一元微积分深化引论

吴从炘 任雪昆 著

科学出版社

一元微积分深化引论

吴从炘　任雪昆　著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书简明地阐述了一元微积分最重要的基本概念、基本理论和基本方法，并结合“实变函数”等后续课程与“高等代数”等相关课程对一元微积分的理解和掌握进行了“深化”．书中除介绍国内外其他学者的研究成果外，每一章都包含了作者的教学研究或科学研究成果.

本书共 10 章，主要内容包括实数基本定理与距离结构，实数基本定理与序结构，函数的半连续性、一致连续性与等度连续性，单调函数及其线性扩张，导数的概念、性质与微分中值定理，微分中值定理的应用与对称导数，黎曼积分与黎曼型积分，牛顿-莱布尼茨定理及应用，凸函数类，微积分的一个几何应用——法向等距线.

本书可供高等学校数学系本科生、研究生、教师和数学工作者及有关工程科技人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

一元微积分深化引论/吴从炘，任雪昆著．—北京：科学出版社，2011
ISBN 978-7-03-031473-4

Ⅰ. ①一… Ⅱ. ①吴… ②任… Ⅲ. ①微积分-研究 Ⅳ.① O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 109181 号

责任编辑：张中兴／责任校对：刘小梅
责任印制：张克忠／封面设计：北京华路天然图文设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 6 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2011 年 6 月第一次印刷 印张：10
印数：1—2 000 字数：200 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

之所以能撰写本书, 得益于这样一个机会: 1997 年哈尔滨工业大学数学系安排我在每年的秋季学期为本系四年级本科生讲授一门 20 学时的新课 “数学分析续”, 似有协助提高他们考研成效之意. “题海战术” 固所不愿, 任务则不可推脱. 经协调, 明确该课的要求是: “在学生已修毕数学专业主干课的基础上, 深化对一元微积分的理解和掌握, 并适当兼顾对考研试题的介绍.” 所谓深化, 乃指课程中要力求贯彻以下五条设想:

(1) 把握一元微积分最重要的基本概念、基本理论和基本方法, 简称 “三基”.

(2) 将 “三基” 与纵向后续课, 如 “实变函数”、“泛函分析” 等相结合并深化之.

(3) 将 “三基” 与横向的课程 “高等代数”、“空间解析几何” 等相结合.

(4) 体现一元微积分仍存在可以被发现、可以被解决的理论上与实际中的问题.

(5) 在实现 (1)~(4) 过程中尽力采取探索、发现而非单纯演绎的方式.

作为授课者, 这五条做起来谈何容易. 好在本书作者求学之初, 就逐渐懂得教学科研应相辅相成: 教学中常常思索是否有可探究之处, 科研中也每每顾及是否有可纳入授课的内容. 早在 20 世纪 60 年代初, 本书作者就曾以实数基本定理的框架为计算数学专业 “泛函分析” 课讲授了“距离空间”这一章. 其后在这方面又不断有些积累. 于是, 按个人设想的这门新课如期开出, 且内容也年复一年地在修改补充完善和变更中. 在很长时间内根本没有想过, 把讲稿变成书稿, 只因深知对这门课来说, 这两者之间的差异是何等之大!

本书之所以能够完稿, 更得益于曾听过这门课的几位研究生的提议特别是本书另一作者任雪昆博士, 她在读硕士期间就第一次听了这门课, 后来在博士生阶段以及留校工作之后还三次听课、录音、整理讲稿, 并参与命题及考试. 当她表达可积极努力协助完成书稿的愿望和可能时, 我接受了她的好意. 这样, 便共同确定并执行了如下的撰稿三原则:

(1) 要把书的读者扩展到低年级, 乃至一年级本科生. 为此, 书中的 10 章正文均依照通常 “一元微积分教程” 的先后顺序并自成一体, 行文上也采纳一元微积分的细致易懂的风格. 为加深各类读者对正文的理解和体会, 书中留了一些供读者补证和查阅的内容, 但不附习题, 免得陷于题海, 令人望而却步. 为便于初学者, 书中还设有一些带 “*” 号的内容, 已学过的对此可暂不阅读.

(2) 要在书的每一章体现出对一元微积分的深化. 也就是要按前面提到的五条深化设想, 从不同角度、不同层面在每一章中实现.

(3) 要把本书写成引论的形式, 即深化的引论. 这就是说, 本书是一本小册子, 篇幅只有 150 页上下, 深化部分并未展开, 以期给读者们留有扩展空间和回旋余地. 自然, 这也有助于扩大读者群.

最后, 任雪昆还完成了本书的统稿、定稿、绘图、打印的全部工作.

在此, 衷心感谢哈尔滨工业大学数学系对本书出版的大力支持, 感谢系主任薛小平教授在百忙中承担的主审工作, 这对本书质量的提高起了重要的作用. 还要感谢科学出版社责任编辑张中兴所做的大量编辑工作和付出的辛勤劳动.

由于作者水平所限, 书中不足和疏漏在所难免, 离 “深化五设想” 和 “撰稿三原则” 尚有差距, 望读者不吝赐教.

吴从炘

2011 年 3 月 8 日

目　　录

第 1 章　实数基本定理与距离结构

1.1　数列极限与实数基本定理 1

定义 1.1　设 $\mathbb{R}$ 为所有实数的集合, $\mathbb{N}$ 为所有正整数的集合, $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. 我们称 a 为 $\{a_n\}$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (或 $a_n \to a$ 当 $n \to \infty$) 是指: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geqslant N$ 时有

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

由任意的通常一元函数微积分教程 (以下简称 "教程") 有如下命题中的 (1)~(3):

命题 1.1　设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 则有

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n \ (= a \pm b)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n \ (= a \cdot b)$;

(3) 当 $b \neq 0$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \ \left(= \dfrac{a}{b}\right)$;

(4) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 且 $a_n > 0$, $a > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 则有

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a} \quad \left(= \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}\right).$$

证明　只证 (4). $\forall \varepsilon > 0$, 注意到

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|(\sqrt{a_n} - \sqrt{a})(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})|}{|\sqrt{a_n} + \sqrt{a}|} = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} < \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}}$$

便知欲使 $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| < \varepsilon$, 只需 $|a_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon$. 于是对 $\sqrt{a}\varepsilon > 0$ 利用 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的定义即知 $\exists N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geqslant N$ 时有 $|a_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon$, 从而 $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| < \varepsilon$, 亦即有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

实数基本定理 1　下列命题等价:

(1) 区间套定理, 即若

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots, \quad \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0,$$

则有 $a \in \mathbb{R}$ 使得 a 为所有闭区间 $[a_n, b_n]$ 的唯一公共点, 亦即有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{a\}$, 其中 $\{a\}$ 表示仅含单个点 a 的集合, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ 表示所有闭区间 $[a_n, b_n]$ 的交集;

(2) 柯西 (Cauchy) 收敛准则, 即若 $\{a_n\}$ 为柯西列 (也称基本列), 指的是: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ 使得当 $m,\ n \geqslant N$ 时有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon,$$

则有 $a \in \mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

证明　可自行查阅 "教程" 或尝试自证之.

注 1.1　虽然实数基本定理 1 中的 (1), (2) 相互等价, 但当各自的条件不满足时, 相应的结论可以不成立:

今考察 (1) 的结论. 对于非闭的区间套

$$(0,1] \supset \left(0, \frac{1}{2}\right] \supset \cdots \supset \left(0, \frac{1}{n}\right] \supset \cdots,$$

虽满足 $\frac{1}{n} - 0 \to 0$ 当 $n \to \infty$, 但却有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(0, \frac{1}{n}\right] = \varnothing$ (表示空集). 又对闭区间套

$$[0,2] \supset \left[0, 1+\frac{1}{2}\right] \supset \cdots \supset \left[0, 1+\frac{1}{n}\right] \supset \cdots,$$

由于不满足 $\left(1+\frac{1}{n}\right) - 0 \to 0$ 当 $n \to \infty$, 而出现 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left[0, 1+\frac{1}{n}\right] = [0,1]$, 并不是单个点的集合的情形.

至于其他更为简单情况的例子, 从略.

下面利用实数基本定理 1 计算某些数列的极限.

例 1.1　设 $x_1 \geqslant 1$, $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+x_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解　注意对于这种用递推公式表示的数列, 只要它的极限存在, 就可以通过对递推公式两边取极限的方法求得该数列的极限. 至于其极限的存在性, 则可以利用实数基本定理 1 得到证明. 因此, 如果可以证明该数列是柯西列, 那么利用实数基本定理 1 的 (2) 即有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 存在. 于是通过两边取极限并借助命题 1.1 可得

$$A = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1+x_n}\right) = 1 + \frac{1}{1 + \lim\limits_{n\to\infty} x_n} = 1 + \frac{1}{1+A},$$

即 $A^2-2=0$. 舍去 $A=-\sqrt{2}$, 便知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A = \sqrt{2}$.

现在来证明 $\{x_n\}$ 为柯西列: 因为由假设 $x_1 \geqslant 1$ 易知

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-x_n| &= \left|\left(1+\frac{1}{1+x_n}\right)-\left(1+\frac{1}{1+x_{n-1}}\right)\right| = \frac{|x_n-x_{n-1}|}{(1+x_n)(1+x_{n-1})} \\ &< \frac{|x_n-x_{n-1}|}{4} < \cdots < \frac{|x_2-x_1|}{4^{n-1}} \quad (n=2,3,\cdots),\end{aligned}$$

故当 $m>n\geqslant 2$ 时有

$$\begin{aligned}|x_m-x_n| &\leqslant \sum_{k=n}^{m-1}|x_{k+1}-x_k| < |x_2-x_1|\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{4^{k-1}} < |x_2-x_1|\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{4^{k-1}} \\ &= |x_2-x_1|\left(\frac{1}{4^{n-1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = |x_2-x_1|\frac{1}{3\cdot 4^{n-2}}.\end{aligned}$$

又欲使 $|x_2-x_1|\ \dfrac{1}{3\cdot 4^{n-2}}<\varepsilon$, 只需 $4^{n-2}>\dfrac{|x_2-x_1|}{3\varepsilon}$, 两边取对数, 得 $(n-2)\ln 4 > \ln\dfrac{|x_2-x_1|}{3\varepsilon}$, 即 $n>\left(\ln\dfrac{|x_2-x_1|}{3\varepsilon}/\ln 4\right)+2$. 于是取 $N=\left[\ln\dfrac{|x_2-x_1|}{3\varepsilon}/\ln 4\right]+3$(这里 $[a]$ 表示小于或等于 a 的最大正整数, 如 $[3.8]=3$, 称为 a 的整数部分) 便知当 $m,n\geqslant N$ 时有 $|x_m-x_n|<\varepsilon$, 即 $\{x_n\}$ 为柯西列.

注 1.2　利用实数基本定理 1 的 (1) 知: 若 $[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$ 为闭区间套且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, 则当 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 时有 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ 存在且有

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

但是当 $[a_n,b_n]$ 不是闭区间套时, 从 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ 和 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 并不能推出 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ 存在. 例如, 设 $c_n=n,\ a_n=n-\dfrac{1}{n},\ b_n=n+\dfrac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$, 显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ 和 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$ $(n=1,2,\cdots)$, 然而 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ 并不存在.

由注 1.2 可知, 下列的夹挤定理可以看成是实数基本定理 1 的 (1) 的一种演变, 它也是求数列极限的一种重要方法.

命题 1.2 (夹挤定理)　设 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, 则当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 至少有一存在时, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ 存在且

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

证明 由假设易知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 均存在且相等, 设其共同值为 a. 今证 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ 也成立.

事实上, $\forall\varepsilon > 0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ 知, $\exists N_1$, $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geqslant N_1$ 时有

$$|a_n - a| < \varepsilon, \text{ i.e. } a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

(i.e. 意指: 即), 又当 $n \geqslant N_2$ 时有

$$|b_n - a| < \varepsilon, \text{ i.e. } a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon.$$

命 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n \geqslant N$ 时有

$$a - \varepsilon < a_n \leqslant c_n \leqslant b_n < a + \varepsilon,$$

即

$$|c_n - a| < \varepsilon,$$

这表明 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

例 1.2 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{n+1}\right)$.

解 首先注意 $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$. 于是可得

$$(2n+2)\cdot\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{n+1} \leqslant (2n+2)\cdot\frac{1}{n}\ .$$

易见 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n} = 2$, 故由命题 1.2 知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right) = 2.$$

例 1.3 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot\ \cdots\ \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ \cdots\ \cdot 2n}$.

解 利用常见的不等式

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \quad (a, b > 0,\ a \neq b)$$

立得

$$\sqrt{(2n-1)(2n+1)} < 2n \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

于是有

$$0<\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot2n}=\frac{\sqrt{1\cdot3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3\cdot5}}{4}\cdots\frac{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}{2n}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$
$$<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\to0\quad(n\to\infty),$$

从而由命题 1.2 得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot2n}=0.$$

1.2　有界性与实数基本定理 2

定义 1.2　我们称 $E\subset\mathbb{R}$ 为有界, 指的是: $\exists M>0$ 使得 $\forall x\in E$ 有 $|x|<M$; 也就是说, $E\subset(-M,M)$, 即 $\mathbb{R}$ 中的集 E 被包含在 $\mathbb{R}$ 中的某个点 —— 零点的某一邻域 $(-M,M)$ 内.

实数基本定理 2　下列命题等价, 并且与实数基本定理 1 中的 (1) 与 (2) 均等价.

(3) 聚点原理, 即若 $E\subset\mathbb{R}$ 为有界的无限集, 则有 $c\in\mathbb{R}$ 使得 c 为 E 的聚点 (指 $\forall\varepsilon>0$ 在 c 的 ε 邻域 $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$ 中必有异于 c 的 E 中的点);

(4) 有界紧性, 即若 E 为 $\mathbb{R}$ 中的有界集, 则对任何 E 中的序列 $\{a_n\}$ 必有子列 $\{a_{n_k}\}$ 和 $a\in\mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=a$;

(5) 有限覆盖定理, 即若开区间族 $\{(a_\tau,b_\tau)\}_{\tau\in\Omega}$ 为闭区间 $[a,b]$ 的覆盖, 意指 $\bigcup\limits_{\tau\in\Omega}(a_\tau,b_\tau)\supset[a,b]$(这里 "$\bigcup$" 表示 "集合的并"), 则有 τ_1, τ_2, $\cdots$, $\tau_N\in\Omega$ 使得 $\{(a_{\tau_k},b_{\tau_k})\}_{k=1}^N$ 也是 $[a,b]$ 的覆盖, 即 $\bigcup\limits_{k=1}^N(a_{\tau_k},b_{\tau_k})\supset[a,b]$.

证明　只证实数基本定理 1 中的 (1) 可推出这里的 (3), 其余可自行查阅 "教程" 或尝试自证之.

因为 E 有界, 故不妨设有闭区间 $[a,b]\supset E$. 将 $[a,b]$ 二等分成两个闭区间 $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ 和 $\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$, 显然其中至少有一个闭区间含有 E 中无限多个点, 记该闭区间为 $[a_1,b_1]$, 以此类推, 就可以得到一个包含 E 中的无限多个点的闭区间列:

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$$

并且 $[a_n,b_n]$ 的长度为

$$b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)\to0\ \ (n\to\infty).$$

于是, 由实数基本定理 1 的 (1) 可知有唯一的 $c\in\mathbb{R}$ 使得 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{c\}$.

今证 c 就是 E 的聚点. 事实上, 对 c 的任何 ε 邻域 $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$, 由于 $c\in[a_n,b_n]$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ 且 $b_n-a_n\to 0$ $(n\to\infty)$, 所以必有 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geqslant N$ 时 $[a_n,b_n]\subset(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$, 从而在 $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$ 中含有无限多个 E 中的点, 即 c 为 E 的聚点.

注 1.3 虽然上述的 (3)~(5) 相互等价, 但当各自的条件不满足时, 相应的结论可以不成立:

容易看出, 开区间族 $\left\{\left(\dfrac{1}{n},2\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 具有性质: $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n},2\right)\supset(0,1]$, 但其中的有限多个开区间都不能覆盖 $(0,1]$, 这表明当一族开区间覆盖非闭的区间时 (5) 的结论并不一定成立. 至于其他情形可自行讨论之.

注 1.4 在文献 [1] 中还有与 (5) 相等价的

(5*) 若开集族 $\{G_\tau\}_{\tau\in\Omega}$ 为有界闭集 $E\subset\mathbb{R}$ 的覆盖 $\bigcup\limits_{\tau\in G}G_\tau\supset E$, 则有 $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_N\in\Omega$ 使得 $\{G_{\tau_k}\}_{k=1}^{N}$ 也是 E 的覆盖 $\bigcup\limits_{k=1}^{N}G_{\tau_k}\supset E$.

其中, 我们称闭集的补集为开集, 而闭集则是指: 包含它的所有聚点的集合, 又集 $E\subset\mathbb{R}$ 的补集记作 $\mathbb{R}\setminus E$.

(5) 与 (5*) 相等价是文献 [1] 中 36 页的定理 1.22, 它的证明用到 $\mathbb{R}$ 中开集的构造区间的表示定理, 即文献 [1] 中 34 页定理 1.20, 此处从略.

1.3 实数基本定理 1 在距离空间中的相应形式

定义 1.3 设 X 为非空集, 若对任何 $x,y\in X$ 都有 $\rho(x,y)\geqslant 0$ 与之相应, 并且满足下列条件:

(1) $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(3) $\rho(x,y)+\rho(y,z)\geqslant\rho(x,z)$, $\forall x,y,z\in X$,

则称 ρ 为 X 上的距离, 也称为度量, 又称 (X,ρ) 为距离空间. 当 $\rho(x_n,x)\to 0$ $(n\to\infty)$ 时称 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

例 1.4 实数集 $\mathbb{R}$ 关于距离 $\rho(x,y)=|x-y|$ $(\forall x,y\in\mathbb{R})$ 显然为距离空间.

例 1.5　有理数全体关于距离 $\rho(x,y)=|x-y|$ 显然也是距离空间, 它也可以看成是 $\mathbb{R}$ 的子空间.

注 1.5　注意同一个非空集 X, 定义不同的距离就可以得到不同的距离空间, 但它们所对应的收敛概念有可能还是相同的. 例如, 对 $\mathbb{R}^2=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2):x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$, 定义

$$\rho_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2},\quad \rho_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|,$$

$$\rho_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}.$$

易知 ρ_1,ρ_2,ρ_3 均为 $\mathbb{R}^2$ 上的距离, 即 $(\mathbb{R}^2,\rho_i)$ $(i=1,2,3)$ 是不同的距离空间, 但它们所对应的收敛概念却是相同的. 容易看出: 当 $i=1,2,3$ 时均有

$$\rho_i(x^{(n)},x)\to 0\ \ (n\to\infty)\quad\Leftrightarrow\quad |x_1^{(n)}-x_1|\to 0,\ |x_2^{(n)}-x_2|\to 0\quad (n\to\infty).$$

定义 1.4　设 (X,ρ) 为距离空间, $a\in X$, $E\subset X$, $r>0$.

(1) 称 $S(a,r)=\{x\in X:\rho(a,x)<r\}$ 为以 a 为心, 以 r 为半径的 X 中的球, 也称为 a 的 r 邻域;

(2) 称 a 为 E 的聚点是指: $\forall r>0$, 在 a 的 r 邻域中必有异于 a 的 E 中的点;

(3) 若 E 包含它的所有聚点的集合, 则称 E 为闭集;

(4) 若 E 的补集 $X\backslash E$ 为闭集, 则称 E 为开集;

(5) 若存在某个球 $S(a,r)$ 使得 $E\subset S(a,r)$, 则称 E 为有界集.

命题 1.3　$S(a,r)$ 为 X 中的开集.

证明　由定义 1.4, 只需证其补集 $X\setminus S(a,r)$ 为闭集, 又只需证 $S(a,r)$ 中的点都不是 $X\setminus S(a,r)$ 的聚点, 即只需证 $\forall x\in S(a,r)$, $\exists x$ 的邻域 $S(x,t)$ 使得其内没有 $X\setminus S(a,r)$ 的点.

事实上, 取 $t=r-\rho(a,x)>0$ 即可: 设 $y\in S(x,r-\rho(a,x))$, 则因

$$\rho(a,y)\leqslant\rho(a,x)+\rho(x,y)<\rho(a,x)+(r-\rho(a,x))=r,$$

故 $y\notin X\setminus S(a,r)$.

类似地, 可证得

命题 1.4　$\overline{S}(a,r)=\{x\in X:\rho(a,x)\leqslant r\}$ 为 X 中的闭集.

命题 1.5　设 X 为距离空间, $G\subset X$ 为开集, 则对任何 $x\in G$ 存在 $r>0$ 使得 $x\in S(x,r)\subset G$.

证明　否则, 对任何 $n \in \mathbb{N}$ 有 $x_n \in S\left(x, \dfrac{1}{n}\right)$ 且 $x_n \notin G$, 即 $x_n \in X \setminus G$. 显然, 由 $\rho(x, x_n) < \dfrac{1}{n} \to 0\ (n \to \infty)$ 可得 $x_n \to x\ (n \to \infty)$, 而 $X \setminus G$ 为闭集, 于是知 $x \in X \setminus G$, 发生矛盾.

下面讨论实数基本定理 1 在距离空间中的相应形式, 即完备性定理.

完备性定理　设 (X, ρ) 为距离空间, 则下列两个命题等价:

(1′) 闭球套定理, 即若

$$\overline{S}(a_1, r_1) \supset \overline{S}(a_2, r_2) \supset \cdots \supset \overline{S}(a_n, r_n) \supset \cdots, \quad \lim_{n \to \infty} r_n = 0,$$

则有 $a \in X$ 使得 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{S}(a_n, r_n) = \{a\}$.

(2′) 柯西收敛准则, 即若 $\{x_n\} \subset X$ 为柯西列 (也称基本列), 指的是: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ 使得当 $m, n \geqslant N$ 时有

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

则有 $x \in X$ 使得 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

证明　(1′) ⇒ (2′)

设 $\{x_n\} \subset X$ 为柯西列, 则 $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists n_k \in \mathbb{N}$ 使得 $n_{k+1} \geqslant n_k$ 且

$$\rho(x_n, x_{n_k}) < \frac{1}{2^{k+1}} \quad (n \geqslant n_k).$$

今证 $\left\{\overline{S}\left(x_{n_k}, \dfrac{1}{2^k}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ 为闭球套, 从而由 (1′) 知存在 $x \in X$ 使得

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{S}\left(x_{n_k}, \frac{1}{2^k}\right),$$

于是当 $n \geqslant n_k$ 时有

$$\rho(x_n, x) \leqslant \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x) < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^k} = \frac{3}{2^{k+1}} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

这表明 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, 即 (2′) 获证.

事实上, $\forall y \in \overline{S}\left(x_{n_{k+1}}, \dfrac{1}{2^{k+1}}\right)$, 由

$$\rho(x_{n_k}, y) \leqslant \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, y) \leqslant \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}$$

立得 $y \in \overline{S}\left(x_{n_k}, \dfrac{1}{2^k}\right)$ $(k=1,2,\cdots)$, 即 $\left\{\overline{S}\left(x_{n_k}, \dfrac{1}{2^k}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ 为闭球套.

$(2') \Rightarrow (1')$

设 $\{\overline{S}(a_n, r_n)\}$ 为闭球套且 $r_n \to 0\ (n\to\infty)$, 则当 $m>n$ 时有 $a_m \in \overline{S}(a_m, r_m) \subset \overline{S}(a_n, r_n)$, 故得

$$\rho(a_m, a_n) \leqslant r_n \to 0 \quad (n\to\infty).$$

易知, 这表明 $\{a_n\}$ 为柯西列. 因此, 由 $(2')$ 存在 $a\in X$ 使得 $a_n \to a\ (n\to\infty)$. 如果存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $a \notin \overline{S}(a_N, r_N)$, 则有 $\rho(a, a_N) > r_N$. 命 $r = \rho(a, a_N) - r_N > 0$, 易知当 $n \geqslant N$ 时有

$$S(a,r)\cap \overline{S}(a_n, r_n) \subset S(a,r)\cap \overline{S}(a_N, r_N) = \varnothing.$$

这表明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 并不成立, 发生矛盾. 由此可见 $a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{S}(a_n, r_n)$.

另外, 若 $b \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{S}(a_n, r_n)$, 则有

$$\rho(a,b) \leqslant \rho(a, a_n) + \rho(a_n, b) \leqslant 2r_n \to 0 \quad (n\to\infty),$$

故 $\rho(a,b)=0$, 即 $b=a$. 最后证得 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{S}(a_n, r_n) = \{a\}$, 即 $(1')$ 得证.

注 1.6　显然, 对例 1.5 所给出的距离空间, 完备性定理就不成立, 譬如取极限为无理数的有理数柯西列就可以说明对例 1.5 而言柯西收敛准则并不成立.

定义 1.5　距离空间 (X,ρ) 叫做完备的, 是指: 在 X 中柯西收敛准则成立.

*1.4　实数基本定理 2 在距离空间中的相应形式

有界紧性定理　设 (X,ρ) 为距离空间, 则下列命题等价:

$(3')$ 聚点原理, 即若 $E\subset X$ 为有界的无限集, 则有 $c\in X$ 使得 c 是 E 的聚点.

$(4')$ 有界紧性, 即若 $E\subset X$ 为有界集, 则对任何 E 中的序列 $\{a_n\}$ 必有子列 $\{a_{n_k}\}$ 和 $a\in X$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

$(5^{*\prime})$ 有限覆盖定理, 即若开集族 $\{G_\tau\}_{\tau\in\Omega}$ 为有界闭集 $E\subset X$ 的覆盖, 意指 $\bigcup\limits_{\tau\in\Omega} G_\tau \supset E$, 则有 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_N \in \Omega$ 使得 $\{G_{\tau_k}\}_{k=1}^{N}$ 也是 E 的覆盖, 即 $\bigcup\limits_{k=1}^{N} G_{\tau_k} \supset E$.

证明　$(3') \Rightarrow (4')$

若有界集 E 为有限集, 则对任何序列 $\{a_n\}\subset E$ 必有 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得 $\{a_n\}$ 有子列 $\{a_{n_k}\}$ 满足 $a_{n_k}=a_{n_0}$ $(k=1,2,\cdots)$, 于是得到 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=a_{n_0}$.

若有界集 E 为无限集, 则不妨设 $\{a_n\}\subset E$ 为无限集. 由 (3′) 知 $\{a_n\}$ 有聚点 $a\in X$. 于是对任何 $k\in\mathbb{N}$ 必存在 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 使得

$$a_{n_k}\in S\left(a,\frac{1}{k}\right),\quad a_{n_k}\neq a,$$

即有 $\rho(a,a_{n_k})<\dfrac{1}{k}\to 0$ $(k\to\infty)$, 故 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=a$. 从而 (4′) 得证.

(5*′) ⇒ (3′)

若 (3′) 不成立, 则存在 X 的有界无限子集 E 在 X 中没有聚点, 从而又必存在 E 的无限子集 $F=\{x_n\}$ 在 X 中没有聚点, 于是 F 为有界闭集. 命

$$F_n=\{x_{n+1},x_{n+2},\cdots\}\quad(\forall n\in\mathbb{N}).$$

显然, F_n 也是闭集, 于是 $G_n=X\setminus F_n$ 为开集 $(\forall n\in\mathbb{N})$. 易见

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\supset\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}=F,$$

即 $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为有界闭集 F 的开覆盖. 因此, 由 (5*′) 知存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $\bigcup\limits_{n=1}^{N}G_n\supset F$. 但另一方面, 显然有 $x_{N+1},x_{N+2},\cdots\notin\bigcup\limits_{n=1}^{N}G_n$, 发生矛盾, 即 (3′) 获证.

(4′) ⇒ (5*′)

(1) 先证开集族 $\{G_\tau\}_{\tau\in\Omega}$ 为开集列 $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的情形时, (5*′) 成立.

若不然, 则对任何 $n\in\mathbb{N}$, $\bigcup\limits_{k=1}^{n}G_k\supset E$ 不成立, 即必有 $x_n\in E\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{n}G_k$. 于是由 (4′) 知,$\{x_n\}$ 有子列 $\{x_{n_l}\}$ 和 $x_0\in X$ 使得 $x_{n_l}\to x_0$ $(l\to\infty)$, 从而由 E 为闭集即得 $x_0\in E$.

另一方面, 由 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n\supset E$ 知存在 G_{n_0} 使得 $x_0\in G_{n_0}$, 再由命题 1.5 知存在 $r>0$ 使得 $x_0\in S(x_0,r)\subset G_{n_0}$. 又从 $x_{n_l}\to x_0$ $(l\to\infty)$ 知存在 $N\in\mathbb{N}$ 且 $N>n_0$, 当 $l\geqslant N$ 时有 $x_{n_l}\in S(x_0,r)\subset G_{n_0}$, 这表明当 $l\geqslant N$ 时 $x_{n_l}\notin E\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{n_0}G_k$. 因此, 发生矛盾.

(2) 再证若开集族 $\{G_\tau\}_{\tau\in\Omega}$ 覆盖有界闭集 E, 则必有该开集族中的开集列 $\{G_{\tau_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_{\tau_n}\supset E$ 仍成立, 从而再由前段所证, (5*′) 获证.