

“十一五”国家重点图书出版规划项目
中国数学教育研究丛书

张奠宙
总主编

数学方法论的

理论与实践

SHUXUE FANGFALUN DE LILUN YU SHIJIAN

● 郑毓信 著 ●
广西教育出版社

“十一五”国家重点图书出版规划项目
中国数学教育研究丛书

张奠宙 总主编



SHUXUE FANGFALUN DE LILUN YU SHIJIAN

数学方法论的 理论与实践

● 郑毓信 著 ●



广西教育出版社



图书在版编目 (C I P) 数据

数学方法论的理论与实践 / 郑毓信著. — 南宁:
广西教育出版社, 2010. 1

(中国数学教育研究丛书 / 张奠宙主编)

ISBN 978-7-5435-5757-4

I. ①数… II. ①郑… III. ①数学方法—方法论—研究 IV. ①01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 008973 号

总 策 划: 黄力平	责任编辑: 黄力平
特约编辑: 陆 阳	责任校对: 何 云
装帧设计: 梁伟琪	

出版人: 李小勇

出版发行: 广西教育出版社

地址: 南宁市鲤湾路 8 号 邮政编码: 530022

电话: 0771-5865797

本社网址: <http://www.gxeph.com>

电子信箱: book@gxeph.com

印刷: 广西新华印刷厂

开本: 635mm×965mm 1/16

印张: 16.5 字数: 264 千字

版次: 2009 年 12 月第 1 版

印次: 2009 年 12 月第 1 次印刷

书号: ISBN 978-7-5435-5757-4

定价: 39.00 元

如发现印装质量问题, 影响阅读, 请与出版社联系调换。



中国数学教育研究丛书





试当头,摧残学生。一句话,必须彻底转变观念,改变学生的学习方式。对于中国的教育传统的继承,止于《学记》经典、孔子教育思想及书院模式。对于中国当代的数学教育,则没有任何肯定。他们认为,如果说中国学生的基础好,输在后面没有创新,那么更应该说,没有创新的基础,就是输在了起跑线上。

另一种态度是认为中国的教育有积极的因素,应该挖掘。这种观点常常以“中国教育悖论”的形式出现。例如,“中国学生何以比西方学生在学习成绩上好许多,但是他们的教和学看上去是如此的死记硬背?”^①他们在实践上肯定中国学生的学习成绩,但是西方的许多正确教育理论不能解释,于是产生困惑,需要研究。这是国外一部分客观公正的教育家的观点,具有积极的意义。

第三种态度,就是本丛书所采取的态度:基本肯定,需要改革。中国是一个有几千年文明历史的国家,具有灿烂的中华文化。教育是一种文化现象,其中积淀着许多文化的因子。例如鼓励教学相长,重视坚实基础,提倡启发诱导,相信熟能生巧,主张精讲多练,采用变式演练,等等。对这些深藏于中华文化中的教育因子,我们只能采取基本肯定的态度,继承发扬它的积极因素,使之熠熠发光。与此同时,防止它的异化,避免造成负面影响。

文化是不能废除和选择的。费孝通先生说过,各个国家对文化的态度应当是“各美其美,美人之美,美美与共,天下大同”。教育上的观念,也应遵循这样的规律。

另一个不容忽视的事实是,1949年以来的中国数学教育,是许多前辈学者、几代教师苦心孤诣建设起来的,他们为国家的兴旺发达、经济起飞、教育普及作出了巨大的贡献,岂可一笔抹杀?数学教育中的“双基”教学、启发式讲解、三大能力的培养、师生讨论的模式、数学解题的教学等,都是能够闪光的金子。当然,我们也清醒地看到,中国数学教育有着明显的弊病。对于前面提到的中国数学教育的种种缺陷,我们同样感到痛心疾首,主张坚决革除。任何时候,任何国家都在根据自己的国情进行改革。我们只不过根据历史经验,主张避免“矫枉

^①D. Watkins, J. Biggs. The Chinese Learner: Cultural, Psychological and Contextual Influences. Hong Kong: CERC&ACER, 1996.



过正”而已。

晚近以来,我们学习了许多国外的优秀经验,特别是初步把握了比较科学的研究方法,注重调查实证,开始运用心理学的最新成果进行分析。这就是说,已经有初步的条件把我国已有的教学经验上升为理论。

综上所述,我们觉得应该集中大家的力量,开始营建具有中国特色的数学教育体系了。于是,这套《中国数学教育研究丛书》的编写就提上了议事日程。广西教育出版社将它列入“十一五”国家重点图书出版规划项目上报,终获中华人民共和国新闻出版总署批准。

丛书的出版,得到数学教育同行的积极响应。我们欢迎一切数学教育研究成果参与丛书的出版。除研究质量的普遍要求之外,附加的

前 言

“讲座让人有年年岁岁花相似,岁岁年年花不同之感。”这是一位素不相识的教师新近听了我的一次讲演后以短信形式发出的短评。

我喜欢“年年岁岁花相似,岁岁年年花不同”这样一个比喻,因为它很好地反映了我在同一地点作了多次讲演以后的一个真实心态:即使在场的听众先前都没有听过我的讲演,我仍然希望年年有进步,年年都能提供更多新的内容和思想,而非千年不变、老生常谈,从而,“岁岁年年花不同”就是我的一个追求;但我同时又希望每一次讲演都能集中反映自己在这些年中的主要收获,从而就能使在场教师有更多收获或启示,再加上每个人都有自己较为固定的风格与思维习惯,这样,一个讲座似乎也就不可避免地会给人“年年岁岁花相似”的感觉。

新研究进展.例如,书中关于“‘问题解决’的现代研究”的处理,即是将相关内容分成“‘问题解决’(1980—1989)”与“‘问题解决’(1990—2008)”这样两个部分,就最为清楚地表明了这一著作的这样一个特点;第二,相对于先前而言,这一著作也表现出了更大的反思性:笔者不仅努力采取“反思性实践”这样一个立场,也明确提出了由“数学地思维”转向“通过数学学会思维”的主张,这事实上也就表明了反思工作的深度;第三,更加注意与实际数学教学活动的联系,特别是,这就是笔者何以同时引进“问题式思维”与“概念性思维”这样两个论题的重要原因.

进而,这也正是自己经由这些年的实践所逐步形成的一个信念,即随着数学教育的发展与社会的整体性进步,数学方法论作为数学思维的研究必将获得人们越来越多的重视,也必然会对数学教育乃至更多的方面产生更为积极的作用,而这事实上也就是数学方法论研究不断深化的过程,即是真正做到了“年年岁岁花相似,岁岁年年花不同”.

由于本书以广大数学教师,特别是中小学数学教师作为主要读者,因此,自己就愿意以这样一个感受作为“前言”部分的结束:“年年岁岁花相似,岁岁年年花不同”也可被看成对于长期奋战在教学一线的中小学教师的一个真实写照.是啊,年年岁岁上同样的内容,这难道不是一种简单的重复劳动吗?但是,这又正是教学工作创造性质的具体表现:广大教师正是通过积极实践、认真总结与自觉反思,不断取得新的进步,从而真正做到了“岁岁年年花不同”,更何况适当的变化显然也是时代与环境的进步、总体性教育思想的演变以及学生实际情况变化的必然要求.

“年年岁岁花相似,岁岁年年花不同!”愿我们大家都能沿着这样一个方向积极努力,一步一个脚印地走向前方!

最后,衷心感谢我的导师徐利治先生一贯给予的关心与支持,谨以此书祝贺他的九十寿辰!

郑毓信

2009年8月于南京大学



MULU

目录

总序/一

前言/一

第一章 数学方法论研究的兴起/一

第一节 波利亚与“问题解决”/一

一 数学启发法的“现代复兴”/一

二 波利亚的数学启发法/四

三 国际上关于解题策略的若干研究/一七

第二节 中国的数学方法论研究/二六

一 数学方法论研究在中国的兴起/二六

二 中国数学方法论研究的若干主要成果/三四

第二章 “问题解决”的现代研究/六三

第一节 “问题解决”(1980—1989)/六四

一 曲折的前进/六四

二 对于波利亚的“超越”/六八

三 总结与反思/八五

第二节 “问题解决”(1990—2008)/九四

一 作为数学教育有机组成部分的“问题解决”
/九四

二 “问题解决”与“决策研究”/九八

三 回顾与启示/一〇六

第三节 “问题提出”与数学教育/一一〇

一 提出问题的策略/一一〇

二 作为数学教育有机组成部分的“问题提出”
/一一八

第三章 概念性思维的现代研究/一二八

第一节 代数思维的现代研究/一二八

- 一 “凝聚”:代数思维的一个基本形式/一二八
- 二 代数思维的多样性与灵活性/一四〇

第二节 几何思维的现代研究/一四五

- 一 几何抽象的基本形式/一四五
- 二 几何思维的发展/一五一
- 三 逻辑思维与形象思维/一五九

第三节 走向“高层次数学思维”/一六四

- 一 数学的形式方面/一六四
- 二 数学的非形式方面/一七〇
- 三 数学思维的基本性质/一八六

第四章 从理论到实践/一九四

第一节 数学方法论与数学教学/一九四

- 一 几种不同的课程设计方法/一九五
- 二 数学方法论指导下的数学教学:实践与思考
/二〇六

第二节 走向“反思性实践”/二三三

- 一 “实践性智慧”与必要的反思/二三三
- 二 由“数学地思维”到“通过数学学会思维”
/二四〇

第一章

数学方法论研究的兴起

数学方法论,笼统地说,是对于数学思维方法的专门研究.从历史的角度看,这是由中国学者专门引入的一个术语,中国学者并在这一领域中作出了不少具有开拓意义的工作;但是,这又是这方面的一个基本事实:正是国际著名数学家、数学教育家波利亚关于“问题解决”的研究,为中国学者在这一方面的工作奠定了直接基础,并在很大程度上决定了数学方法论研究的性质与主要方向.正因为此,波利亚的相关工作就应被看成数学方法论研究的实际开端.在这一章中,我们将首先对波利亚关于“问题解决”的研究作出概述,包括国际上在这一方面的若干后继工作;其次将对中国的数学方法论研究作出简要介绍.由此我们就从总体上了解这一领域在 20 世纪 80 年代以前的发展情况.

第一节 波利亚与“问题解决”



一 数学启发法的“现代复兴”

波利亚关于“问题解决”的研究主要集中于 20

世纪 40~60 年代,其主要内容则是所谓的“数学启发法”或“解题策略”.以人类历史上曾出现过的对于“万能方法”的寻求为背景去进行分析,我们就可清楚地认识到波利亚在这一方面工作的奠基性质,也就是说,正是波利亚关于“数学启发法”的研究,为现代关于数学思维的研究指明了努力的方向.

具体地说,在人类文明(更为确切地说,即是西方文明)的发展进程中,曾有过这样一个时期,其间人们曾希望能够找到这样一种方法,用之即可有效地解决一切问题,或有效地从事发明与创造.例如,法国著名哲学家、解析几何的创建者笛卡儿就曾设计过这样一种普遍的解题模式:第一,把任何问题转化为数学问题;第二,把任何数学问题转化为代数问题;第三,把任何代数问题归结为方程式来求解.但是,正如根本不存在可以把万物点化为黄金的“哲人之石”一样,能有效解决一切问题或从事发明创造的“万能方法”也是不存在的,从而,所有这些追求“万能方法”的努力就都没有能够逃脱失败的厄运.

就思维研究而言,所说的失败还导致了另外一种极端的立场:人们曾一度由热衷于追求“万能方法”转而采取完全的取消主义,即是认为发明创造的问题应当被看成完全属于心理学的研究范围,对此我们不需要,也不可能作出任何理性的分析,从而也就根本不存在任何真正意义上的“发明创造的方法”.例如,正是基于后一种认识,20 世纪 50 年代前在西方学术界中曾长期占据主导地位的逻辑实证主义就突出强调了“发现”与“检验”的区分,并认为这两者应当被看成分别属于心理学与哲学(方法论)的研究范围——显然,按照这样的立场,严格意义上的方法论研究也就被完全取消了.

正是在上述的严峻形势下,波利亚自觉地承担起了“复兴”方法论研究的重任.波利亚在这一方面的基本立场是:能够“指引人们去解答所有可能的数学问题的……放之四海皆准的发明创造规则……并不存在”;但是,“各种各样的规则还是有的,诸如行为准则、格言、指南,等等.这些都还是有用的”.特别是,我们可以通过对于解题活动尤其是已有成功实践的深入分析总结出一般性的思维方法或模式,这对于今后的解题活动就可起到一定的启发和指导作用,这也就是所谓的

“(数学)启发法。”^①

由以下的分析我们可以更为清楚地认识到现代方法论研究的启发性质：

第一，尽管方法论的研究必须立足于真实思维活动的考察，但这并非纯粹的描述性工作，因为，其主要目的是通过实例的考察引出普遍性的思维方法或模式。也正因为此，与心理学不同，在方法论的研究中人们通常并不十分关心相关的实例是否如实地反映了历史的本来面貌，毋宁说，我们在此所见到的常常是历史事实的一种“理性重建”，即希望通过方法论的“重建”，能使相应的思维活动成为“可以理解的”、“可以学到手的”、“能够加以推广应用的”。

第二，作为问题的另一方面，我们又应清楚地看到，数学方法论中所给出的各种思维方法或模式并非必须严格遵循的法则或规范；恰恰相反，就其本来的意义而言，“启发法”就是指“有助于发现的”，因此，如果解题者对于如何求解所面临的问题有着明确的想法，就完全可以按照自己的想法去行事，而不用顾及任何方法论的建议。

综上所述，波利亚所倡导的“数学启发法”事实上就是在规范性研究与描述性研究的两极对立之间开拓了第三种可能性，并在很大程度上决定了现代方法论研究的基本性质：这主要是一种启发性的研究，也即主要着眼于对于新的研究工作具有启示与指导意义的思维方法或模式。

波利亚曾突出地强调了启发法研究的普遍意义。

第一，波利亚指出：“解题是智力的特殊成就，而智力乃是人类的天赋，正是绕过障碍，在眼前无捷径的情况下迂回的能力使聪明的动物高出愚笨的动物，使人高出最聪明的动物，并使聪明的人高出愚笨的人。”^②又“解题是人类的本性。我们可以把人类定义为‘解题的动物’；他的生活充满了不可立即实现的目标。我们大部分的有意识思维是与解题相关的；当我们并未沉溺于娱乐或白日做梦时，我们的思想

① 波利亚. 怎样解题[M]. 北京: 科学出版社, 1982: 171.

② Polya G. On Solving Mathematical Problem in High School // Problem Solving in School Mathematics, NCTM, 1980 Year book.

有着明确的目标。”^①

第二,波利亚突出地强调了“数学启发法”的普遍性和常识性。例如,数学启发法的用途“不限于任何题目。我们的问题可以是代数的或几何的,数学的或非数学的,理论的或实际的”;又,这里提出的方法“对于那些认真对待其问题并有某些常识的人来说是很自然的”^②。从而,这也就从另一角度更为清楚地表明了数学启发法研究的普遍意义。

二 波利亚的数学启发法

波利亚指出,数学启发法的主要部分是一些“定型的”问题和建议,对此可联系“问题解决”的各个步骤——“弄清问题”、“拟定计划”、“实现计划”和“回顾”——作出概括和论述。这就是所谓的“怎样解题表”。波利亚还指出,这些问题的建议“经过了仔细的挑选和安排”,其目的就是希望能引发有用的智力活动,也即产生有助于问题解决的“好念头”。

以下就是波利亚所给出的“怎样解题表”:

弄清问题

未知数是什么? 已知数是什么? 条件是什么?
满足条件是否可能? 要确定未知数,条件是否充分?
或者它是否不充分? 或者是多余的? 或者是矛盾的?

第一,你必须
弄清问题。

画张图,引入适当的符号。

把条件的各个部分分开,你能否把它们写下来?

拟定计划

你以前见过它吗? 你是否见过相同的问题而形式稍有不同?

你是否知道与此有关的问题? 你是否知道一个

① 波利亚. 怎样解题[M]. 北京:科学出版社,1982:221—222.

② 波利亚. 怎样解题[M]. 北京:科学出版社,1982:2—3.

可能用得上的定理？

看着未知数！试想出一个具有相同未知数或相似未知数的熟悉的问题。

这里有一个与你现在的问题有关，且早已解决的问题，你能不能利用它？你能利用它的结果吗？你能利用它的方法吗？为了能利用它，你是否应该引入某些辅助元素？

你能不能重新叙述这个问题？你能不能用不同的方法重新叙述它？

回到定义去。

如果你不能解决所提出的问题，可先解决一个与此有关的问题。你能不能想出一个更容易着手的有关问题。一个更普遍的问题？一个更特殊的问题？一个类比的问题？你能否解决这个问题的一部分？仅仅保持条件的一部分而舍去其余部分，这样对于未知数能确定到什么程度？它会怎样变化？你能不能从已知数导出某些有用的东西？你能不能想出适于确定未知数的其他数据？如果需要的话，你能不能改变未知数或数据，或者二者都改变，以使新未知数和新数据彼此更接近？

你是否利用了所有的已知数？你是否利用了整个条件？你是否考虑了包含在问题中的所有必要的概念？

实现计划

实现你的求解计划，检验每一步骤。

你能否清楚地看出这一步骤是正确的？你能否证明这一步骤是正确的？

回 顾

你能否检验这个论证？你能否用别的方法导出这个结果？你能不能一下子看出它来？

你能不能把这个结果或方法用于其他的问题？

容易看出，尽管表中所提出的各个问题和建议是按照“弄清问

第二，找出已知数与未知数之间的联系。

如果找不出直接的联系，你可能不得不考虑辅助问题。

你应该最终得出一个求解的计划。

第三，实行你的计划。

第四，验算所得到的结果。

题”、“拟定计划”、“实现计划”与“回顾”这样四个步骤循序安排的,但它们并不能被看成具有同样的重要性.

具体地说,这正是波利亚的一个看法,即认为在这四个阶段中“实现计划”是较为容易的:“我们所需要的只是耐心”;另外,“弄清问题”则可被看成成功解决问题的必要前提;再则,就实际的解题活动而言,“回顾”是最容易被忽视的一个环节;最后,相对而言,“拟定计划”才是真正的关键所在,即是直接关系到能否引发所谓的“好念头”,从而成功解决所面临的问题.波利亚写道:“了解问题是为好念头的出现作准备;制订计划是试图引发它;在引发以后,我们实现它;回顾此过程和求解的结果,我们是试图更好地利用它.”^①从而,总的来说,数学启发法的研究主要就是围绕“拟定计划”这一阶段展开的.

波利亚指出,表中所列举的问题和建议是“按照其发生的可能性大小排列的”.就“拟定计划”这一阶段而言,就是指,我们应当首先寻找已知数与未知数之间的直接联系,从而达到解决问题的目的;其次,如果找不出这种联系的话,就不得不对原来的问题作出一定的变化或修改,也即应当考虑相应的辅助问题.

例如,由于“一个好念头的基础是过去的经验和已有的知识……如以前解决的问题,以前证明过的定理.因此,以下列问题开始工作常常是合适的:你是否知道与此有关的问题?以及你是否知道一个可能用得上的定理?”

当然,在大多数情况下,会有很多问题与我们现在手上的问题有关,因此,就实际的解题活动而言,这就是一个真正的难点,即是如何能够从所有这些相关问题中挑出一个或几个确实有用的问题?以下就是相关的建议:“看着未知数!试想出一个具有相同未知数或相似未知数的熟悉的问题.”

波利亚指出:“如果我们成功地回想起一个与当前问题密切相关的早已解决的问题,那是很幸运的.我们应当争取这样的运气.”当然,解题活动的成功又不应单纯指望所谓的“运气”,而应是一种高度自觉的行为,也正因为如此,相关的“回忆或搜索”就应始终集中于这样一

① 波利亚.怎样解题[M].北京:科学出版社,1982:159.

个问题：“它有什么用？”以下则是一个具体建议：“这里有一个与你现在的问题有关，且早已解决的问题，你能不能利用它？”“你能利用它的结果吗？你能利用它的方法吗？……”

应当指明，上述的建议与问题十分清楚地表明了“辅助问题”的性质和作用。这也正如波利亚所指出的，“所谓辅助问题是这样一个问题，我们考虑它并非为了它本身，而是因为我们希望通过它帮助我们去解决另一个问题，即我们原来的问题”^①。另外，辅助问题的作用是多方面的：它既可能提供内容方面的帮助，也可在方法论方面给人一定的启示，如“激起有用的联想”，等等。

就辅助问题的引入而言，我们可区分出两种不同的情况：一是以已解决的问题作为出发点，并希望能由此而获得有用的信息或启示；二是以所需解决的问题作为出发点，并希望通过对此作出改变从而最终达到解决问题的目的。容易看出，上面所提及的问题和建议主要都是针对第一种情况作出的。与此相对照，以下的问题和建议则就更加适用于后一种情况：“如果你不能解决所提出的问题，可先解决一个与此有关的问题。你能不能想出一个更容易着手的有关问题？一个更普遍的问题？一个更特殊的问题？一个类比的问题？你能否解决这个问题的一部分？仅仅保持条件的一部分而舍去其余部分，这样对于未知数能确定到什么程度？它会怎样变化？你能不能从已知数导出某些有用的东西？你能不能想出适于确定未知数的其他数据？如果需要的话，你能不能改变未知数或数据，或者二者都改变，以使新未知数和新数据彼此更接近？”

一般地说，后者并可被看成“数学启发法”或解题策略的主要内容。这也正如波利亚所指出的：“存在着某些变化问题的模式，它们是典型有用的，例如‘回到定义去’，‘分解与重新组合’，‘引入辅助元素’，‘普遍化’，‘特殊化’，以及利用‘类比’。”^②以下就通过一些实例对此作出具体介绍。

① 波利亚. 怎样解题[M]. 北京: 科学出版社, 1982: 51.

② 波利亚. 怎样解题[M]. 北京: 科学出版社, 1982: 213.