自学輔导丛书

学几何的鑰匙（初中組）

上海市中学教师进修学院科普工作組

上海科学普及出版社

內 容 提 要

初学几何学的人，在学习过程中，往往感覚理
何学的知識为什么要分成定义、公理、定理呢？
明？怎样証明？什么是点的軌迹？它有什么作用？
作图？本書力求淺显地来解决这些疑問，可以帮助
开几何学的大門。

本書是再版，其中很大部分（3—6四章）已由
者和各方面的意見，进行改写，补充了很多例题。
本閱讀。

总号：039
自学几何的
組　稿：
著　者：
封面設計：
出 版 者：
上海市书
发 行 者：
印 刷 者：
开本：787×1092
字数：87,000
印数：122,001—
1958年5月第二

目　录

第一章 緒 論

一、基本概念

几何学是研究物体的形狀、大小和相互位置的科学 一塊橡皮，一枝鉛笔，一張紙，一只汽油筒，一塊石头……这些都是物体。我們留心观察每一个物体时，首先注意到的就是物体的外形和性质。我們常常用長的、短的、方的、圓的、粗的、細的、大的、小的……这些話来描述一个物体的外形；常常用輕的、重的、白的、黑的、香的、臭的、軟的、硬的……这些話来描述一个物体的性質。物体与物体之間所以有区别就因为它們在外形上和性質上不同。我們依靠我們的眼睛、鼻子……等来覺察物体的外形和性質，然后区别出各个不同的物体。人人都有这种区别物体的本領。小学生在观察了两个球之后，能很快告訴你：这个球小一些，它很重、很硬，大概是鉄的；那个球大一些，很輕、很光滑、彈性大，一定是橡皮的。

每一个物体在空間都占有一定的位置。我們常常問同学："橡皮在那里？""籃球在那里？"同学的回答可能是："橡皮在桌子上"，"籃球在桌底下"。这样的回答就确定了橡皮和籃球

的位置。确定一个物体的位置，必須先找另外一个物体作标准。“茶杯在茶壶的左边”，就是用茶壶作标准来确定茶杯的位置。“我們的游艇在万寿山的南边”，就用万寿山作标准来确定我們游艇的位置。但是反过来也可以說：“茶壶在茶杯的右边”，“万寿山在我們游艇的北边”。这样我們分别用茶杯、游艇确定了茶壶、万寿山的位置。由此可知：确定物体甲的位置，先要找一个物体乙作标准，也可以用物体甲作标准来确定物体乙的位置。因此物体的位置是相互地确定的。当然某些物体不頂适宜做确定其它物体的标准。象“桌子在橡皮下面”，“桌子在籃球上面”。这两句話，意义并不錯，但是有些好笑。

研究物体性質的任务主要由物理学負担。至于研究物体的外形和相互位置的任务由几何学負担。因此几何学是研究物体的形狀、大小和相互位置的科学。

从物体抽象而来的几何图形 上面說过几何学不研究物体的性質。这一点十分重要。在桌上我們放了一个鉄球、一个皮球、一个木球、一个水晶球。这四个球各有各的性質，象鉄球重、皮球有彈性、木球輕、水晶球透明等等。我們对这些各别的性質一概不管，只研究这四个球的共同的外形。从它們的共同的外形上我們得到了球体的形象——也就是球的几何图形。一般講，我們在想象中把各个物体的共同的（也是几何学中認为最重要的）外形和这些物体的各别的性質分离开来。这样做就叫“抽象”。从各个不同的物体中我們抽出它們共同的外形。这些共同外形的形象就是几何图形。球就是一种几何图形。在几何学中講到球，我們不必問，其实也无法問这是水晶球还是橡皮球。

几何图形的基本元素：體、面、綫、点 上面講明了，几何学不研究个别的物体，和物体的性质，只研究从物体抽象而来的几何图形。几何图形形形色色种类很多，但是構成几何图形的基本元素只有四个，它們是：体、面、綫、点。这四种元素是几何图形的基础。它們也是从具体物体中抽象得来的：

(1) **體** 一切物体，不管它什么顏色、多少重量、是什么物質構成的，都有一定的外形和占有一部分的空間。我們只研究一个物体的形狀大小和它所占据的一部分空間时，我們就把这物体叫做几何体——或簡称体。凡是形狀大小完全一样但位置不同的两个几何体称为相等的几何体。同样大小的木球、鉄球、雪球、皮球对几何学者講是一样的，因为他只注意它們相同的外形、和它們所占据同样大小的一部分空間。換句話說，他注意到的是一个几何体——球体。

(2) **面** 桌面、玻璃窗面、鷄蛋壳都給我們一种面的印象。但是几何学里所講的面，在我們的想象中，脫离物体而单独存在的。它只有長短和寬狹而沒有厚薄。盆里的水和空气分界的地方就是一个面。皮球和它外面的空气分界的地方也是一个面。前者是一个平坦的面——平面，后者是一个弯曲的面——球面。面是物体的界限，所以任何物体都是用它的面来和鄰接的其他物体分开的。在玻璃杯里先放半杯水，再放半杯油。油和水分界地方的面是非常显明的。

(3) **綫** 蜘蛛的絲，縫衣的綫，紙張的边，給我們一种綫的印象。几何学里所講的綫，在我們的想象中，脫离物体而单独存在。我們想象当中的綫，它沒有厚薄，沒有寬狹，只有長短。如果我們用一張紙对折一次，在折縫两边分別塗上不同的

顏色，那末这两种顏色的分界的地方，可以作为理想的綫的例子。綫有曲有直。象蚊烟香給我們曲綫的形象，剃刀口給我們直綫的形象。我們在学习几何学的过程中，用鉛笔或鋼笔在紙上画綫，事实上已經有了粗細。但是为了帮助我們研究問題，对用鉛笔或鋼笔在紙上画出的綫，要想象它們是沒有粗細的理想的綫。

(4) 点 夜間天空里閃爍的星、空中飞揚的灰尘、綫的尽头、針的尖头，都給我們一种点的印象。几何学里所講的点，是在我們的想象中，脫离物体单独存在的，它沒有長短，沒有寬狹，沒有厚薄，点只有位置。我們在学习几何学的过程中，往往用鉛笔或鋼笔在紙上点上一些点子，这样的点子，事实上已經有了長和寬了。但是在研究問題时，我們只注意它的位置。

几何图形的四种元素——体、面、綫、点——之間有两种相互关系。**一种叫做相交關系**。我們說如果两个几何图形有公共部分的，那么这两个图形叫做相交的图形。水裝在杯子里，水和杯子是两个鄰接的体，它們的公共部分是水和杯子的分界面，这个面旣屬于水，又屬于杯子。地板和墙壁相交，地板和墙壁是两个面，它們的公共部分是一条綫，这条綫旣屬于地板，又屬于墙壁。漁网有很多絲，每两条絲是两条綫，它們的公共部分是点，因此一个漁网有很多的点。从这些例子，我們可以作出这样的結論：两个鄰接的体的相交是面，面与面相交得綫，綫与綫相交得点。

第二种叫运动關系。象用点燃的香头在黑暗中急速运动就看見一条火綫，用拉紧的綫在豆腐里可割出一个面来，銅币在桌子上急速旋轉时看起来好象球体，这些說明了点运动可能得

到綫，綫运动可能得到面，面运动可能得到体。几何图形的相交关系和运动关系都說明了几何元素，体、面、綫、点不是相互独立存在的。

上面說明了几何学所研究的几何图形是从物体中抽象得来的，几何图形的基本元素——体、面、綫、点也是从物体抽象而来。下面我們再研究几何图形的最基本的几个性质。

(1) 自然界中有些物体，从一个位置移动到另一个位置，它的形狀就要改变，象水从瓶里倒在杯里，形狀就不同了；冰塊移到火爐旁，立刻熔化变成了水，体积就縮小了。这些变化都是由于物体的物理性质。但几何图形是从物体抽象而来，在我們的想象中，几何图形是离开了物体的一切物理性質而单独存在的。因此我們可以进一步想象，几何图形无論怎样在空間移动，它的形狀、大小还是和原来的一样。几何图形的这个性質是十分重要的。在后面，我們常常移动一个几何图形把它疊合在另一个图形上，或者移动一个图形把它拼凑在另一个图形上。图形經过疊合、拼凑后，它的形狀、大小都是沒有改变的。这里我們附帶提一提，移动一个几何图形，把它疊合在另一几何图形上，如果这两个图形的各部分能完全重合，这两个几何图形叫做全等形。

平面几何学只研究同一平面上的几何图形。在平面几何学里主要研究的几何图形是直綫和圓。因此我們这里先提出平面和直綫的几个性质来。

(2) 什么叫做直綫呢？在几何学里是用下面的事实来說明这个問題的。这就是：經过任意的两个点，可以引一条直綫，并且只能引一条直綫。由直綫的这一性质，我們可以判断，如

果两条直綫有两个公共的点，那末这两条直綫相重合，变成一条直綫了。我們可以利用直綫的这一个性質，来檢查一根普通的尺是否是直的。我們在紙上任意画两个点，用这一根尺的不同部分画連結这两个点的直綫，如果这些綫中有不重合的，那末，这尺就不直。

(3) 什么叫做平面呢？在几何学里，用直綫的性質来說明平面的性質，来檢驗平面。我們說，平面有一个性質：如果用一条直綫連接平面內的任意两个点，那末这条直綫上的所有的点都在这个平面內。从平面的这一个性質，我們还可以断定，如果两个平面有两个公共的点，那末这两个平面相交于一条直綫，或者完全重合变成一个平面。如果把平面的一部分放到另一部分上去，那末我們一定可以使它們重合，即使在放上去以前，把那一部分預先翻轉，結果也还是重合的。我們还可以利用平面的这一个性質来檢查一个面是否是平面。我們用一根經过校正过的正确的直尺的边，放到我們准备檢驗的那个面上，如果这根尺的边放在任何的位置，边上所有的点都落在这个面上，我們就知道这是一个平面。木工、鉄工檢查木板、鉄板是否是平面，經常运用这个办法的。

直綫可以向两个方向无限制的延長，平面也可以无限制的向四面八方伸展开去，这是几何学里的直綫和平面的另一个重要性質，我們不詳述了。

这里提出了三个性質：(1) 几何图形可以在空間移动，它的形狀和大小不改变；(2) 經过两个点可以引一条并且只能引一条直綫；(3) 如果用一条直綫連接平面內的任意两个点，那末这条直綫上的所有的点都在这个平面內。这三个性質是几何

图形的最重要最基本的性質。我們要求学者特别注意。

二、簡单的几何图形

上一节，我們講过了体、面、綫、点是几何图形的基本元素，几何图形就是由体、面、綫、点四者組合而成的，也可以說几何图形是体、面、綫、点四者的集合。在平面几何学中，几何图形只有点和綫两个元素，而且綫只有两种，一种是直綫，一种是圓。在同一平面內，点、直綫或直綫的部分、圓或圓的部分，可以搭配成千千万万的不同的几何图形。在这些图形中，有的很簡单，有的很复杂。当然我們从簡单的图形学起。我們先学习下面的几种簡单的图形：(1) 直綫、射綫和綫段，(2)圓和弧，(3)角。

直綫、射綫和綫段 前面我們已經知道什么是直綫，并且知道直綫可以向两个方向无限地延長的。如果在一条直綫上有一个点，那末这个点把全直綫分做两部分，这两部分分别在这个点的两旁。这里的每一部分也是一个几何图形，这样的几何图形称做射綫。划分直綫成为两条射綫的这个点称做射綫的端点。

如果在一条直綫上有两个点，这两点間的一段直綫，几何学上叫做綫段。这两个点叫做綫段的端点。

直綫、射綫、綫段都可以用鉛笔的尖端依靠直尺在紙上画出来。

在同一个几何图形里，我們有时候会遇到許多的直綫射綫和綫段在一起。为了区别它們，用大写或小写的拉丁字母来表示。直綫用两个大写的拉丁字母来表示，例如："直綫 AB"或

“直綫BA”(图1)，也可以用一个小写字母来表示，例如：“直綫 a”(图2)。

图 2

射綫用两个大写字母表示，表示它的端点的一个字母写在前面，表示射綫上的另外任何一个点的字母写在后面。例如：“射綫 OC”(图3)。

图 3

綫段用两个大写的字母来表示。例如“綫段 DE”或“綫段 ED”(图4)。也可以用一个小写字母来表示，例如“綫段 b”(图5)。

图 4

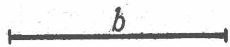

图 5

在几何学里，我們把两点之間的綫段，作为这两点之間的距离。

关于怎样量綫段的長短的問題，在高中平面几何里另有詳細的研究。这里我們暫且用有刻度的尺来量度。并且把量得的結果用一个数目来表示。象 3.5 尺、4.8 厘米等（当然是近似的）。

直綫、綫段、射綫有一个明显的区别，就是直綫沒有界限的；射綫的一端有界限，另一端沒有界限；而綫段的两端都是有界限的。由于这个緣故，直綫和射綫的長度是无法測定，只

有綫段，才能用有刻度的尺来测定它的長短。

綫段、射綫都是直綫的一个部分。利用直尺可以把射綫向相反的一个方向延長，或者把綫段向两个方向任意的延長出去，延長的部分称为原射綫或原綫段的延長綫。

綫段的加減 綫段是一个几何图形，又是一个可以测量它的長短的几何图形。也就是說綫段是一种“量”，量就有大小可以比較，也可以进行加減。綫段当然也可以比較它們的太小，也可以进行加減。

把綫段 AB 放到綫段CD上，使点 A 和点 C 重合，并且使綫段AB沿着綫段 CD 落下，如果点 B 和点 D 也重合（图6），

图 6

我們說綫段 AB 和綫段 CD 相等，并用式子写成：

$$AB = CD \text{ 或者 } CD = AB$$

如果点B 和点 D 不重合，那末綫段 AB 和綫段 CD 不相等。如果点B 落在C、D 两点的中間（图 7），綫段AB就比綫段CD短，

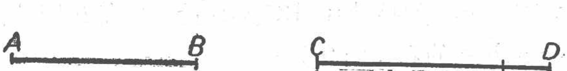

图 7

用式子表示是：

$$AB < CD \text{ 或者 } CD > AB$$

如果 B 落在綫段CD的延長綫上（图 8），綫段AB就比綫段 CD 長，用式子表示是：

图 8

$$AB>CD \text{ 或者 } CD<AB$$

上面比較两綫段的相等或不相等时，我們都是將一綫段移到另一綫段上。为什么能够將图形移动呢？这是因为几何图形有“在空間移动不改变形狀和大小”的性質。但是实际上我們使用直尺以外的另一个工具——圓規——来达到移动一条綫段的目的。

先把圓規的两个脚尖分开，使它分别落在我們需要移动的那个綫段的两个端点上，然后使圓規的两个脚尖保持这个距离，把圓規移动，就可以在另外的任意的直綫上，画出与原綫段有同样長短的（相等的）綫段，也就是达到了移动原綫段的目的。以后，我們称这样的手續为“在一直綫上截取一条綫段等于另一已知綫段”。

利用圓規截取綫段，可以进行綫段加減的运算。例如有綫段 a、b 和 c 。我們可以在另一直綫 l 上，依次截取 $AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，如果 AB，BC，CD 的方向都相同，綫段 AD 就是綫段 a、b、c 的和（图 9）。

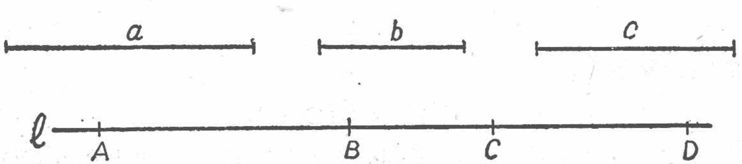

图 9

如果有綫段 a 和 b，而且 a>b。我們在另一直綫 l 上，依次截取 AB=a，BC=b，不过 C 落在 AB 之間。我們說綫段 AC 是綫段 a 与 c 之差（图10）。

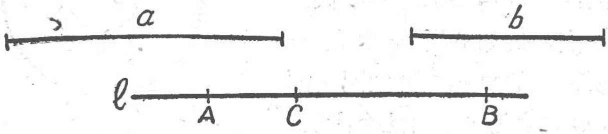

图 10

在图 9 中，如果 a=b=c，那末 AB=BC=CD，則 AD=3AB=3a，我們說綫段 AD 是綫段 a 的三倍。

关于求綫段的和、差、一个綫段的若干倍，除掉上面所講的方法外，还可以用有刻度的尺寸来进行。不过，用有刻度的尺不如用圓規来得准确簡捷。

至于把一条已知綫段分成若干等分的运算，目前我們还只能用有刻度的尺来进行。例如求綫段 AB 的三分之一，就是先用有刻度的尺量度綫段 AB 的長短，用一个数来記录量度的結果（象 5.4 厘米）然后把这个数除以 3，得到一个商数（象 $5.4 \div 3 = 1.8$ 厘米）。再用尺在綫段 AB 上量出一条与这个商数相适应的綫段。这条綫段就是 $\frac{1}{3}$AB 了。

上面的关于綫段的和、差、倍、分的运算，与算术中关于数的計算有些相似，不过，在几何学中的关于綫段的运算，主要是使用圓規（有时用有刻度的尺）来进行的。

圓和弧 在我們生活中，圓形的物体是很多的。几何图形中的圓，也是从具体中抽象来的。为了确切地說明圓的基本性質，我們依据点运动成綫的理由，規定圓是一个点在平面上运

动所画出的綫，这个运动的点在运动时始終与另一个固定的点保持一个固定的距离。或者說，当射綫OA繞着它的端点旋轉一周的时候，射綫上一点，例如A所画出的一条綫或所留下的痕迹，叫做圓（图11）。点O叫做圓心。由这个說明，可見圓上所有的点到圓心的距离都等于这个固定的距离OA，連接圓心和圓上任何一点的綫段叫做半徑。这样我們立刻知道在同一个圓上的半徑都是相等的。如果有两个圓，它們的半徑相等，我們可以移动一个圓，使它的圓心与另一个圓的圓心相重合，这样，两个圓上所有的点都完全重合。半徑相等的两个圓叫做等圓。这里我們可以想到，圓心决定圓的位置，而半徑决定圓的大小。半徑不相同的两圓是不等的圓。半徑相同、圓心不同的两个圓是等圓。半徑和圓心都相同的是同圓（重合的两个圓）。

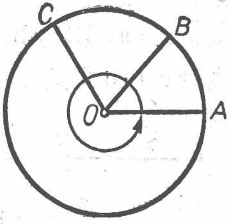

图 11

为了研究圓的性质，除了圓心和半徑以外，我們还要熟悉下列六个与圓有关的名詞。

（1）过圓上任意两点的直綫叫割綫，如图12中的直綫MN。

（2）連結圓上任意两点的綫段叫弦，如图12中的綫段EF（注意弦是割綫的圓内部分）。

（3）通过圓心的弦叫直徑，如图12中的綫段AD。容易明白，直徑

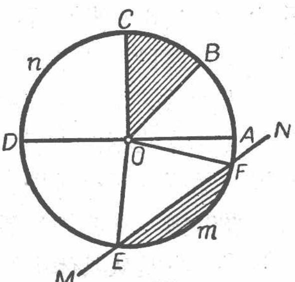

图 12

是半徑的二倍，并且直徑是弦，弦不一定是直徑。

(4) 圓上任意两点間的部分叫弧，如图 12 中的 EmF 及 CnD。表示圓弧的符号是⌒，象 $\overset{\frown}{EmF}$。事实上，圓上任意两点把圓分成两个部分，每一部分都叫做弧。这两条弧合起来，組成一个圓。把弧的两个端点連接的綫段，叫做这条弧所对的弦，而这条弧叫做这条弦所对的弧。

(5) 一条弧和过这弧的两个端点的两条半徑所組成的图形叫做扇形（如图12中的 $\overset{\frown}{BC}$ 和半徑 OB，OC 所組成的图形）。这个图形好象一把扇子張开时的边緣。

(6) 一条弧和这弧所对的弦所組成的图形叫做弓形（如图12中的 $\overset{\frown}{EmF}$ 及弦 EF 所組成的图形）。弓形好象一把弓，它是由弓背和弓弦二者所組成的。

上面六个图形都是与圓有关的，其中，圓和弧都是曲綫，半徑、直徑、弦都是綫段，割綫是直綫，扇形和弓形都是綫段和曲綫二者組合而成的图形。

关于圓、圓周、圓面积三个名称，它們的意义是有区别的。圓是一条曲綫，或者是一个几何图形。圓周指这个曲綫的長短，它是一个量。而圓面积指这个曲綫所包圍的平面部分的大小；实际上，也是一个量。

圓弧的加減 弧是圓的一部分，綫段是直綫的一部分。綫段可以比較加減，弧也可以比較加減，但是弧与綫段毕竟有区别的。經过两个点能够画一条直綫，也只能画一条直綫。如果两个点被固定了，那末用这两点为端点的綫段，便完全确定。它的長短也跟着确定了。但是圓或弧的情形，有些不相同。經通两点，不仅能画一个圓，而是可以画很多的圓。如果有两个

点被固定了，用这两点为端点的弧，就有无数个。关于这一点，請你自己用圓規驗証它。

我們要比較两条弧的相等和不相等，这两条弧必須是同一个圓的，或者相等的两个圓的。因为半徑不相同的两条弧，我們无法移动它們，使它們互相重合的而进行比較。关于这一点讀者可以在两張薄紙上，分别用不同長短的半徑各画一段弧，然后重叠起来，透着光亮看过去就明白了。

在同一个圓或相等的圓中，比較弧的相等（能重合）或是不相等的方法和綫段的情况有些类似。例如，把圓O（图13）中的$\overset{\frown}{AmB}$放到$\overset{\frown}{CnD}$上，使A和C重合，并且使$\overset{\frown}{AmB}$順着$\overset{\frown}{CnD}$落下。如果B和D重合，那末$\overset{\frown}{AmB}=\overset{\frown}{CnD}$，如果B落在$\overset{\frown}{CnD}$內，那末$\overset{\frown}{AmB}<\overset{\frown}{CnD}$，如果B落在$\overset{\frown}{CnD}$外，那末$\overset{\frown}{AmB}>\overset{\frown}{CnD}$。

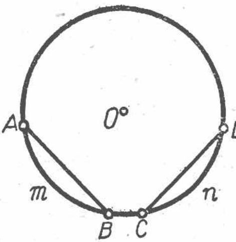

图 13

在同圓或等圓中，弧的比較也可用圓規来进行。因为在同圓或等圓中，两条弦如果相等，这相等的两条弦及它們分别所对的弧所組成的两个弓形能够互相重合。这样在同圓或等圓中，相等的弦所对的弧也相等。我們用圓規在同圓或等圓上截出一条弦等于一条已知弦，同时也完成了截取等弧的任务。

和綫段的加減相同，在同圓或等圓上順着同方向依次用圓規截取两条弧，各等于已知的两条弧，那末起点与終点（方向同前）間的一段弧，便是已知两弧的和。若前后方向相反，則起点与終点的一段弧为已知两弧的差。