

应用数学译丛

The NURBS Book (Second Edition)

# 非均匀有理B样条

(第2版)

(美) Les Piegl 著  
Wayne Tiller

赵 罡 穆国旺 王拉柱 译

w w w . t u p . t s i n g h u a . e d u . c n

清华大学出版社

应用数学译丛

# 非均匀有理B样条 (第2版)

(美) Les Piegl 著  
Wayne Tiller

赵 昱 穆国旺 王拉柱 译

清华大学出版社  
北京

北京市版权局著作权合同登记号 图字：01-2006-6730

**Translation from the English language edition:**

*The NURBS Book*, Second Edition by Les Piegl Wayne Tiller

Copyright © 1995, 1997 by Springer-Verlag

**Springer is a part of Springer Science + Business Media**

**All Rights Reserved.**

本书中文简体字翻译版由德国施普林格公司授权清华大学出版社在中华人民共和国境内(不包括中国香港、澳门特别行政区和中国台湾地区)独家出版发行。未经出版者预先书面许可,不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

版权所有,侵权必究.侵权举报电话:010-62782989 13701121933

### 图书在版编目(CIP)数据

非均匀有理 B 样条:第 2 版/(美)皮尔(Piegl, L.), (美)特莱尔(Tiller, W.)著;赵罡,穆国旺,王拉柱译.--北京:清华大学出版社,2010.12  
(应用数学译丛)

ISBN 978-7-302-23209-4

I. ①非… II. ①皮… ②特… ③赵… ④穆… ⑤王… III. ①计算机辅助设计—研究  
IV. ①TP391.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 123833 号

责任编辑:刘颖

责任校对:赵丽敏

责任印制:何芊

出版发行:清华大学出版社

地址:北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn>

邮编:100084

社总机:010-62770175

邮购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印刷者:北京季蜂印刷有限公司

装订者:三河市兴旺装订有限公司

经销:全国新华书店

开本:185×230 印张:29.5 字数:607千字

版次:2010年12月第1版 印次:2010年12月第1次印刷

印数:1~4000

定价:59.00元

---

产品编号:015581-01

## 第 2 版序

现在, 距 *The NURBS Book* 的第 1 次印刷还不到一年的时间. 由于深受广大读者的欢迎, Springer 出版社决定出版这本书的软封面版本. 除了价格更为便宜外, 第 2 次印刷更正了许多错误; 重新设计了算法 A3.5, 消除了局部数组的使用; 弥补了节点插入算法 A5.1 和 A5.3 和升阶算法 A5.9 中的小漏洞. 除了这些校正以外, 其他部分和第一次印刷时是完全一样的.

Les Piegl  
Wayne Tiller  
1996 年 7 月

# 第 1 版序

非均匀有理 B 样条,通常简称为 NURBS(Non-Uniform Rational B-Splines),实际上已经成为利用计算机处理几何信息时用于形状的表达、设计和数据交换的工业标准.许多国内和国际标准,如 IGES,STEP 和 PHIGS 都把 NURBS 作为几何设计的一个强有力的工具.NURBS 取得的巨大成功主要是由于以下事实:

- NURBS 为解析曲线曲面(如圆锥截线和二次曲面)和自由型曲线曲面(如汽车车身和船体外形)的表达提供了一种统一的数学方法.
- 利用 NURBS 进行设计非常直观,几乎每个工具和算法都有一个易于理解的几何解释.
- NURBS 的算法执行速度很快,并且数值稳定.
- NURBS 曲线曲面在通常的几何变换(如平移、旋转、平行和透视投影)下是不变的.
- NURBS 是非有理 B 样条、有理以及非有理 Bézier 曲线曲面的推广.

由于在数学和算法上的良好性质,以及在工业领域的成功应用,使得 NURBS 得到了极大的普及.NURBS 在 CAD/CAM/CAE 领域中所起的作用类似于英语在科学和商业中的作用.因此,想从事 CAD,必须理解 NURBS.

本书的目的主要有两个:一是弥补 20 世纪 70 年代以来现有文献的不足,另一个是为大家提供一本涉及 NURBS 各个方面的综合性的参考书.目前,关于 NURBS 的文献比较稀少、分散,而且现有文献主要涉及样条的数学方面,这是相当复杂的并且需要对样条理论有详尽的了解.这本书针对一般的工程师,他们具有扎实的大学高等数学和计算方面的背景.不需要博士学位就可以理解本书的概念并逐个实现书中介绍的几百个算法.

在写作本书的 4 年中,我们做了以下工作:

- 查阅、总结了有关文献,将一些重要的结果包含在了本书中.
- 继续从事关于 NURBS 的研究,本书包含了我们所取得的一些最新进展;事实上,本书大约一半的内容取材于最近几年的新进展.
- 开发了一个非常全面的 NURBS 库: Nlib V1.0 和 V2.0.这个库是超过 20 人年对 NURBS 进行研究和开发的结果,它既包含了在我们以前开发的系统中被证明效果良好的一些内容和方法,也包含了新的软件实践.
- 仔细检查每个公式和算法,给出了利用 Nlib 中的例程精确计算得到的插图.本书不包含任何手绘的图,每幅图都通过严格的计算得到,因而是精确的.

我们很高兴能将具有以下特色的一本书奉献给读者：①本书是一本关于 NURBS 的综合性的书；②包含了 Nlib 源代码；③为了方便采用本书作为 NURBS 课程教材的教师们，提供了大量插图。为了能使读者了解这本书所包含的巨大的工作量，我们不妨给大家提供一些有关的数据。根据精确的统计，为了绘制书中的插图和构建 Nlib 库，我们写了（不包括上百个测试程序）

- 1524 个所需要的程序
- 大约占 15001600 字节的存储空间
- 350000 行代码

这绝不是一件轻松的事情！

几年以前，一些研究者曾经开玩笑说：NURBS(非均匀有理 B 样条的英文缩写)事实上应该解释为“Nobody Understands Rational B-Spline”(无人能理解的有理 B 样条)。我们承认他们的玩笑反映了当时的事实。在过去的 4 年中，我们深受这种解释的影响，设法以一种直观的方式来介绍本书的内容。我们希望这有助于将 NURBS 转变为 EURBS，即“Everybody Understands Rational B-Splines”(每个人都能理解的有理 B 样条)。我们诚挚地欢迎读者对我们的工作提出意见和进一步改进的建议。

在此，我们要感谢很多个人和组织对完成本书所提供的帮助和支持。首先，也是最重要的，我们要分别感谢妻子 Karen PiegI 和 LaVella Tiller 的耐心、支持和爱。我们要特别感谢 NAR 协会的 Nancy Rogers 为本书所做的漂亮的排版工作，感谢 David Rogers 所做的编辑工作和技术上的讨论，这使我们书稿中的很多地方更加完善。我们还要感谢 Jim Oliver 和 Tim Strotman，他们为本书的写作提供了很多建议，和他们在技术方面的通信对于形成本书现在的形式产生了有益的帮助。Tiller 还要感谢许多过去和现在的工业界的同行，多年来，和他们的讨论激发着我的热情，他们奉献了许多有价值的观点，感谢他们长期以来的支持和友谊，他们知道我说的是谁。PiegI 的研究工作部分地得到了国家自然科学基金的资助(批准号：CCR—9217768，授予单位：南佛罗里达大学)，还得到了来自佛罗里达高等技术与工业委员会(Florida High Technology and Industry Council)的各种资助。在此，一并向他们表示感谢！

Les PiegI  
Wayne Tiller  
1995 年 3 月

# 前 言

直到目前为止, B 样条曲线曲面(NURBS)主要在计算机辅助设计(CAD)领域受到人们的广泛关注, 在该领域它已成为表示曲线曲面的标准. 现在, 我们看到它的应用已经扩展到可视化艺术(包括电影和娱乐业、艺术、雕塑等)中物体的造型, 以及虚拟现实场景中场景的造型等方面. 可以预期这些领域的应用还会不断增加. 因此, 将《非均匀有理 B 样条》(*The NURBS Book*)作为《可视化通讯专著》(*Monograph in Visual Communication*)丛书之一出版是合理的.

B 样条曲线曲面已经成为我学术研究中一项持久的重要内容. 1972 年出版的第 1 版《计算机图形学的数学基础》(*Mathematical Elements for Computer Graphics*)是包含 B 样条内容的第一本关于计算机辅助设计、交互式计算机图形学的教材. 感谢当时在 Syracuse 大学的 Bill Gordon 和 Louie Knapp, 是他们使我获得了那本书. 我在 1977 年夏季海军设计师和海洋工程师协会(Society of Naval Architects and Marine Engineers)举办的关于计算机辅助船舶曲面设计的会议上发表的论文是有据可查的印证 B 样条曲线在船舶设计中应用的第一篇论文.

对于许多人来讲, B 样条、有理 B 样条和 NURBS 有点神秘. 近年来人们一直希望有一本全面、详尽、清楚、易懂的介绍 B 样条的书. 因此, 我热切期待着 Les Piegl 和 Wayne Tiller 的著作问世. 他们没有让我失望: 这本《非均匀有理 B 样条》全面、完美地满足了人们的需要. 在本书的写作中, 他们在 NURBS 方面所具有的深厚学术背景和丰富实践经验, 使得他们在阐述这样一个相当复杂的主题时, 得以采用一种简单的方式: 这种表述风格清楚而详细. 书中给出了必要的数学推导, 并且对于细节给予了足够的关注, 而不是只注重数学的严密性. 书中的算法(大部分以类 C 语言的伪代码描述)都经过仔细推敲, 对细节也极为考究. 为了精确, 书中的每幅插图都以计算机生成, 这是一项艰巨的工作. 这本书的确是一本传世之作.

B 样条曲线曲面源于 20 世纪 70 年代早期 Pierre Bézier 的开创性工作. 某种意义上, 人们可以认为 B 样条曲线曲面是 Bézier 曲线曲面之“子”, 而非均匀有理 B 样条(NURBS)是 Bézier 曲线曲面之“孙”. 从时间上大致是对的, 他们无疑已经走向成熟.

最后, 我非常高兴能够和 Les Piegl 和 Wayne Tiller 一起, 将本书奉献给广大读者.

David F. Rogers

《可视化通讯专著》丛书主编

# 目 录

<b>第 1 章 曲线曲面基础</b> .....	1
1.1 隐式和参数表示 .....	1
1.2 幂基曲线 .....	4
1.3 Bézier 曲线 .....	7
1.4 有理 Bézier 曲线 .....	15
1.5 张量积曲面.....	21
练习 .....	29
<b>第 2 章 B 样条基函数</b> .....	32
2.1 引言.....	32
2.2 B 样条基函数的定义和性质 .....	34
2.3 B 样条基函数的导数 .....	42
2.4 B 样条基函数进一步的性质 .....	46
2.5 B 样条基函数的计算 .....	48
练习 .....	59
<b>第 3 章 B 样条曲线曲面</b> .....	60
3.1 引言.....	60
3.2 B 样条曲线的定义和性质 .....	60
3.3 B 样条曲线的导矢 .....	66
3.4 B 样条曲面的定义和性质 .....	73
3.5 B 样条曲面的偏导矢 .....	79
练习 .....	84
<b>第 4 章 有理 B 样条曲线曲面</b> .....	86
4.1 引言.....	86
4.2 NURBS 曲线的定义和性质 .....	86
4.3 NURBS 曲线的导矢 .....	91



4.4	NURBS 曲面的定义和性质 .....	93
4.5	NURBS 曲面的偏导矢 .....	99
	练习 .....	101
<b>第 5 章</b>	<b>基本几何算法 .....</b>	<b>103</b>
5.1	引言 .....	103
5.2	节点插入 .....	103
5.3	节点细化 .....	118
5.4	节点去除 .....	130
5.5	升阶 .....	141
5.6	降阶 .....	152
	练习 .....	161
<b>第 6 章</b>	<b>高级几何算法 .....</b>	<b>163</b>
6.1	曲线曲面上点的反求和投影 .....	163
6.2	曲面切矢的反求 .....	167
6.3	曲线曲面的变换和投影 .....	168
6.4	NURBS 曲线曲面的重新参数化 .....	172
6.5	曲线曲面的反向 .....	188
6.6	B 样条形式和分段幂基形式之间的转化 .....	190
	练习 .....	199
<b>第 7 章</b>	<b>圆锥截线和圆 .....</b>	<b>201</b>
7.1	引言 .....	201
7.2	圆锥截线的各种表示形式 .....	201
7.3	二次有理 Bézier 曲线弧 .....	208
7.4	无穷远控制点 .....	210
7.5	圆的构造 .....	213
7.6	圆锥截线的构造 .....	220
7.7	圆锥截线的分类及不同形式之间的转换 .....	227
7.8	圆弧的高次 Bézier 表示形式 .....	233
	练习 .....	235

<b>第 8 章 一般曲面的构造</b> .....	236
8.1 引言 .....	236
8.2 双线性曲面 .....	236
8.3 一般柱面 .....	237
8.4 直纹面 .....	239
8.5 旋转面 .....	242
8.6 曲面的非均匀缩放 .....	246
8.7 三边球面片 .....	247
<b>第 9 章 曲线曲面拟合</b> .....	254
9.1 引言 .....	254
9.2 全局插值 .....	256
9.2.1 给定点数据的全局曲线插值.....	256
9.2.2 端点导矢指定的全局曲线插值.....	260
9.2.3 三次样条曲线插值.....	261
9.2.4 指定一阶导矢的全局曲线插值.....	263
9.2.5 全局曲面插值.....	265
9.3 局部插值 .....	270
9.3.1 局部曲线插值预备知识.....	270
9.3.2 局部抛物线插值.....	272
9.3.3 局部有理二次曲线插值.....	275
9.3.4 局部三次曲线插值.....	276
9.3.5 局部双三次曲面插值.....	279
9.4 全局逼近 .....	284
9.4.1 最小二乘曲线逼近.....	285
9.4.2 带权的约束最小二乘曲线拟合.....	288
9.4.3 最小二乘曲面逼近.....	293
9.4.4 在规定精度内的逼近.....	296
9.5 局部逼近 .....	304
9.5.1 局部有理二次曲线逼近.....	305
9.5.2 局部非有理三次曲线逼近.....	308
练习.....	314

<b>第 10 章 高级曲面构造技术</b> .....	316
10.1 引言 .....	316
10.2 摆转曲面 .....	316
10.3 蒙皮曲面 .....	318
10.4 扫掠曲面 .....	326
10.5 插值于双向曲线网格的曲面 .....	335
10.6 Coons 曲面 .....	340
<b>第 11 章 形状修改工具</b> .....	348
11.1 引言 .....	348
11.2 移动控制点 .....	349
11.3 修改权因子 .....	356
11.3.1 修改曲线的一个权因子 .....	356
11.3.2 修改曲线相邻的两个权因子 .....	361
11.3.3 修改曲面的一个权因子 .....	364
11.4 形状操作 .....	366
11.4.1 局部变形 .....	367
11.4.2 平整 .....	373
11.4.3 弯曲 .....	375
11.5 基于约束的曲线曲面形状修改 .....	380
11.5.1 基于约束的曲线修改 .....	380
11.5.2 基于约束的曲面修改 .....	385
<b>第 12 章 数据交换及其标准</b> .....	390
12.1 引言 .....	390
12.2 节点矢量 .....	390
12.3 相关标准中的 NURBS .....	396
12.3.1 IGES .....	397
12.3.2 STEP .....	398
12.3.3 PHIGS .....	399
12.4 与 NURBS 系统的数据交换 .....	399

---

<b>第 13 章 B 样条程序设计</b> .....	405
13.1 引言 .....	405
13.2 数据类型和可移植性 .....	406
13.3 数据结构 .....	408
13.4 内存分配 .....	412
13.5 出错处理 .....	416
13.6 实用函数 .....	422
13.7 算术函数 .....	425
13.8 编程实例 .....	427
13.9 附加结构 .....	432
13.10 系统结构 .....	435
<b>索引</b> .....	437
<b>参考文献</b> .....	449

# 第 1 章 曲线曲面基础

## 1.1 隐式和参数表示

在几何造型中,两种最常用的曲线、曲面表示方法是隐式表示和参数表示方法.

$xy$  平面上曲线可以用具有形如  $f(x, y) = 0$  的隐式方程来表示. 这个方程隐含地描述了曲线上点的  $x, y$  坐标之间所满足的关系. 对于一条给定的曲线,除了差一个常数因子外,方程是唯一的<sup>①</sup>. 例如,圆心位于原点的单位圆周,可以由方程  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  来描述(见图 1.1).

在参数表示形式中,曲线上点的每个坐标分量均被表示为一个独立参数的显函数,其形式为<sup>②</sup>

$$\mathbf{C}(u) = (x(u), y(u)), \quad a \leq u \leq b$$

因此,  $\mathbf{C}(u)$  是一个独立变量  $u$  的矢值函数. 尽管区间  $[a, b]$  可以是任意的,但通常将其归一化为  $[0, 1]$ . 例如,图 1.1 中位于第一象限的圆弧采用参数形式可以表示为

$$\begin{cases} x(u) = \cos(u) \\ y(u) = \sin(u) \end{cases} \quad 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \quad (1.1)$$

令  $t = \tan(u/2)$ , 得到另一种参数表示形式

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1.2)$$

因此,一条曲线的参数表示形式是不唯一的.

直观上,我们可以将曲线理解为质点运动所形成的轨迹,将参数  $u$  看作时间变量,  $\mathbf{C}(u) = (x(u), y(u))$  为  $u$  时刻质点的位置矢量,  $[a, b]$  为时间区间.  $\mathbf{C}(u)$  的一阶和二阶导矢分别为速度和加速度<sup>③</sup>. 对方程(1.1)和方程(1.2)求导,得到速度函数

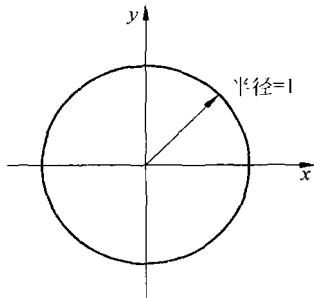


图 1.1 圆心在原点,半径为 1 的圆周

① 译者注: 还可能差一个恒不为零的因子.

② 在翻译中保持原书的记法,用黑正体表示点所对应的向量.

③ 译者注: 在几何上,一阶导矢也称为切矢.

$$\mathbf{C}'(u) = (x'(u), y'(u)) = (-\sin(u), \cos(u))$$

$$\mathbf{C}'(t) = (x'(t), y'(t)) = \left( \frac{-4t}{(1+t^2)^2}, \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \right)$$

注意, 速度矢量  $\mathbf{C}'(u)$  的大小为常数:

$$|\mathbf{C}'(u)| = \sqrt{\sin^2(u) + \cos^2(u)} = 1$$

即: 虽然质点运动的方向随时间而变化, 但其速率是一个常数. 这种参数表示形式称为均匀参数化(uniform parameterization). 将  $t=0$  和  $t=1$  代入  $\mathbf{C}'(t)$  得:  $\mathbf{C}'(0) = (0, 2)$ ,  $\mathbf{C}'(1) = (-1, 0)$ , 即: 质点的初始速度是终止速度的 2 倍(见图 1.2).

曲面的隐式方程具有形式  $f(x, y, z) = 0$ . 例如, 球心在原点的单位球面(见图 1.3)可以用方程  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$  来表示. 该球面的一种参数表示形式(不唯一)为  $\mathbf{S}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , 其中

$$\begin{cases} x(u, v) = \sin(u)\cos(v) \\ y(u, v) = \sin(u)\sin(v) \\ z(u, v) = \cos(u) \end{cases} \quad 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi \quad (1.3)$$

注意: 在曲面的参数方程中, 需要两个参数. 固定  $u$  不变, 让  $v$  变化, 则产生球面的纬线; 固定  $v$  不变, 让  $u$  变化, 则产生球面的经线.

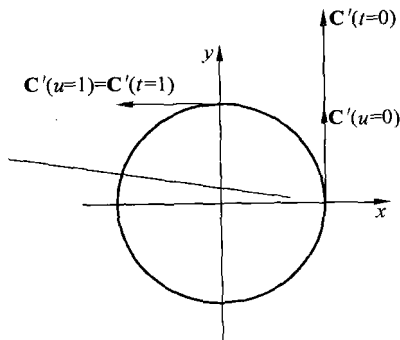


图 1.2 在端点处的速度矢量  $\mathbf{C}'(u)$  和  $\mathbf{C}'(t)$  ①

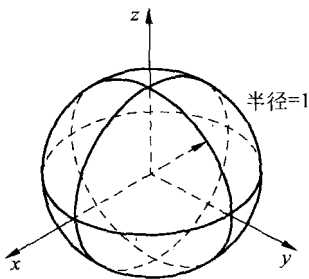


图 1.3 球心在原点, 半径为 1 的球面

记  $\mathbf{S}_u(u, v) = (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v))$  和  $\mathbf{S}_v(u, v) = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v))$  为  $\mathbf{S}(u, v)$  的偏导矢, 即: 分别沿着经线和纬线的速度矢量. 在曲面上任一点处, 如果  $\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v$  不消失(即  $\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v$  为非零矢量), 则曲面在该点处的单位法矢  $\mathbf{N}$  可由下式给出(见图 1.4)

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v}{|\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v|} \quad (1.4)$$

① 译者注: 在图中,  $\mathbf{C}'(u=1)$  应该改为  $\mathbf{C}'(u=\pi/2)$ .

曲面在一点处存在法矢及相应切平面是曲面的几何性质,和曲面的参数化无关.因此,尽管不同的参数化会产生不同的偏导矢,但只要(1.4)式中的分母不为零,则按(1.4)式得到的  $\mathbf{N}$  都是相同的.由(1.3)式容易发现,对于所有的  $v(0 \leq v \leq 2\pi)$  有  $\mathbf{S}_v(0, v) = \mathbf{S}_v(\pi, v) = 0$ , 即:  $\mathbf{S}_v$  在球面的北极和南极消失(为零矢量).很明显,球面在两个极点的法矢确实是存在的,但在这种参数化之下,无法用(1.4)式来计算它们.

对于隐式表示形式和参数表示形式,很难断言其中一种总是比另一种好,它们各有自己的优点和缺点.一个成功的几何造型系统往往同时用到以上两种技术.以下对这两种表示方法做一个比较:

- 通过增加一个  $z$  坐标,很容易将参数方法推广到三维空间中任意曲线的表示,即:  $\mathbf{C}(u) = (x(u), y(u), z(u))$ ; 而隐式方法只能用来表示  $xy$ (或  $xz$  或  $yz$ ) 平面上的曲线.
- 用隐式方法表示有界的曲线段(或曲面片)是不方便的,而在参数表示形式中,曲线(或曲面)的有界性由参数区间的有界性自然得到.另一方面,无界的几何元素(例如,由  $f(x, y) = ax + by + c = 0$  所定义的直线)利用参数方法表示也是不方便的.
- 曲线的参数表示同时给出了曲线的一个方向(设  $a \leq u \leq b$ , 方向为从  $\mathbf{C}(a)$  到  $\mathbf{C}(b)$ ); 而隐式表示则不然.因此,利用参数表示形式,很容易生成曲线上的有序点列.类似地,根据曲面的参数方程很容易生成曲面上的网格点.
- 在用计算机进行形状设计和表示时,参数形式更直观、自然.在很多参数表示形式(如 Bézier 和 B 样条)中,系数具有相当重要的几何意义.这导致直观的设计方法和具有几何特色、数值稳定的算法.
- 许多几何操作的计算复杂度极大地依赖于所采用的表示方法.两个典型的例子是:
  - 当计算曲线或曲面上点的位置时,采用隐式表示形式是困难的;
  - 当给定一个点,要判断它是否在曲线或曲面上时,采用参数形式是困难的.
- 当采用参数形式时,经常需要处理由参数化引起的奇异性,而这种奇异性并不是由于本身的几何特性引起的.一个这样的例子是由(1.3)式表示的单位球面.按参数方程,它的两个极点是奇点,处理时较为复杂.但在几何上,两个极点和球面上的其他点并无不同之处.

在本书的后续章节中,我们几乎只考虑参数形式.关于隐式和参数形式的更多细节,

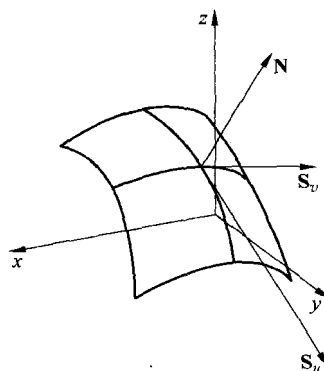


图 1.4 曲面  $\mathbf{S}(u, v)$  的偏导矢和单位法矢

大家可以参考有关的教材(如[Faux81; Mort85; Hoff89; Beac91]).

## 1.2 幂基曲线

显然,如果允许坐标函数  $x(u)$ ,  $y(u)$  和  $z(u)$  是任意的,则可以得到范围很广的曲线. 但是,在实际开发一个几何造型系统时,我们需要进行一些折中. 理想的情况是将坐标函数限制在满足下述条件的一类函数中:

- 能够精确地表示用户需要的所有曲线.
- 在计算机中能够被方便、高效、精确地处理. 特别是:
  - 可以高效地计算曲线上的点及各阶导矢;
  - 函数的数值计算对浮点舍入误差(round-off error)不敏感;
  - 函数所需要的存储量较小.
- 比较简单,在数学上易于理解.

一类被广泛使用的函数是多项式. 尽管它们满足上述标准中的后两项,但有很多类型的重要曲线(以及曲面)不能用多项式精确地表示,在系统中,这些曲线只能用多项式逼近. 在本节及 1.3 节,我们将讨论多项式函数的两种常用表示方法——幂基表示和 Bézier 表示. 尽管两者在数学上是等价的,但是我们将看到 Bézier 表示更适合于计算机中形状的操作.

一条  $n$  次曲线的幂基表示形式是

$$\mathbf{C}(u) = (x(u), y(u), z(u)) = \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i u^i, \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (1.5)$$

其中,  $\mathbf{a}_i = (x_i, y_i, z_i)$  是矢量,因而

$$x(u) = \sum_{i=0}^n x_i u^i, \quad y(u) = \sum_{i=0}^n y_i u^i, \quad z(u) = \sum_{i=0}^n z_i u^i$$

(1.5)式写成矩阵的形式为

$$\mathbf{C}(u) = [\mathbf{a}_0 \quad \mathbf{a}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ \vdots \\ u^n \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_i]^T [u^i] \quad (1.6)$$

(我们将行向量写成列向量的转置). 对(1.5)式求导得到

$$\mathbf{a}_i = \frac{\mathbf{C}^{(i)}(u)|_{u=0}}{i!}$$

这里,  $\mathbf{C}^{(i)}(u)|_{u=0}$  是  $\mathbf{C}(u)$  在  $u=0$  处的  $i$  阶导矢.  $n+1$  个函数  $\{u^i\}$  称为基函数(或混合函数),  $\{\mathbf{a}_i\}$  是幂基表示形式中的系数矢量.



给定  $u_0$ , 计算幂基曲线上的点  $C(u_0)$  的最有效算法是 Horner 方法:

- 次数=1 时:  $C(u_0) = a_1 u_0 + a_0$
- 次数=2 时:  $C(u_0) = (a_2 u_0 + a_1) u_0 + a_0$
- $\vdots$
- 次数= $n$  时:  $C(u_0) = (\dots((a_n u_0 + a_{n-1}) u_0 + a_{n-2}) u_0 + \dots + a_1) u_0 + a_0$

具体算法如下.

#### 算法 A1.1

```

Horner1(a, n, u0, C)
/* 计算幂基曲线上的点. */
/* 输入: a, n, u0 */
/* 输出: C */
{
    C = a[n];
    for(i = n-1; i >= 0; i--) C = C * u0 + a[i];
}

```

**例 1.1** 当  $n=1$  时,  $C(u) = a_0 + a_1 u$  ( $0 \leq u \leq 1$ ) 表示由  $a_0$  到  $a_0 + a_1$  的直线段(见图 1.5). 常矢量  $C'(u) = a_1$  给出了直线的方向.

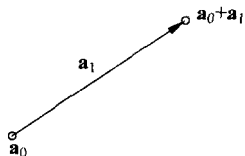


图 1.5 直线段  $C(u) = a_0 + a_1 u$

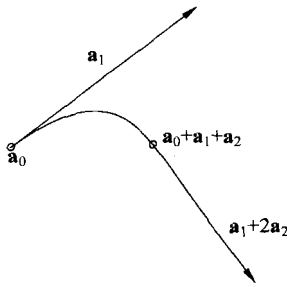


图 1.6 抛物线弧  $C(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$

**例 1.2** 当  $n=2$  时, 一般来说,  $C(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$  ( $0 \leq u \leq 1$ ) 是一段由  $a_0$  到  $a_0 + a_1 + a_2$  的抛物线弧(见图 1.6). 这可按如下方法来证明:

1. 做坐标变换, 将  $C(u)$  变换到  $xy$  平面(注意:  $C(u)$  必定位于一个平面内).
2. 设在新的坐标系中  $x(u) = x_0 + x_1 u + x_2 u^2$ ,  $y(u) = y_0 + y_1 u + y_2 u^2$ , 因此, 可将  $u$  和  $u^2$  表示为  $u = p_1 x + q_1 y + r_1$  和  $u^2 = p_2 x + q_2 y + r_2$  的形式(当  $x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2$  固定时,  $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2$  均为常数), 因而可以得到关于  $x, y$  的隐式方程:  $p_2 x + q_2 y + r_2 = (p_1 x + q_1 y + r_1)^2$ .
3. 显然, 以上隐式方程表示一条抛物线(通过坐标变换, 上述隐式方程可以变换为