

A CULTURAL PERSPECTIVE ON THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICS

数学发展的

文化视角



游安军 著

中国文联出版社

数学发展的 文化视角

游安军 著

中国文联出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学发展的文化视角/游安军著. - 北京:中国文联出版社,
1999. 8

(香湾文丛/黄金河主编)

ISBN 7-5059-3357-4

I. 数… II. 游… III. 散文-作品集-中国-当代 IV. 1267

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 16853 号

书 名	香湾文丛(1-11 册)
主 编	黄金河
出 版	中国文联出版社
发 行	中国文联出版社 发行部
地 址	农展馆南里 10 号(100026)
经 销	全国各地新华书店
责任编辑	任杰
责任印制	胡元义
印 刷	广东台山市华宁彩印厂
开 本	850×1168 1/32
字 数	170 千字
印 张	6.9
插 页	2 页
版 次	1999 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
书 号	ISBN 7-5059-3269-1/I·2477
定 价	136.00 元(本册 13.00 元)

本书如有印装质量问题,请直接与出版社联系

目

录

绪 论	(1)
第一章 数与形的起源	(14)
第二章 文明古国数学的原初状态	(25)
第三章 古希腊文化与数学	(31)
1 古希腊文化的来源	(31)
2 理性自然观的起源	(33)
3 作为对象的自然的凸现	(37)
4 “万物皆数”学说	(44)
5 原子论思想	(50)
6 芝诺的运动悖论	(52)
7 智者学派与数学三难题	(55)
8 柏拉图的理念论	(59)
9 亚里士多德的唯名论	(63)
10 希腊化时期的社会、文化与数学	(66)
11 罗马文化的衰落	(71)
12 小结：希腊人的理性及其有限性	(74)

第四章 古典学术的衰微与升跃	(85)
1 中世纪的文化背景	(85)
2 中世纪数学的状况	(89)
3 欧洲的学术复兴	(92)
4 理性主义的复活	(95)
5 科学方法的诞生	(98)
6 阿拉伯文化与数学	(101)
7 小 结	(104)
第五章 文艺复兴	(107)
1 文艺复兴的经济背景	(107)
2 宗教改革运动	(109)
3 柏拉图主义的复活	(112)
4 数学中的人文主义	(115)
5 数学神秘主义	(120)
6 经验主义的兴起	(124)
7 天文学的革命	(128)
8 文艺复兴时期的数学	(132)
第六章 科学方法的定向	(135)
1 实验 - 归纳法	(135)
2 数学演绎法	(139)
3 自然的数学化	(143)
4 伽利略的前后	(146)
5 数学科学的转变	(150)
6 放弃毕达哥拉斯	(152)
7 小 结	(154)

第七章 学术思潮演变与中国传统数学	(157)
1 先秦显学与两种数学传统	(157)
2 汉代经学与天人宇宙论的数学解说	(163)
3 魏晋思想解放与逻辑传统的再现	(170)
4 隋唐时期的数学状况	(175)
5 宋代理学与代数学的发达	(177)
6 明代数学的衰落与实学思潮的兴起	(184)
7 明清之际“会通以求超胜”的嬗变	(189)
8 清代乾嘉学派与传统数学的复兴	(193)
9 天文历法与传统数学	(196)
10 中国佛教、道教与传统数学	(199)
11 小 结	(202)
外国人名译名对照表	(207)
参考文献	(213)
后 记	(217)

绪 论

改革开放二十多年来，我国社会经济结构、文化教育、以及就业观念都发生了深刻的变化。现代科学技术的普遍化，也正使我们现在的社会处于一个剧变的、革命的时代。面对这种激烈竞争的多元化社会，人们对学校教育问题表现出了空前关注，并进行了热烈讨论，由此引起了人们教育观念的重要转变——提倡素质教育。在学科教育里，数学教育观念也发生着极其明显的多元化趋向——能力素质和文化素质。过去，我们长久地接受所谓“数学理论”的熏染，过于注重数学知识的积累和思维能力的培养，忽视数学思想、数学文化的教育，以致于学生难以领会数学与社会结构、哲学、文化观念等多方面的联系，从而在人们的思想意识里形成了对数学科学的很多不同的认识方面：数学是一种符号游戏；是一种锻炼思维的体操；是一堆定义、公式、法则和定理的集合；数学是一种思维方法；是一种概念之间关系的逻辑；是一种极其有用的和精确的语言；等等。

或许正是数学本身性质的多重性，数学才展示着所有这些方面，并且随着数学科学的进一步发展和数学应用的广泛深入，它会展示出更多的方面。例如，现在人们对数学又有了新认识。中国科学院院士王梓坤等和美国科学院院士格里姆（J. G. Glimm）都认为“数学是一种技术”。¹但是，我们需要寻求一种对数学的系统理解，一种把数学本质的这种多样性与其内在的整合性和统

一性联系起来的方法。数学不是要素与活动的杂乱无章的组合，而是一个具有凝聚性的结构，其各部分在功能上有着互相依赖的关系。获得这种对数学的系统理解的一种方式，一种显而易见的，却被相当多的人们忽视了的方式，就是首先从根本上把数学看作是一种社会活动——这是数学活动论的基本出发点。从这个角度来看，数学不单只是数学活动所得到的最终产物——命题或理论，也不单只是一系列得到这些概念、定理的思维方法，也不单只是数学活动的各个环节，即问题、语言和证明等，而是一个由这样的多种成分（或方面）整合而成的复合体。美国数学哲学家基切尔（P. Kitcher）也曾在《数学知识的性质》一书中明确地提出数学活动是由问题、语言、论证、命题及元数学观点所组成。在此基础上，郑毓信曾经对数学活动进行了方法论的分析——这不是本书的主题。进一步，当我们把数学看作是发生在人类社会这个宏大的历史文化背景中的一系列活动时，数学就应该是一种在对象和方法等诸多方面都比较特殊的思想和行为，它由于其内在力量与外部力量共同作用而处于不断发展和进化之中。在进化过程的不同时期，数学的发展应与那一时代的社会、经济、文化环境有着某种内在的联系。

数学是人类知识系统的一个部门，虽然它与社会制度和阶级无关，但是，作为人类对自然规律的认识，它是一种社会的产物，是一个社会历史的过程，它的发生、发展都为社会制约。同时，数学不是自然界本身，而是人与自然界之间的关系的一部分，它的活动由社会的人所参与。因此，它同哲学、宗教观念、文化等社会意识形态是相互作用着的。一般地，关于数学与社会文化的观点，重点在于数学完全依赖于社会的其他部分，这基本上是由经济因素所决定：“数学的发展依赖于社会经济、科学技术的发展，特别是经济因素”，如此笼统的描述可能会使人们认为在数学发展与社会结构的其他部分之间就不存在什么相互的影

响。正如有人正确而恰当地分析的,这种观点是不能让人完全接受的。²事实上,我们过去已经忽视了的、现在仍没有得到重视的许多不同的社会因素,如宗教的、哲学文化的以及政治的因素,曾经并且一直都对数学发展具有重要的影响。例如,法国哲学家列维—布留尔(L. Levy - Bruhl)在《原始思维》中实证考察的原始的数概念就使我们认识了作为数学对象的数,它的形成是非常的复杂和艰辛,其背后拥有丰富的文化含意和某种神秘因素。而数学中的形,也不是通常所说的来自诸如月亮是圆的、光线是直的、湖面是平的等自然现象的思维映象,也不是来自制造工具和器皿时的启示,而是来自与古人的生产方式相适应的宗教意识和幻术事业。³这就使我们对恩格斯(F. Engels, 1820—1895)曾说的“数和形的概念不是从其它任何地方,而是从现实世界中得来的。”⁴这句话有了更深刻的理解。在数学作为一种独立的精神活动的最早诞生地—古希腊,数学发展是与古希腊社会在整体上的经济繁荣相适应的,更受到了古希腊哲学的直接影响。匈牙利的萨博(A. Szabo)和英国的劳埃德(G. E. R. Lloyd)等科学史家都认为希腊人在数学上的发展完全处于希腊思想变革的范围之内。⁵亚历山大里亚时期,数学与科学的发展,以及它们所表现出来的与古希腊的不同倾向,既得益于托勒密王国政府力量扶助,同时也是希腊与东方各民族文化相互融合的结果。随后,罗马帝国建立,它的数学成就不值一提,也是罗马人注重实际,追求功利的“罗马性格”使然。在宗教神学大一统的中世纪,人们对宗教理性主义要比对经验理性主义更感兴趣,这不可能不对科学,乃至数学的发展有一种部分的和暂时的阻碍作用;文艺复兴时期,柏拉图(Plato 前428?—348)主义的复活、人文主义文化和思想的出现、以及经验主义的兴起在增进人们的数学兴趣,认识自然的特性和开阔人们的心胸,恢复对自然的研究热情等方面也起着非常重要的作用。在这样的情势下,文艺复

兴的数学就与古希腊数学反其道而行之，数学家们将创造力投入到算术和代数领域。最后，当理性经验论战胜宗教唯理论时，科学与数学就迅速地发展起来。17、18 世纪数学的巨大进展就是人们在自由的学术气氛中，热情地面向自然界，自然科学以及社会生活的多方面，不断探索新的概念和技巧的结果。美国学者怀尔德（R. Wilder, 1896—1982）曾把影响数学发展的这种力量称为外部力量（或环境力量）。他认为，环境力量对于数学的发展有着十分重要的影响，并进一步将其区分为“物质成分”和“文化成分”，前者是指人类物质生活的直接需要。在数学的早期发展中我们可以明显地看到“物质成分”的作用。例如，几何在古代埃及的早期发展即是由于土地丈量的直接需要。“文化成分”则是指科学理论、哲学理论等文化成分乃至一般的文化环境对于数学的发展也有重要的影响。克莱因（M. Kline）就曾说，“希腊人在文明史上首屈一指，在数学史上至高无上。他们虽也取用了周围其他文明世界的一些东西，但希腊人创造了他们自己的文明和文化，这是一切文明中最宏伟的，是对现代西方文化的发展影响最大的，是对今日数学的奠基有决定作用的。”⁶这是对古希腊文化崇高而正确的评价。奈尔斯认为，没有“伊斯兰”精神，伊斯兰科学的兴起和它后来的发展是不可思议的，因为伊斯兰教从《古兰经》中吸取行动的原则，培植了有利于科学发展的观念和文化环境。⁷这种观念与环境，使得他们在对数学的态度上较希腊人来得实际，较印度人来得理性，最终保持了希腊数学的哲学性。站在由中世纪到现代世界入口处的新教，把中世纪理性主义的伟大力量带入了日常生活之中，却刺激了经验科学，因为它认为以可能的最理性的方式安排他的各种“世俗”活动，经济的和它的活动，是人的宗教责任；科学研究作为一种辛勤劳作和改善社会的有效手段，就变成了使上帝增加光彩的活动。怀尔德还指出，不同文化的交流可以促进数学的发展；反之，环境的封

闭或对于外来文化的抵制则可能阻碍数学的发展。譬如，与古巴比伦和古埃及的文化交流为古希腊数学的发展提供了最初的动力；中世纪阿拉伯数学与科学的繁荣，在相当程度上归功于公元8世纪中叶，阿拔斯王朝鼓励学术的政策，以及他们所获得的古希腊、拜占庭帝国、埃及、叙利亚以及印度诸国的人才和文化；近代欧洲也正是凭借阿拉伯文译本才可能回首漫步于古希腊科学知识的殿堂。中国古代数学走着自己独立的发展道路，由于缺乏必要的外部交流最终陷入了停顿状态；促使英国数学家在很长时期里坚持牛顿（Sir Isaac Newton, 1642—1727）的流数术而拒绝采取莱布尼兹（G. W. Leibniz, 1646—1716）的更为方便的符号系统的一个重要原因就是民族主义的情绪。总之，不仅政治的、经济的因素对数学发展产生着影响，其它的一些因素如文化或宗教观念等也影响着数学的发展，时而是这一个，时而是另一个，时强时弱，从未连续均一过；有时是相对有利于数学的发展，有时则是妨碍之。这是不可避免的法则。对于数学来说，没有什么东西是与社会相脱离的。由此，我们就可以把数学看作是一种与具有基本的社会文化特征相联系的过程的产物。

毫无疑问，数学的一切进展都不同程度地植根于实际的需要。但是，一旦数学在实际需要的迫使下被推动了，它就不可避免地获得一种动量，使之超越出直接应用的界限。这就使我们注意到被视为社会要素之一的数学的相对自主性。尽管所有的社会因素都影响着数学的进化，但数学，尤其现代数学，总是保持一定范围的独立性，就象社会的其他部分一样，这只不过是因为数学有它自己的内部结构和行动过程。正如怀尔德德认为的，现代数学在一定程度上可以看成是一个自足的系统，这不仅是指数学可以单纯凭借内在的力量得到一定的发展，而且是指数学具有自己特殊价值标准和发展规律，从而，相对于整个文化环境而言，数学的发展就具有一定的独立性。这种相对独立性也就是数学的发

展何以可能在一定程度上超越外部环境、特别是其它自然科学研究的需要的根本原因。如非欧几何就是借助数学内部的逻辑推理独立发展起来的，后来才被爱因斯坦利用而成为广义相对论的工具。在数学具有的相对自主性中，一个重要的因素是它发展了高度概括化的概念框架。数学之核心的概念框架越高度发达，数学具有的独立性范围就越大。例如，原来的代数学是以方程理论为中心内容的，但就是在研究一般的五次以上方程的公式解的过程中，伽罗华（E. Galois, 1811—1832）创造性地提出了“群”的概念，揭开了以研究代数结构为核心的抽象代数的序幕，后来诺特（A. E. Neother, 1882—1935）提出了许多重要概念，如左（右）理想，同构等，使抽象代数学迅速发展起来。但是，无论发展的程度如何，社会影响或环境力量对数学的发展仍然会起作用。例如，第二次世界大战就曾极大地影响了当时的数学发展：它直接促进了系统分析、运筹学、博弈论等学科的研究和发展⁸。现在，计算机科学更是对数学发展产生着重要影响，并引起数学研究在观念和方式上的深刻变革。如美国数学家完成“四色定理”的证明、我国数学家吴文俊教授开创的“机器证明”等都是具有范例意义的开拓性成果；而计算机引起的数学中离散化倾向的增长，既推动了研究离散结构的数理逻辑、图论、组合数学、代数系统以及数值分析等学科的发展，也影响着大中学校数学教育的课程设置。而在日常生活中，我们每天都感受着计算机或信息技术对现实生活的广泛渗透。

在社会生活中，人们常常由于数学的高深莫测而采取敬而远之的态度，并盛行着数学（至少是现代数学）与人们的实际生活和社会无任何重要的联系，以及数学史是由一系列天才数学家所构成的两种认识。通过上面的简析，前一观点已经占不住脚。鉴于数学史上的转折点确实是与伟大的数学家联系在一起，并且经常见到一些以数学家的名字命名的发现，如欧几里德（Euclid 前

330? —? 275) 几何、黎曼 (G. F. Riemann, 1826—1866) 几何、伽罗华群、勒贝格 (H. L. Lebegue, 1875—1941) 积分等。这使得后一种认识看来似乎是正确的。事实上,一方面正如贝尔纳 (J. D. Bernal) 所说,“没有数百名比较不重要的和缺乏想象力的科学家的准备工作,就没有一个具有任何程度的有效性的发现能够作出来。这些科学家甚至大都不理解自己的工作,但他们搜集了必要的材料,而伟大人物则能够根据这些材料来工作”。⁹ 欧几里德几何就是在综合整理古希腊前期的丰富的几何材料基础上作出的,这些材料是由几个著名学派和众多数学家积累起来的,例如,泰勒斯 (Thales, 前 624? —? 547)、毕达哥拉斯 (Pythagoras, 前 584? —? 497) 学派、巧辩学派、欧多克斯 (Eudoxus, 前 408? —? 355) 学派、希波克拉底 (Hippocrates, 前 460? —? 375)、柏拉图学派等等;而且没有亚里士多德 (Aristotle, 前 384—322) 的逻辑学,也许就不会有《几何原本》。在牛顿和莱布尼兹作出数学史上的最伟大的创造——微积分——之前,也有许多数学家,如开普勒 (J. Kepler, 1571—1630)、卡瓦列利 (B. Cavalieri, 1598—1647)、托里拆利 (E. Torricelli, 1608—1647)、费尔玛 (P. Fermat, 1601—1665) ……等已经为它的建立积累了丰富的材料,这时的工作只是集中在一些细节上。克莱因说,“微积分问题至少被 17 世纪十几个最大的数学家和几十个小一些的数学家探索过。”¹⁰ 他们是微积分的真正先驱。所以,牛顿在概括自己的工作时就曾说过:“如果我比别人看得远些,那是因为我是站在巨人们的肩上。”“我不知道世人怎么看,但在我自己看来,我只不过是一个在海滨玩耍的小孩,不时地为比别人找到一块更光亮、更美丽的卵石和贝壳而感到高兴,而在我面前的真理的海洋,却完全是个迷。”¹¹ 这两句名言,可以看作是他对自己所取得伟大成就的真情流露,从其中我们也窥见了 he 博大精深的精神境界。20 世纪法国学者夏尔特尔的伯纳德 (Bernard of

Char—tres)也曾说过:“与古人相比,我们是站在巨人肩上的矮子。”可以肯定地说,科学上的每项重要的成果做出时,我们都能够列出一长串的先行研究者的名字。另一方面,如果立足于这样一种认识,人们就很容易把天才数学家的个人才智置于高倍的显微镜下,而忽视数学发展过程中的不太明显的社会过程和社会观念的影响,而这些过程却起着它们必不可少的作用。如非欧几何的轮廓早就被德国数学家高斯(C. F. Gauss, 1777—1855)所发现,但是,由于新几何学动摇了旧世界的基础而不会被人理解,“怕引起某些人的喊声”,因此没有公开提出的勇气。而当罗巴切夫斯基(Lobatchevsky, 1793—1856)发表它时,就正如高斯所估计的,他受到了教庭的反对,并引来多方的谩骂、嘲笑、侮辱,致使新几何学在很长时间内并未得到普遍重视。当人们向这些数学家表示敬意和叹服他们的天才的时候,社会就可能漫不经心地强化了这类认识。然而,实际情况是,无名的第二流数学家的工作对数学知识的积累是不可或缺的。所有这些以及类似的事实,也许使得伟大的数学家显得更加突出,并强化了对于社会和文化背景的忽视,而这种背景曾经严重地帮助或遏止过他们的成功。因此,通过把数学的发展置于社会文化中来考察,我们就能够更好地理解作为一种文化活动的数学,也能对数学中发明或发现的同时性问题有所认识。关于这种同时性的探讨,巴伯(B. Barber)和怀特(L. A. White)都曾作过比较充分的论述。¹²此处不赘。

数学的历史比我们所想象的要更加悠久、丰富得多。数学当然不是由欧几里德和毕达哥拉斯首创的一甚至也不是由古代埃及和美索不达米亚的思想家们发明的。数学史家斯特罗伊克(D. Struik, 1894—)说“如果我们假定数学是在人类开始对数的关系与几何学的关系有某种理解之时诞生的,那么数学就比古代人要古老得多。”¹³而范德瓦尔敦(B. L. Van der Waerden)根据现

代一些研究成果,认为在公元前 3000—2000 年间的新石器时代,中欧地区曾经存在过一门“数学科学”,这门科学传到了大不列颠岛、近东、印度和中国。希腊人也知道这门“新石器时代的科学”。这就把数学的发明记在了欧洲人远祖的功劳簿上。¹⁴可以说,大约在一百万年以前,数学观念便与人类和文化的起源共生共长,不断发展。但是,最初的数学观念是极其简单和粗糙的。如果人不具备将这些观念清楚地用符号形式表达出来的能力,不具备将它们从一个人传给另一个人以便新的组合得以形成的能力,如果这些新的综合不能在一个相互作用和逐步积累的持续不断的过程中由一代人传给另一代人,那么,人类除了停留在原始阶段以外,不可能取得任何数学上的进步。没有文化的帮助,人类永远无法改善它们;是文化传统的形成,使人们有可能获得进步。下面的例子就能清楚地说明这一点。芝诺的阿基里斯与乌龟的悖论曾使古代数学家绞尽脑汁而现在我们都很容易地找到答案,这并不是因为我们非常聪明,而是因为我们已经继承了人类社会的文化遗产。这种遗产是古人智慧所无法得到的,是受社会物质力量的影响发展起来的。可以说,不管怎样的聪明才智都有其社会文化的局限性。霍格本(L. Hogben)曾说过,“数学史实际上是和人类的各种发明与发现、人类经济结构的演变以及人类的信仰相互交织在一起的”。¹⁵因此,文化传统和观念即使不是数学发展的唯一决定因素,也是非常重要的、绝对不可忽视的因素。

通过把数学作为一定社会背景下的活动来进行系统的审视,我们也许就使自己避免了处于“盲人摸象”的场景,而对数学的众多不同方面形成整合观念;也许能够理解数学与社会文化或宗教观念、经济结构等部分之间的某种确实而不稳定的联系,而且,由于经济的、文化观念的体系在不同时期的社会存在着相当的差别,所以,我们也将看到,某些社会的经济和文化环境比

其它一些社会更能与数学的发展相容得多,从而影响着数学成长的速度和方向。在这种情况下,我们就获得了关于数学及其发展的某种更广阔的见解:数学是数学文化活动。

过去的数学史,它更多的是告诉我们发生了什么,而不是告诉我们它是怎样发生。在本书里,我们不可能描述数学历史的全部复杂而具体的内容,也不是将数学史里通常已经论述过的观念作简单重复,而是试图就近代数学¹⁶开始以前(主要是19世纪之前)这样一段时间里的对数学发展有着重要影响的哲学、文化观念进行数学文化史¹⁷意义上的论述和探讨。这一研究方向将会随着社会发展和学校文化教育的完善而日益显示出其重要性和迫切性,因为这是大学教育,尤其是大学数学教育中实现文理沟通的非常有效的途径之一。早在本世纪初,蔡元培就提出“沟通文理”的思想。为融通文理两科之界限,他说:“习文科各门者,不可不兼习理科中之某种(如习史学者,兼习地质学;习哲学者,兼习生物学之类),习理科者不可不兼习文科之某种(如哲学史、文明史之类)。”¹⁸并在北京大学进行了废除“文理分驰”的改革。现代科学的发展进入到新时代,学科的交叉和综合,以及思维方式的变革都要求大学教育文、理科知识的相互渗透与补充,达到内在的协调,促进人的和谐发展。当前的许多学者,如著名数学家徐利治,都强调了“沟通文理”对大学生文化素质的全面发展的重要性。¹⁹它将是目前大学教育改革的必要组成部分。因此,本书目的之一旨在帮助数理专业的大学生和研究生达到数学与人文科学的融合中起一些作用;当然,哲学社会科学、科技史、自然辩证法工作者也能从中得到某些启发;而在素质教育和教师继续教育倡行的今天,中学数学教师阅读本书更是能开阔视界和拓展知识,增加文化底蕴。目的之二是加强对数学发展有着重要影响的社会经济结构、哲学和文化观念的认识和探讨,有助于数学文化学的建设。这两方面的意义都将是深远的。

但是，由于这方面的论述非常复杂，同时也由于对数学史的理解，不仅需要较多的文史哲方面的知识，也需要较深刻的数学知识和修养，对现代数学尤其如此。所以，我们的分析不可能是透彻的；也由于我们主要关心它们同数学的关系，论述时可能有些片面，但这仍能够帮助人们对数学发展过程中的哲学、文化功能获得初步的整体性认识。因此，本书不是就数学文化作穷尽性的研究，而是把这样一个研究课题提出来，引起更多的讨论。对数学文化史有充分了解的学者，都会知道这是非常确实的。

注释：

1 王梓坤等在《今日数学及其应用》（载《数学通报》1994年第7期）一文中论述数学在高新技术方面的极其广泛的应用，表明“数学是一种技术”的观点。至于数学的一般应用已司空见惯了。已故的著名数学家华罗庚教授早在70年代末就曾讨论过数学应用的广泛性，他在《数学的用处与发展》中说的“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之迷，日用之繁，无处不用数学”使我们记忆犹新。在他的领导和号召下，我国的数学大众化取得了卓越的成绩，产生了比较大的影响。现在，国际数学教育倡导大众数学思想，这不仅是数学教育工作者的任务，更需要有影响、有成就的数学家积极参与。

2 巴伯在《科学与社会秩序》（三联书店出版社，1991年9月第一版）就科学与社会的关系作了恰当的分析。我们认为，他的分析对数学是同样适用的。在数学里情况也许更是如此。其一，将这种影响简单地归结为经济因素实在是太笼统，忽视了太多其它的重要因素。特别重要的是，其二，因为数学的高度抽象性和严谨逻辑性等特点，加之许多人在学校数学教育里所受到的误导，对数学与周围文化环境的关系存在着纯而又纯的认识，进而形成了一种错误的数学观念。现在应该是改变的时候了。

3 袁小明著《数学思想史导论》，第50—51页

4 《马克思恩格斯选集》第3卷 人民出版社 1995年6月第二版，第377页