灰色缓冲算子理论及其应用

吴正朋　周宗福　刘思峰　著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

灰色缓冲算子理论及其应用

◉ 吴正朋 周宗福 刘思峰 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

灰色缓冲算子理论及其应用/吴正朋等著. —合肥：
安徽大学出版社，2010.8
ISBN 978-7-81110-826-2

Ⅰ.①灰… Ⅱ.①吴… Ⅲ.①算子—研究 Ⅳ.①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 164864 号

灰色缓冲算子理论及其应用 吴正朋 周宗福 刘思峰 著

出版发行：北京师范大学出版集团
安 徽 大 学 出 版 社
(安徽省合肥市肥西路 3 号 邮编 230039)
www.bnupg.com.cn
www.ahupress.com.cn
印 刷：中国科学技术大学印刷厂
经 销：全国新华书店
开 本：169mm×228mm
印 张：7.75
字 数：139 千字
版 次：2010 年 9 月第 1 版
印 次：2010 年 9 月第 1 次印刷
定 价：18.00 元
ISBN 978-7-81110-826-2

责任编辑：赵小文 **装帧设计：**朗 意 **责任印制：**陈 如 韩 琳

前 言

灰色系统的特色是研究“小样本”与“贫信息”等不确定性问题，因此通过充分开发、利用已占有的信息来挖掘系统本身固有的规律是灰色系统理论的基本准则.我们可以通过社会、经济、生态等系统的行为特征数据来寻求因素之间或自身的变化规律.灰色系统理论认为，尽管客观系统的表象复杂、数据离乱，但它们总有自身的整体功能，必然蕴含着某种规律，关键是如何选择适当的方法来挖掘和利用.刘思峰教授提出了冲击扰动缓冲算子的概念，并构造出了一种较为广泛使用的缓冲算子.一些学者在此基础上对弱化缓冲算子和强化缓冲算子进行了扩展研究.本书在此基础上，结合反向累积法、单调函数与新信息优先的相关知识，构造了新的缓冲算子，从而推广了缓冲算子的类型，并能更有效地提高建模预测过程中的精度.全书主要涉及以下几个方面的内容：

(1)在灰色系统理论缓冲算子公理体系下，利用反向累积和的概念，构造了一类新的强(弱)化缓冲算子，讨论了其相互关系及其性质.并通过算例验证了该算子序列的有效性和实用性，为冲击扰动系统在建模预测过程中出现的定量预测结果与定性分析结论不符的问

题提供了解决的方法.

(2)利用单调函数定理及新信息优先原则，构造了新的弱(强)化缓冲算子，从而大大地拓展了弱(强)化缓冲算子的应用范围. 对序列前一部分增长(衰减)速度过慢(快)，而后一部分增长(衰减)速度过快(慢)的冲击扰动系统数据序列在建模预测过程中常常出现的定量预测结果与定性分析结论不符的问题，提供了多种解决方案. 首次将缓冲算子的构造与函数联系起来，从而为缓冲算子的构造开辟了新方向.

(3)在灰色系统缓冲算子公理体系下，证明了下列结论：若 d 是由 $x(1),\cdots,x(n)$ 所构成的表达式，f 为严格单调递增(减)函数，g 为 f 的反函数. 在 d 中，将 $f(x(k))$ 替换 $x(k)(k=1,\cdots,n)$，对得到的新表达式，用函数 g 去作用，最后的表达式记为 e，若 d 为强化(弱化)缓冲算子，则 e 也为强化(弱化)缓冲算子.

(4)灰色问题中的背景值的构造和灰色 GM(1,1) 模型病态问题一直是灰色系统研究中的两个重要问题. 利用连分式与矩阵条件数理论，对这两个问题进行了讨论，获得了一些重要结论.

本书仓促之间不免有错误和不妥之处，恳请专家、学者和同仁多加批评指正.

著 者

2010 年 5 月

目　录

第 1 章 绪论

1.1 研究背景及研究意义

社会、经济、农业、工业、生态等许多系统，都是根据研究对象所属的领域和范围命名的，而灰色系统却是按颜色命名的. 在控制论中，人们通常用颜色的深浅来形容信息的明确程度. 如艾什比将内部信息未知的对象称为“黑箱”. 再如在政治生活中，人民群众希望了解决策及其形成过程的有关信息，就提出要增加透明度. 我们用“黑”表示信息未知，用“白”表示信息已知，用“灰”表示部分信息未知、部分信息已知. 相应的，信息完全明确的系统称为“白色系统”，信息完全未知的系统称为“黑色系统”. 部分信息未知、部分信息已知的系统称为“灰色系统”. 在灰色系统理论创立与发展过程中，邓聚龙教授发现并提炼出灰色系统的基本原理. 读者不难看出，这些基本原理，具有十分深刻的哲学内涵.

公理 1.1（差异信息原理） 差异即信息，凡信息必有差异.

公理 1.2（解的非唯一性原理） 信息不完全、不确定的解是非唯一的.

公理 1.3（最少信息原理） 灰色系统的特点是充分开发、利用已占有的最少信息.

公理 1.4（认知根据原理） 信息是认知的根据.

公理 1.5（新信息优先原理） 新信息对认知的作用大于老信息.

公理 1.6（灰性不灭原理） 信息不完全是绝对的.

在灰色系统理论中，由于冲击扰动系统的大量存在，导致了定量预测结果与人们直观的定性分析结论大相径庭的现象经常发生. 问题的症结不在于模型的优劣，而是由于系统数据因系统本身受到某种冲击波的干扰而失真，因此寻求定量预测与定性分析的耦合点是摆在每一位预测工作者面前的一个首要问题.

灰色系统理论的主要任务之一就是根据社会、经济、生态等系统的行为特征，寻求不同系统变量之间或系统变量自身的数学关系和变化规律，其特色是研究"小样本"与"贫信息"等不确定性问题，其中的"新信息优先原理"是灰色系统理论的信息观，即认为新信息对认知的作用大于老信息，赋予新信息较大的权重可以提高灰色建模、灰色预测、灰色决策等的功效，其中的方法体系——灰色序列生成，是指通过信息覆盖，选择适当的方法对原始数据进行挖掘、整理以寻求系统变化规律的技术.

刘思峰教授等提出了冲击扰动缓冲算子的概念，构造出了一种较为广泛使用的缓冲算子并研究了已有算子的关系及特性，即当原始数据序列的前半部分增长（减缓）速度较快（慢），后半部分增长（减缓）速度较慢（快）时，先用弱（强）化缓冲算子作用于原始数据序列，然后利用 GM(1,1) 模型进行预测，可以有效地消除在建模预测过程中的干扰.

1.2 基本概念

定义 1.1 设系统真实序列为

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)),$$

而观测到的系统数据序列为

$$\begin{aligned}X &= (x(1), x(2), \cdots, x(n)) \\ &= (x^{(0)}(1)+\varepsilon_1, x^{(0)}(2)+\varepsilon_2, \cdots, x^{(0)}(n)+\varepsilon_n) \\ &= X^{(0)}+\varepsilon.\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 称为冲击扰动项，X 称为冲击扰动序列.

一般情况下，社会、经济等冲击扰动序列的数据序列均为按时间顺序记录的数据序列，最后一项数据 $x(n)$ 称为系统的新信息.

定义 1.2[1] 设系统数据序列为 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$，称

$$\sum_{t=1}^{n}{}^{(1)}x(t)=\sum_{t=1}^{n}x(t),$$

$$\sum_{t=1}^{n}{}^{(2)}x(t)=\sum_{t=1}^{n}\sum_{t'=t}^{n}x(t')=\sum_{t=1}^{n}tx(t),$$

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{n}{}^{(l)}x(t) &= \sum_{t=1}^{n}\sum_{t'=t}^{n}{}^{(l-1)}x(t') \\ &= \frac{1}{(l-1)!}\sum_{t=1}^{n}t(t+1)\cdots(t+k-2)x(t),\end{aligned}$$

分别为 1 阶，2 阶，…，l 阶反向累积和算子.

当 $x(1)=x(2)=\cdots=x(n)=1$ 时，有

$$\sum_{t=1}^{n}{}^{(l)}1=\frac{1}{l!}n(n+1)\cdots(n+k-1).$$

定义 1.3 设系统数据序列为 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$，若

(1) $\forall k=2,3,\cdots,n$，$x(k)-x(k-1)>0$，则称 X 为单调增长序列.

(2) $\forall k=2,3,\cdots,n$，$x(k)-x(k-1)<0$，则称 X 为单调衰减序列.

(3) $\exists k_1,k_2\in\{2,3,\cdots,n\}$，使得

$$x(k_1)-x(k_1-1)>0, x(k_2)-x(k_2-1)<0,$$

则称 X 为振荡序列.

其中若令 $M=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}x(k)$，$m=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}x(k)$，则称 $M-m$ 为振荡序列 X 的振幅.

定义 1.4 设 X 为系统数据序列，D 为作用于 X 的算子，X 经算子 D 作用后所得到序列记为 $XD=(x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d)$，则称 D 为序列算子.

对序列连续作用，可得二阶算子，一直可以作用到 r 阶算子，分别记为 $XD^2,\cdots,XD^r$.

公理 1.7（不动点公理） 设 X 为系统数据序列，D 为序列算子，则有

$$x(n)d=x(n).$$

公理 1.8（信息充分利用公理） 系统数据序列 X 中的每一个数据 $x(k)$ $(k=1,2,\cdots,n)$，都应充分地参与算子作用的整个过程.

公理 1.9（解析化与规范化公理） 任意的 $x(k)d(k=1,2,\cdots,n)$ 皆可以由一个统一的 $x(1),x(2),\cdots,x(n)$ 的初等表达式表达.

满足上述三公理的序列算子称为缓冲算子，XD 称为缓冲序列.

说明：公理 1.7、1.8、1.9 在下文中简称为缓冲算子的公理一、二、三.

定义 1.5 设 X 为系统数据序列，D 为序列算子，当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，若缓冲序列 XD 比数据序列 X 的增长速度（或衰减速度）增强（减弱）或振幅减小（增大），则称缓冲算子 D 为弱（强）化算子.

定理 1.1 设 X 为单调增长序列，XD 为缓冲序列，则

(1) D 为弱化缓冲算子 $\Leftrightarrow x(k)\leqslant x(k)d,k=1,2,\cdots,n$;

(2) D 为强化缓冲算子 $\Leftrightarrow x(k)\geqslant x(k)d,k=1,2,\cdots,n$.

证明：设

$$r(k)=\frac{x(n)-x(k)}{n-k+1},k=1,2,\cdots,n,$$

为原始序列 X 中 $x(k)$ 到 $x(n)$ 的平均增长率，

$$r(k)d=\frac{x(n)d-x(k)d}{n-k+1},k=1,2,\cdots,n,$$

为缓冲序列 XD 中 $x(k)d$ 到 $x(n)d$ 的平均增长率. 由 $x(n)d=x(n)$，得

$$r(k)-r(k)d=\frac{x(n)-x(k)}{n-k+1}-\frac{x(n)d-x(k)d}{n-k+1}=\frac{x(k)d-x(k)}{n-k+1}.$$

若 D 为弱化缓冲算子，则 $r(k)\geqslant r(k)d$，即 $r(k)-r(k)d\geqslant 0$，于是 $x(k)-$

$x(k)d \leqslant 0$, 即 $x(k) \leqslant x(k)d$, 反之亦然.

若 D 为强化缓冲算子 ,则 $r(k) \leqslant r(k)d$,即 $r(k)-r(k)d \leqslant 0$, 于是 $x(k)-x(k)d \geqslant 0$, 即 $x(k) \geqslant x(k)d$, 反之亦然.

定理 1.2 设 X 为单调衰减序列, XD 为缓冲序列,则

(1)D 为弱化缓冲算子$\Leftrightarrow x(k) \geqslant x(k)d, k=1,2,\cdots,n$;

(2)D 为强化缓冲算子$\Leftrightarrow x(k) \leqslant x(k)d, k=1,2,\cdots,n$.

证明: 与定理 1.1 类似,从略.

定理 1.3 设 X 为振荡序列,XD 为缓冲序列.

(1)若 D 为弱化缓冲算子,则

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} x(k) \geqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n}\{x(k)d\}, \min_{1\leqslant k\leqslant n} x(k) \leqslant \min_{1\leqslant k\leqslant n}\{x(k)d\};$$

(2)若 D 为强化缓冲算子,则

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} x(k) \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n}\{x(k)d\}, \min_{1\leqslant k\leqslant n} x(k) \geqslant \min_{1\leqslant k\leqslant n}\{x(k)d\}.$$

由定理 1.1~1.3 可知,单调增长序列在弱(强)化缓冲算子作用下,数据膨胀(萎缩);单调衰减序列在弱(强)化缓冲算子作用下,数据萎缩(膨胀).

1.3 实用缓冲算子的构造

定理 1.4 设原始数据序列 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$, 令

$$XD=(x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d),$$

其中

$$x(k)d=\frac{x(k)+\cdots+x(n)}{n-k+1}, k=1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时,D 皆为弱化缓冲算子.

证明: 直接利用 $x(k)d$ 的定义,易知定理成立.

定理 1.5 设原始数据序列 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$, 令

$$XD=(x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d),$$

其中

$$x(k)d = \frac{kx(k)+\cdots+nx(n)}{k+\cdots+n}, k=1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D 皆为弱化缓冲算子.

证明:不妨设 $x(k)$ 为单调增长序列,则

$$x(k)d - x(k) = \frac{kx(k)+\cdots+nx(n)}{k+\cdots+n} - x(k)$$

$$= \frac{(k+1)[x(k+1)-x(k)]+\cdots+n[x(n)-x(k)]}{k+\cdots+n} \geqslant 0.$$

因此,

$$x(k) \leqslant x(k)d.$$

所以 D 为弱化缓冲算子.

同理可证,当 X 为单调衰减序列或振荡序列时,D 为弱化缓冲算子.

定理 1.6 设原始数据序列 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$,令

$$XD=(x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d),$$

其中

$$x(k)d = \frac{w_k x(k)+\cdots+w_n x(n)}{w_k+\cdots+w_n}, k=1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时,D 皆为弱化缓冲算子.

证明:不妨设 $x(k)$ 为单调增长序列,则

$$x(k)d - x(k) = \frac{w_k x(k)+\cdots+w_n x(n)}{w_k+\cdots+w_n} - x(k)$$

$$= \frac{w_{(k+1)}[x(k+1)-x(k)]+\cdots+w_n[x(n)-x(k)]}{w_k+\cdots+w_n} \geqslant 0.$$

因此,

$$x(k) \leqslant x(k)d.$$

所以 D 为弱化缓冲算子.

同理可证,当 X 为单调衰减序列或振荡序列时,D 为弱化缓冲算子.

定理 1.7 设原始数据序列 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$,令

$$XD=(x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d),$$

其中

$$x(k)d = [x(k)^{w_k} \cdot \cdots \cdot x(n)^{w_n}]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}}, k = 1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D 皆为弱化缓冲算子.

证明:不妨设 $x(k)$ 为单调增长序列，则

$$\begin{aligned} x(k)d &= [x^{w_k}(k) \times \cdots \times x^{w_n}(n)]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}} \\ &\geqslant [x^{w_k}(k) \times \cdots \times x^{w_n}(k)]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}} = x(k). \end{aligned}$$

因此，

$$x(k) \leqslant x(k)d.$$

所以 D 为弱化算子.

同理可证，当 X 为单调衰减序列或振荡序列时，D 为弱化缓冲算子.

定理 1.8 设原始数据序列 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$，令

$$XD = (x(1)d, x(2)d, \cdots, x(n)d),$$

其中

$$x(k)d = \frac{x(k)}{x(n)} \cdot x(k), k = 1, \cdots, n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D 皆为强化缓冲算子.

证明:不妨设 $x(k)$ 为单调增长序列，则

$$\begin{aligned} x(k)d - x(k) &= \frac{x(k)}{x(n)} \cdot x(k) - x(k) \\ &= \frac{x(k)}{x(n)}(x(k) - x(n)) \leqslant 0. \end{aligned}$$

因此，

$$x(k) \geqslant x(k)d.$$

所以 D 为强化缓冲算子.

同理可证，当 X 为单调衰减序列或振荡序列时，D 为强化缓冲算子.

定理 1.9 设原始数据序列 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$，令

$$XD = (x(1)d, x(2)d, \cdots, x(n)d),$$

其中

$$x(k)d=\frac{(w_k+\cdots+w_n)x^2(k)}{w_kx(k)+\cdots+w_nx(n)},k=1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D 皆为强化缓冲算子.

证明:不妨设 $x(k)$ 为单调增长序列，则

$$\begin{aligned}x(k)d&=\frac{(w_k+\cdots+w_n)x^2(k)}{w_kx(k)+\cdots+w_nx(n)}\\&\leqslant\frac{(w_k+\cdots+w_n)x^2(k)}{w_kx(k)+\cdots+w_nx(k)}=x(k).\end{aligned}$$

因此，

$$x(k)\geqslant x(k)d.$$

所以 D 为强化缓冲算子.

同理可证，当 X 为单调衰减序列或振荡序列时，D 为强化缓冲算子.

定理 1.10 设原始数据序列 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$，令

$$XD=(x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d),$$

其中

$$x(k)d=\frac{x^2(k)}{[x(k)^{w_k}\cdot\cdots\cdot x(n)^{w_n}]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}}},k=1,2,\cdots,n,$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时，D 皆为强化缓冲算子.

证明:设 $x(k)$ 为单调增长序列，则

$$\begin{aligned}x(k)d&=\frac{x^2(k)}{[x(k)^{w_k}\cdot\cdots\cdot x(n)^{w_n}]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}}}\\&\leqslant\frac{x^2(k)}{[x(k)^{w_k}\cdot\cdots\cdot x(k)^{w_n}]^{\frac{1}{w_k+\cdots+w_n}}}=x(k).\end{aligned}$$

因此，

$$x(k)\geqslant x(k)d.$$

所以 D 为强化缓冲算子.

同理可证，当 X 为单调衰减序列或振荡序列时，D 为强化缓冲算子.

1.4　灰色GM(1,1)模型

定义 1.6　设

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)),$$
$$X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)),$$
$$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i),$$

则称

$$x^{(0)}(k)+ax^{(1)}(k)=b$$

为GM(1,1)模型的原始形式.

定义 1.7　设

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)),$$
$$X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)),$$
$$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i);$$
$$Z^{(1)}=(z^{(1)}(1),z^{(1)}(2),\cdots,z^{(1)}(n)),$$
$$z^{(1)}(k)=\frac{1}{2}(x^{(1)}(k-1)+x^{(1)}(k)),$$

则称

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$$

为GM(1,1)模型的基本形式.

定理 1.11　设 $X^{(0)}$ 为非负序列,

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)),$$
$$X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)),$$
$$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i);$$