在初等变换下的**标准形**, 简称为**标准形矩阵**.

定理 1.2 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 必可用初等行变换化为行阶梯形矩阵.

5.3 初等矩阵

对单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 施以一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**. 三种初等变换对应以下三种**初等矩阵**:

(1) **初等倍法矩阵** 以数 k $(k\neq 0)$ 乘单位矩阵的第 i 行 (列), 得初等矩阵 $\boldsymbol{P}(i[k])$, 称之为**初等倍法矩阵**;

(2) **初等消法矩阵** 以数 k 乘单位矩阵的第 j 行加到第 i 行 (或用数 k 乘单位矩阵的第 i 列加到第 j 列), 得初等矩阵 $\boldsymbol{P}(i,j[k])$, 称之为**初等消法矩阵**;

(3) **初等换法矩阵** 把单位矩阵的第 i,j 两行 (列) 对调, 得初等矩阵 $\boldsymbol{P}(i,j)$, 称之为**初等换法矩阵**.

通常将以上三种矩阵依次简称为**倍法矩阵**, **消法矩阵**, **换法矩阵**.

定理 1.3 用初等矩阵左乘 $\boldsymbol{A}$, 相当于对 $\boldsymbol{A}$ 进行相应的初等行变换; 用初等矩阵右乘 $\boldsymbol{A}$, 相当于对 $\boldsymbol{A}$ 进行相应的初等列变换.

例 题 解 析

【例 1】 填空题.

(1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}_1^9\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2^9=$__________.

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$, 且 $x_1+x_4=2$, $x_2+x_3=1$, 如果 $\boldsymbol{A}$

和 $\boldsymbol{B}$ 可换, 则 $\boldsymbol{B}=$ __________.

(3) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^n=$ __________ (n 为正整数).

解 (1) 应填 $\begin{bmatrix}a_1&a_3&a_2\\b_1&b_3&b_2\\18a_1+c_1&18a_3+c_3&18a_2+c_2\end{bmatrix}$.

由本讲定理 1.3, 用 $\boldsymbol{P}_1^9$ 左乘 $\boldsymbol{A}$, 是把 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行的 2 倍加到第 3 行上 9 次, 即把 $\boldsymbol{A}$ 的第一行的 18 倍加到第 3 行, 得矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_1^9\boldsymbol{A}$, 再用 $\boldsymbol{P}_2^9$ 右乘 $\boldsymbol{B}$, 是把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列和第 3 列对换 9 次 (实际上只需对换一次), 得

$$\boldsymbol{P}_1^9\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2^9=\begin{bmatrix}a_1&a_3&a_2\\b_1&b_3&b_2\\18a_1+c_1&18a_3+c_3&18a_2+c_2\end{bmatrix}.$$

(2) 应填 $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$.

因为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}$ 可换, 故 $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$, 于是有 $\begin{bmatrix}x_1+x_3&x_2+x_4\\x_3&x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1&x_1+x_2\\x_3&x_3+x_4\end{bmatrix}$, 根据两个矩阵相等的定义得

$$x_1+x_3=x_1,\quad x_2+x_4=x_1+x_2,\quad x_3=x_3,\quad x_4=x_3+x_4.$$

再根据已知条件, 解得 $x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=0,\ x_4=1$, 于是 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$.

(3) 应填 $\begin{bmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

记 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}^3=\cdots=\boldsymbol{B}^n=\boldsymbol{O}$,

$$A^n=(E+B)^n=E+nB+\frac{1}{2}n(n-1)B^2+\cdots+B^n$$
$$=E+nB=\begin{bmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

【例 2】 选择题.

(1) 下列命题正确的是 ( ).

(A) 若 $A^2=O$, 则 $A=O$;

(B) 若 $AB=AC$, 则 $B=C$;

(C) 若 A 为对称矩阵, 则 A^2 也为对称矩阵;

(D) 对任意两个同阶方阵 A 和 B, 则有 $AB=BA$.

(2) 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&3\\1&0&-1\\0&1&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&1&3\\1&2&5\end{bmatrix}$, $P_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$, 则有 ( ).

(A) $B=AP_1P_2$; (B) $B=AP_2P_1$;

(C) $B=P_1P_2A$; (D) $B=P_2P_1A$.

(3) 设 A 为 n 阶对称矩阵, B 为 n 阶反称矩阵, 则下列矩阵中为反称矩阵的是 ( ).

(A) $AB-BA$; (B) $AB+BA$; (C) $(AB)^2$; (D) BAB.

(4) 设 A, B 为同阶方阵, 则必有 ( ).

(A) $(A+B)^{\mathrm T}=A^{\mathrm T}+B^{\mathrm T}$;

(B) $(AB)^{\mathrm T}=A^{\mathrm T}B^{\mathrm T}$;

(C) $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$;

(D) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

(5) 设 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}a_{14}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{44}&a_{43}&a_{42}&a_{41}\end{bmatrix}$,

$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则矩阵 B 等于 (   ).

(A) AP_1P_2; (B) P_1AP_2; (C) P_1P_2A; (D) P_2AP_1.

解 (1) 应选 (C).

因为当 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 时, $A^2 = O$, 所以选项 (A) 是错误的. 当 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 时, $AB = AC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 但 $B \neq C$, 所以 (B) 也是错误的. 对上述 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 显然, $AB \neq BA$, 即 (D) 是错误的. 故选 (C).

(2) 应选 (C).

注意到 B 的第 1 行与 A 的第 2 行相同, B 的第 2 行与 A 的第 1 行相同, B 的第 3 行等于 A 的第 1 行与第 3 行相加. 由初等变换可知, B 是 A 经过初等行变换得到的, 因此 $B = P_1P_2A$. 故选 (C).

(3) 应选 (B).

因为 $(AB + BA)^{\mathrm{T}} = (AB)^{\mathrm{T}} + (BA)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} + A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} = -BA + A(-B) = -(BA + AB) = -(AB + BA)$, 故选 (B).

(4) 应选 (A). 因为 $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$, 所以 (B) 是错误的. 又

$$(A + B)(A - B) = A^2 + BA - AB - B^2,$$

BA 与 AB 未必相等, 选项 (C) 是错误的. 同理, (D) 也是错误的, 故选 (A).

(5) 应选 (A).

因为 B 是 A 经两次初等列变换得到的, 先交换 A 的 1, 4 两列, 再交换 2, 3 两列, 即 $B = AP_1P_2$, 所以选 (A), 其他选项都不正确.

【例 3】 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & -4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

求 AB, BC, AC, CA.