国家哲学社会科学成果文库
NATIONAL ACHIEVEMENTS LIBRARY
OF PHILOSOPHY AND SOCIAL SCIENCES

集合论含有原子的自然模型和布尔值模型

李娜 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

国家哲学社会科学成果文库
NATIONAL ACHIEVEMENTS LIBRARY
OF PHILOSOPHY AND SOCIAL SCIENCES

集合论含有原子的自然模型和布尔值模型

李娜 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

集合论含有原子的自然模型和布尔值模型／李娜著．—北京：北京师范大学出版社，2011.3

ISBN 978-7-303-12169-4

Ⅰ．①集… Ⅱ．①李… Ⅲ．①布尔代数－模型 Ⅳ．①O153.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 028741 号

营销中心电话 010-58802181 58808006
北师大出版社高等教育分社网 http://gaojiao.bnup.com.cn
电子信箱 beishida168@126.com

JI HE LUN HAN YOU YUAN ZI DE ZI RAN MO XING HE BU ER ZHI MO XING

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875

印　　刷：北京盛通印刷股份有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170 mm × 240 mm
印　　张：13
插　　页：3
字　　数：185 千字
版　　次：2011 年 3 月第 1 版
印　　次：2011 年 3 月第 1 次印刷
定　　价：35.00 元

策划编辑：饶　涛　　责任编辑：岳昌庆　郭佳宏
美术编辑：毛　佳　　装帧设计：肖　辉
责任校对：李　菡　　责任印制：李　啸

序

《集合论含有原子的自然模型和布尔值模型》一书是我承担的 2006 年度国家社会科学基金项目《无穷长语言的模型及可满足问题研究》(项目批准号：04BZX047)的最终成果．项目结项后，根据鉴定该项目的专家意见，我对其进行了适当的修改，并将此书命名为《集合论含有原子的自然模型和布尔值模型》．下面就该项目研究的目的、意义及研究的方法，该研究成果的主要内容和重要观点、学术创新，它的应用价值以及社会影响和效益简单介绍如下．

一、研究的目的、意义及研究的方法

ZFC 是集合论的形式化公理系统，它的形式语言为 $L_{ZF}=\{\in\}$．而该语言中的合式公式是依形成规则构造出来的符号串．符号串的变形规则是由一阶谓词逻辑的公理和 ZFC 的公理以及推理规则确定的．这些都是语法的，没有意义．现在我们要对这些语法结构给出一些有意义的解释，这些解释在逻辑上叫语义解释．这也就是人们要寻找各种有具体语义的数学结构 $M=\langle A,\in\rangle$来解释 ZFC 或者其他的集合论的形式化公理系统的目的．

在 20 世纪 20 年代和 30 年代中，A. A. Fraenkel 和 A. Mostowski 等人为研究选择公理的独立性，给出了刻画原子和集合的集合论公理系统 ZFA 或者 ZFCA(这里 ZFA＝ZF＋A 并且 ZFCA＝ZFC＋A，公理 A 表示存在原子的集合)，并构建了模型$\wp_\infty(A)$或$\wp^\infty(A)$(这里 A 表示原子的集合，参见 Thomas Jech，Set Theory. Springer-Verlag，2002，pp250)，利用这个模型还证明了选择公理 AC 相对于 ZFA 的独立性(参见赵希顺：《选择公理》，人民出版社，

2003，第 135 页）. 1980 年 M. P. Fourman 构造了含有原子的集合 A 的模型 V(A)，并在海廷的直觉主义谓词演算系统 HQC 的基础上，证明了 V(A)是含有原子的集合论系统 ZFA 的模型（参见 Michael P. Fouramn，Sheaf Models For Set Theory. Jounrnal of Pure and Applied Algebra，19(1980) 91—101). 在这之后，1989 年 A. Blass 和 A. Scedrov 在一阶谓词演算的基础上，用类似于 M. P. Fourman 的方法，也构造了含有原子的模型 V(A)（参见 A. Blass 和 A. Scedrov，Fryed's models for the independence of the axiom of choice，Memoirs of the American Mathematical Society，1989，Vol 79，Number 404）并证明了 V(A)是 ZF 的模型. 我们称 V(A)为含有原子和集合的公理系统 ZFA 的自然模型. 我在 A. Blass 和 A. Scedrov 的含有原子和集合的自然模型 V(A)的基础上，为刻画集合和类的公理系统 GB(Gödel—Bernays)、刻画集合、类和聚合的公理系统 COG（李娜：《聚合公理系统 COG 的布尔值模型》，《河南大学学报（自然科学版）》1993，第 2 期，第 39—42 页）以及刻画集合、类、聚合和聚合类（范畴）的公理系统 ACG（张锦文：《聚合、序量与基量》，《数学学报》，1986，第 2 期，第 217—223 页）分别建立含有原子的自然模型 Σ(A)，Λ(A)和Ω(A)，并讨论了它们的一些基本性质（见第三章）；还在 A. Blass 和 A. Scedrov 的含有原子和集合的布尔值模型V^B(A)的基础上，为刻画集合和类的公理系统 GB，刻画集合、类和聚合的公理系统 COG 以及刻画集合、类、聚合和聚合类（范畴）的公理系统 ACG 分别建立了含有原子的布尔值模型Δ^B(A)，Λ^B(A)和Ω^B(A)（这里 B 是一个完全的布尔代数），并讨论了它们的一些基本性质（见第五章).

为集合论的公理系统建立模型，一直是公理集合论研究中的一个重要问题. 1990 年，我本人在集合论的公理系统 ZFC 的布尔值模型 V^B (Dana S. Scott，A proof of the independence of the continuum hypothesis，Math. Syst. Theory 1(1967)，89—111)的基础上为能够刻画集合和类的公理系统 GB 建立了布尔值模型Δ^B（参见李娜：《GB 的布尔值模型》，《科学通报》，1990，第 1 期. 第 35 卷，第 16—18 页）并且在这之后还分别为刻画集合、类和聚合的公理系统 COG 建立了布尔值模型Λ^B（参见李娜：《聚合公理系统 COG 的布尔值模型》，《河南大学学报（自然科学版）》1993，第 2 期，第 39—42 页）以及为刻画集合、类、聚合和聚合类（范畴）的公理系统 ACG 建立了布

尔值模型Ω^B(参见李娜:《The Boolean-Valued Model of the Conglonerate Axiom System ACG》,《数学季刊》,1993,第1期,第81—87页).

另外,我们的文章"On the Consistency of the System Implication System S3"(参见李娜,等:《南京大学学报(数学半年刊)》,2005年5月,Vol. 22. No. 1被美国《数学评论》收录),用布尔值模型V^B证明了Lewis的严格蕴涵系统S3的协调性. 为完整起见,我将这篇文章放在附录里.

因此,本研究不仅是我以前工作的继续,而且从理论上丰富了数理逻辑的重要分支——公理集合论的刻画集论模型的理论,为现代逻辑的研究提供证明工具,促进了数理逻辑的发展. 另一方面,也促进了数理逻辑与哲学逻辑之间的相互渗透、相互融合. 因此,这些工作有可能是在最基础的层面上促进逻辑学、数学和哲学的发展. 与此同时,这些工作对于我国这样一个对逻辑研究还比较薄弱的状况来说,无疑具有十分积极的意义.

对于集合论的公理系统ZFC来说,自然模型V、可构成模型L和布尔值模型V^B(这里的B是一个完全的布尔代数)是它的三大模型(关于ZFC的可构成模型L将另文讨论),而且整个20世纪公理集合论的工作几乎都依赖于ZFC. 所构造的模型几乎都依赖于自然模型V、可构成模型L和布尔值模型V^B(这里的B是一个完全的布尔代数). 由于构造它们的出发点都是从空集∅开始的,模型V和V^B(这里的B是一个完全的布尔代数)的构成都是采用累积层次的方法. 为了能解决更多的问题,本文从含有原子的集合A开始,在模型V(A)和$V^B(A)$的基础上,仍然采用累积层次的方法构造一类含有原子的自然模型和布尔值模型.

二、主要内容　重要观点　学术创新

该成果主要建立了含有原子的公理集合论系统的两大类模型——自然模型和布尔值模型.

1. 在A. Blass和A. Scedrov1989年的含有原子和集合的公理系统ZFA(ZFA=ZF+A,这里公理A表示存在原子的集合)的自然模型V(A)(这里A表示原子的集合)的基础上,分别为刻画集合和类的公理系统GB、刻画集合、类和聚合的公理系统COG(参见李娜:《聚合公理系统COG的布尔值模型》,

《河南大学学报(自然科学版)》1993，第2期，第39—42页)以及刻画集合、类、聚合和聚合类(范畴)的公理系统ACG(张锦文:《聚合、序量与基量》,《数学学报》,1986，第2期，第217—223页)分别建立了含有原子的自然模型$\Sigma(A)$，$\Lambda(A)$和$\Omega(A)$. 即：

第一，在集合论的公理系统ZFA的自然模型V(A)的基础上，定义了含有原子和集合的真类，并构造了如下的模型$\Sigma(A)$：

$V_0(A)=A$；

$V_{\alpha+1}(A)=A\cup\wp(V_\alpha(A))$；

$V_\alpha(A)=\bigcup\{V_\beta(A):\beta<\alpha\}$，如果$\alpha$是一个极限序数；

$V(A)=\bigcup\{V_\alpha(A):\alpha\in On\}$；

$\Sigma(A)=\{C:C\subseteq V(A)\wedge\forall x\in V(A)(x\cap C\in V(A))\}$.

证明了：$\Sigma(A)$是集合论的公理系统GBA(GBA=GB+A，这里公理A表示存在原子的集合)的自然模型.

第二，在集合论的公理系统GBA的自然模型$\Sigma(A)$的基础上，讨论了$\Sigma(A)$的一些基本性质，并构造了如下的模型$\Lambda(A)$：

$V_{On}(A)=\Sigma(A)$；

$V_{\alpha_2+1}(A)=\wp(V_{\alpha_2}(A))$；

$V_{\alpha_2}(A)=\bigcup\{V_{\beta_2}(A):\beta_2<\alpha_2\}$，如果$\alpha_2$是一个二型的极限序数；

$\Lambda(A)=\bigcup\{V_{\alpha_2}(A):\alpha_2\in On_2\}$.

证明了：$\Lambda(A)$是集合论的公理系统COGA(COGA=COG+A，这里公理A表示存在原子的集合)的自然模型.

第三，在集合论的公理系统COGA的自然模型$\Lambda(A)$的基础上，定义了含有原子、集合和聚合的聚合类，并构造了如下的模型$\Omega(A)$：

$V_{On}(A)=\Sigma(A)$；

$V_{\alpha_2+1}(A)=\wp(V_{\alpha_2}(A))$；

$V_{\alpha_2}(A)=\bigcup\{V_{\beta_2}(A):\beta_2<\alpha_2\}$，如果$\alpha_2$是一个二型的极限序数；

$\Lambda(A)=\bigcup\{V_{\alpha_2}(A):\alpha_2\in On_2\}$.

$\Omega(A)=\{\mathbf{X}:\mathbf{X}\subseteq\Lambda(A)\wedge\forall X\in\Lambda(A)(\mathbf{X}\cap X\in\Lambda(A))\}$.

证明了：$\Omega(A)$是集合论的公理系统ACGA(ACGA=ACG+A，这里公理A表示存在原子的集合)的自然模型.

2. 在 A. Blass 和 A. Scedrov1989 年给出的含有原子和集合的公理系统 ZFA (ZFA＝ZF＋A，这里公理 A 表示存在原子的集合)的布尔值模型 $V^B(A)$(B 是一个完全的布尔代数)的基础上，分别为刻画集合和类的公理系统 GB、刻画集合、类和聚合的公理系统 COG 以及刻画集合、类、聚合和聚合类(范畴)的公理系统 ACG 建立了含有原子的布尔值模型$\Delta^B(A)$，$\Lambda^B(A)$和$\Omega^B(A)$.

由于 1989 年 A. Blass 和 A. Scedrov 给出的含有原子和集合的布尔值模型 $V^B(A)$(B 是一个完全的布尔代数)不是在 1967 年 Scott 给出的集合论的公理系统 ZF 的布尔值模型 V^B(这里 B 是一个完全的布尔代数)上的直接扩张，而是将 V^B中的元素——布尔值函数推广到了关系上．即：

$x\in V^B(A)$，当且仅当，x 是一个原子或者 x 是一个关系并且 $\mathrm{dom}(x)\subseteq V^B$并且 $\mathrm{ran}(x)\subseteq B-\{0\}$.

然而，

$x\in V^B$，当且仅当，x 是一个函数并且 $\mathrm{dom}(x)\subseteq V^B_\alpha$ 并且 $\mathrm{ran}(x)\subseteq B-\{0\}$.

显然，$V^B\subseteq V^B(A)$. 因此，布尔值模型 V^B和 $V^B(A)$(这里 B 是一个完全的布尔代数)不同．在此基础上分别得到的：布尔值模型Δ^B和$\Delta^B(A)$、布尔值模型Λ^B和$\Lambda^B(A)$以及布尔值模型Ω^B和$\Omega^B(A)$也都是不相同的．因此，本项目完成了：

第一，在集合论的公理系统 ZFA 的布尔值模型 $V^B(A)$的基础上，定义了含有原子和集合的布尔关系类 B(C)，并构造了如下的模型$\Delta^B(A)$：

$V_0^B(A)=A$；

$V_\alpha^B(A)=\bigcup\{V_\beta^B(A):\beta<\alpha\}$，如果 α 是极限序数；

$V_{\alpha+1}^B(A)=\{x$：x 是一个原子或者 x 是一个关系并且 $\mathrm{dom}(x)\subseteq V_\alpha^B$ 并且 $\mathrm{ran}(x)\subseteq B-\{0\}\}$

$=A\cup\{x$：x 是一个关系并且 $\mathrm{dom}(x)\subseteq V_\alpha^B$ 并且 $\mathrm{ran}(x)\subseteq B-\{0\}\}$；

$V^B(A)=\bigcup\{V_\alpha^B(A):\alpha\in On\}$.

$\Delta^B(A)=_{df}\{C\subseteq V^B(A):B(C)\}$.

我们将 L_{GBA}公式 φ 的布尔值定义为：

(1)如果 φ 是原子公式，则 φ 的布尔值定义如下：

①如果 φ 是含有＝的原子公式，则 φ 的布尔值定义为：

$\| X=Y \| =1$，当且仅当，X 和 Y 是相同的原子或相同的集合或相同的真类；

$\| X=Y \| =0$，当且仅当，X 和 Y 是不同的原子或者一个是原子另一个是集合或者一个是原子另一个是真类；

$\| X=Y \| = \prod_{\langle z,b\rangle \in X} (b \Rightarrow \| z\in Y \|) \cdot \prod_{\langle z,b\rangle \in Y} (b \Rightarrow \| z\in X \|)$，当且仅当，$X$ 和 Y 都是集合；

$\| X=Y \| = \| \forall t(t\in X \leftrightarrow t\in Y) \|$，当且仅当，$X$ 是集合并且 Y 是真类或者 X 和 Y 都是真类.

②如果 φ 是含有 $\in$ 的原子公式，则 φ 的布尔值定义如下：

$\| X\in Y \| =0$，当且仅当，Y 是原子或者 X 和 Y 是真类或者 X 是真类而 Y 是集合；

$\| X\in Y \| = \sum_{\langle z,b\rangle \in Y} (b \cdot \| X=z \|)$，当且仅当，$X$ 是原子并且 Y 是集合或者 X 和 Y 都是集合，这里 $b=\sup\{b'$：$\langle z, b'\rangle \in y \wedge b'\in B\}$；

$\| X\in Y \| =0$，当且仅当，X 是原子并且 Y 是真类；

$\| X\in Y \| = \sum_{w\in Y} \| X=w \|$，当且仅当，$X$ 是集合并且 Y 是真类.

③如果 φ 是原子公式 $\varepsilon(x)$ 和 $\mu(X)$，则 φ 的布尔值分别定义如下：

$\|\varepsilon(x)\| = \|x = x\|$；

$\|\mu(X)\| =1$.

(2)如果 φ 是否定式或合取式，则 φ 的布尔值如下：

$\|\neg \psi\| = - \|\psi\|$；

$\|\psi \wedge \chi\| = \|\psi\| \cdot \|\chi\|$.

(3)如果 φ 形如 $\exists X\varphi(X)$ 或者 $\forall X\varphi(X)$ 时，则

①当 X 为原子 a 时，则 $\|\exists a\varphi(a)\| = \sum_{a\in \Delta^B(A)} \|\varphi(a)\| = \sum_{a\in A} \|\varphi(a)\|$ 并且 $\|\forall a\varphi(a)\| = \prod_{a\in \Delta^B(A)} \|\varphi(a)\| = \prod_{a\in A} \|\varphi(a)\|$；

②当 X 为集合 x 时，则 $\|\exists x\varphi(x)\| = \sum_{x\in \Delta^B(A)} \|\varphi(x)\| = \sum_{x\in V^B(A)} \|\varphi(x)\|$ 并且 $\|\forall x\varphi(x)\| = \prod_{x\in \Delta^B(A)} \|\varphi(x)\| = \prod_{x\in V^B(A)} \|\varphi(x)\|$；

③当 X 为真类时，则 $\|\exists X\varphi(X)\| = \sum_{X\in\Delta^{B}(A)} \|\varphi(X)\|$

并且 $\|\forall X\varphi(X)\| = \prod_{X\in\Delta^{B}(A)} \|\varphi(X)\|$.

证明了：$\Delta^{B}(A)$是集合论的公理系统 GBA(GBA＝GB＋A，这里公理 A 表示存在原子的集合)的布尔值模型.

第二，在集合论的公理系统 GBA 的布尔值模型$\Delta^{B}(A)$的基础上，讨论了$\Delta^{B}(A)$的一些基本性质，并构造了如下的模型$\Lambda^{B}(A)$：

$V^{B}_{\mathrm{On}}(A) = \Delta^{B}(A)$；

$V^{B}_{\alpha_2}(A) = \bigcup\{V^{B}_{\beta_2}(A) : \beta_2 < \alpha_2\}$，如果 α_2 是一个二型的极限序数；

$V^{B}_{\alpha_2+1}(A) = \{x_2 : x_2$ 是一个二型关系 $\wedge\ \mathrm{dom}(x_2) \subseteq V^{B}_{\alpha_2}(A) \wedge \mathrm{ran}(x_2) \subseteq B-\{0\}\}$；

$\Lambda^{B}(A) = \bigcup\{V^{B}_{\alpha_2}(A) : \alpha_2 \in \mathrm{On}_2\}$.

我们将 L_{CCGA} 公式 φ 的布尔值定义为：

(1)如果 φ 是原子公式，则 φ 是在 L_{GBA} 的原子公式的基础上增加如下形式的公式：

$a \in D, x \in D, X \in D, D_m \in D_n, x = D, X = D, D_m = D_n, \mathrm{Cog}(X)$.

如果 φ 是 L_{GBA} 的原子公式，那么 φ 的布尔值同前；其余公式的布尔值定义如下：

$$\|\mathrm{Cog}(X)\| = 1;$$

$$\|a \in D\| = \sum_{D_1\in\mathrm{dom}(D)} (\|a = D_1\| \cdot D(D_1));$$

$$\|x \in D\| = \sum_{D_1\in\mathrm{dom}(D)} (\|x = D_1\| \cdot D(D_1));$$

$$\|X \in D\| = \sum_{D_1\in\mathrm{dom}(D)} (\|X = D_1\| \cdot D(D_1));$$

$$\|D_m \in D_n\| = \sum_{D\in\mathrm{dom}(D_n)} (\|D_m = D\| \cdot D_n(D));$$

$$\|x = D\| = \|\forall t(t \in x \leftrightarrow t \in D)\|;$$

$$\|X = D\| = \|\forall t(t \in X \leftrightarrow t \in D)\|;$$

$$\|D_m = D_n\| = \|\forall D(D \in D_m \leftrightarrow D \in D_n)\|.$$

(2)如果 φ 是否定式或合取式，则 φ 的布尔值如下：

$$\|\neg\psi\| = -\|\psi\|;$$

$\|\psi \wedge \chi\| = \|\psi\| \cdot \|\chi\|$.

(3)如果 φ 是形如 $\exists D\varphi(D)$ 或 $\forall D\varphi(D)$ 时，则

$$\|\exists D\varphi(D)\| = \sum_{D \in \Lambda^B(A)} \|\varphi(D)\|;$$

$$\|\forall D\varphi(D)\| = \prod_{D \in \Lambda^B(A)} \|\varphi(D)\|.$$

由此定义和 L_{GBA} 公式的布尔值的定义可得：

$$\|\exists a\varphi(a)\| = \sum_{a \in \Lambda^B(A)} \|\varphi(a)\| = \sum_{a \in A} \|\varphi(a)\|;$$

$$\|\exists x\varphi(x)\| = \sum_{x \in \Lambda^B(A)} \|\varphi(x)\| = \sum_{x \in V^B(A)} \|\varphi(x)\|;$$

$$\|\exists X\varphi(X)\| = \sum_{X \in \Lambda^B(A)} \|\varphi(X)\| = \sum_{X \in \Delta^B(A)} \|\varphi(X)\|;$$

$$\|\forall a\varphi(a)\| = \prod_{a \in \Lambda^B(A)} \|\varphi(a)\| = \prod_{a \in A} \|\varphi(a)\|;$$

$$\|\forall x\varphi(x)\| = \prod_{x \in \Lambda^B(A)} \|\varphi(x)\| = \prod_{x \in V^B(A)} \|\varphi(x)\|;$$

$$\|\forall X\varphi(X)\| = \prod_{X \in \Lambda^B(A)} \|\varphi(X)\| = \prod_{X \in \Delta^B(A)} \|\varphi(X)\|.$$

证明了：$\Lambda^B(A)$是集合论的公理系统 COGA(COGA= COG+A，这里公理 A 表示存在原子的集合)的布尔值模型.

第三，在集合论的公理系统 COGA 的布尔值模型$\Lambda^B(A)$的基础上，定义了含有原子、集合和聚合的布尔聚合类 $B(U)$，并构造了如下的模型$\Omega^B(A)$：

$V^B_{On}(A) = \Delta^B(A)$；

$V^B_{\alpha_2}(A) = \bigcup\{V^B_{\beta_2}(A) : \beta_2 < \alpha_2\}$，如果 α_2 是一个二型的极限序数；

$V^B_{\alpha_2+1}(A) = \{x_2 : x_2$ 是一个二型关系 $\wedge\ \mathrm{dom}(x_2) \subseteq V^B_{\alpha_2}(A) \wedge \mathrm{ran}(x_2) \subseteq B-\{0\}\}$；

$\Lambda^B(A) = \bigcup\{V^B_{\alpha_2}(A) : \alpha_2 \in On_2\}$.

$\Omega^B(A) =_{df} \{U \subseteq \Lambda^B(A) : B(U)\}$.

我们将 L_{ACGA} 公式 φ 的布尔值定义为：

(1)如果 φ 是原子公式，则 φ 是在 L_{COGA} 的原子公式的基础上增加如下形式的公式：

$a \in U, x \in U, X \in U, D \in U, x = U, X = U, D = U, U_m = U_n, \mathrm{Scl}(D)$.

如果 φ 是 L_{COGA} 的原子公式，那么 φ 的布尔值同前；其余公式的布尔值定义如下：

$$\|\mathrm{Scl}(D)\| = \|D = D\|;$$

$$\|a \in U\| = \sum_{D \in U} \|a = D\|;$$

$$\|x \in U\| = \sum_{D \in U} \|x = D\|;$$

$$\|X \in U\| = \sum_{D \in U} (\|X = D\|);$$

$$\|D \in U\| = \sum_{D' \in U} (\|D = D'\|);$$

$$\|x = U\| = \|\forall t(t \in x \leftrightarrow t \in U)\|;$$

$$\|X = U\| = \|\forall t(t \in X \leftrightarrow t \in U)\|;$$

$$\|D = U\| = \|\forall D_1(D_1 \in D \leftrightarrow D_1 \in U)\|;$$

$$\|U_m = U_n\| = \|\forall D(D \in U_m \leftrightarrow D \in U_n)\|.$$

(2)如果 φ 是否定式或合取式，则 φ 的布尔值如下：

$$\|\neg \psi\| = -\|\psi\|;$$

$$\|\psi \wedge \chi\| = \|\psi\| \cdot \|\chi\|.$$

(3)如果 φ 是形如 $\exists U\varphi(U)$ 或 $\forall U\varphi(U)$ 时，则

$$\|\exists U\varphi(U)\| = \sum_{U \in \Omega^B(A)} \|\varphi(U)\|;$$

$$\|\forall U\varphi(U)\| = \prod_{U \in \Omega^B(A)} \|\varphi(U)\|.$$

特别地，

$$\|\exists a\varphi(a)\| = \sum_{a \in \Omega^B(A)} \|\varphi(a)\| = \sum_{a \in A} \|\varphi(a)\|;$$

$$\|\forall a\varphi(a)\| = \prod_{a \in \Omega^B(A)} \|\varphi(a)\| = \prod_{a \in A} \|\varphi(a)\|;$$

$$\|\exists x\varphi(x)\| = \sum_{x \in \Omega^B(A)} \|\varphi(x)\| = \sum_{x \in V^B(A)} \|\varphi(x)\|;$$

$$\|\forall x\varphi(x)\| = \prod_{x \in \Omega^B(A)} \|\varphi(x)\| = \prod_{x \in V^B(A)} \|\varphi(x)\|;$$

$$\|\exists X\varphi(X)\| = \sum_{X \in \Omega^B(A)} \|\varphi(X)\| = \sum_{X \in \Delta^B(A)} \|\varphi(X)\|;$$

$$\|\forall X\varphi(X)\| = \prod_{X \in \Omega^B(A)} \|\varphi(X)\| = \prod_{X \in \Delta^B(A)} \|\varphi(X)\|;$$

$$\|\exists D\varphi(D)\| = \sum_{D \in \Omega^B(A)} \|\varphi(D)\| = \sum_{D \in \Lambda^B(A)} \|\varphi(D)\|;$$

$$\|\forall D\varphi(D)\| = \prod_{D \in \Omega^B(A)} \|\varphi(D)\| = \prod_{D \in \Lambda^B(A)} \|\varphi(D)\|.$$

证明了：$\Omega^B(A)$是集合论的公理系统 ACGA(ACGA＝ACG＋A，这里公理 A 表示存在原子的集合)的布尔值模型.

另外，在第五章第 1 节中，还给出了

定义 6 令 u 是一个二元关系，如果 $x \in \mathrm{dom}(u)$，定义

$$u(x) =_{df} \sup \{b : \langle x,b \rangle \in u \wedge b \in B\}.$$

因为 B 是一个完全的布尔代数，所以，$\sup \{b : \langle x,b \rangle \in u \wedge b \in B\}$ 存在. 因此，我们能将 $\sup \{b : \langle x,b \rangle \in u \wedge b \in B\}$ 定义为 $u(x)$. 于是，尽管 u 是一个二元关系，但是由定义 6，在布尔值模型 $V^B(A)$，$\Delta^B(A)$，$\Lambda^B(A)$和$\Omega^B(A)$中仍然可以使用符号 $u(x)$.

本项目还用布尔值模型方法证明了模态逻辑中严格蕴涵系统 S3 的协调性(即：李娜等：《On the Consistency of the System Implication System S3》，《南京大学学报(数学半年刊)》，2005 年 5 月，Vol. 22. No. 1 被美国《数学评论》收录).

在阅读本书时需要注意："如果 x，$y \in \mathbf{V(A)}$，那么……"表示"如果 $x \in \mathbf{V(A)}$，$y \in \mathbf{V(A)}$，那么……". 其他类似的表示含义也相同.

三、应用价值　社会影响和效益

1. 进一步完善逻辑理论

(1)含有原子的公理系统 ZFA，GBA，COGA 和 ACGA 都是集合论的形式化公理系统. 其中 ZFA 的语言 L_{ZFA} 为在 L_{ZF} 的基础上增加一个常项 A 得到的语言，其中常项 A 用来解释一个原子的集合. 而 GBA 的语言 L_{GBA} 是在 ZFA 的语言 L_{ZFA} 上的扩张，COGA 的语言 L_{COGA} 是在 GBA 的语言 L_{GBA} 上的扩张，ACGA 的语言 L_{ACGA} 是在 COGA 的语言 L_{COGA} 上的扩张. 然而，它们中的合式公式都是依形成规则构造出来的符号串. 符号串的变形规则是由一阶谓词逻辑的公理和 ZFA，GBA，COGA 和 ACGA 的公理以及推理规则确定的. 这些都是语法的，没有意义. 现在我们从语法的结构回到语义解释中来，并为这些形式系统构造出了两类具有具体语义的数学结构——自然模型和布尔值模型来解释集合论的公理系统 ZFA，GBA，COGA 和 ACGA. 这些工作是对数理逻辑中公理集合论模型理论的进一步完善.

(2)由于哲学逻辑是一大类重要的非经典逻辑，所以我们关于模态逻辑的严格蕴涵系统 S3 的协调性研究本身是对非经典逻辑理论的一种进一步完善.

2. 促进逻辑学各分支理论的融合

在对模态逻辑的严格蕴涵系统 S3 协调性的研究中，我们使用的模型——布尔值模型 V^B(B 是一个完全的布尔代数)，源于模型论，后被移植于公理集合论的研究，现在又被用于哲学逻辑或非经典逻辑的研究. 这促进了逻辑学各分支理论相互渗透和相互融合，并可能是在最基础的层面上，促进逻辑学、数学和哲学的发展.

3. 为哲学和数学应用逻辑提供工具

由于逻辑方法是推理的重要的形式工具. 因此，非经典逻辑和非经典推理在哲学理论中，有着广泛的应用. 对模态逻辑系统协调性的探讨，这一结果虽然不能直接应用于实际，但却为描述和模拟人类思维提供指导，为哲学应用逻辑提供更可靠的工具.

总之，以上这些研究成果，都将对逻辑学研究的多元化起到积极的促进作用.

目 录

CONTENTS