21世纪高等学校本科系列教材

信号与系统

XINHAO YU XITONG

向 军 万再莲 周 玮 编著

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

信号与系统

向　军　万再莲　周　玮　编著

重庆大学出版社

内容提要

本书全面系统地论述了信号与线性时不变系统分析的基本理论和方法。全书共分10章，主要包括信号与系统的基本概念、连续信号的时域分析、连续系统的时域分析、连续信号的频域分析、连续系统的频域分析、连续信号的复频域分析、连续系统的复频域分析、离散信号的分析、离散系统的分析、信号与系统的MATLAB辅助分析。

本书可作为高等学校电气类、电子类、电工类、通信类、计算机类各专业的教材，也可供相关专业工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统/向军、万再莲等编著. —重庆：重庆大学出版社,2011.1

(电气工程及其自动化专业本科系列教材)

ISBN 978-7-5624-5487-8

Ⅰ.①信… Ⅱ.①向… Ⅲ.①信号系统—高等学校—教材 Ⅳ.①TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第110797号

信号与系统

向 军 万再莲 周 玮 编著

策划编辑：周 立

责任编辑：李定群 高鸿宽 版式设计：周 立

责任校对：任卓惠 责任印制：赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：邓晓益

社址：重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)内

邮编：400030

电话：(023) 65102378 65105781

传真：(023) 65103686 65105565

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆华林印务有限公司印刷

*

开本：787×1092 1/16 印张：20.25 字数：505千

2011年1月第1版 2011年1月第1次印刷

印数：1—3 000

ISBN 978-7-5624-5487-8 定价：38.00元

前言

人类社会已经进入信息时代,1948 年创立的系统论、信息论和控制论是奠定现代信息社会的三大理论基石。三大理论都包含了信号与系统的基本概念,这些概念出现在社会生活的各个领域,与这些概念有关的思想和方法在各科学技术领域起着十分重要的作用,如通信与信息传输、自动控制、生物工程、语音处理等。

信号与系统课程分析研究的是信号与系统理论中的基本概念及分析方法,该课程也是高等工科院校通信工程、电子信息工程、自动化、机电一体化等专业一门重要的专业基础课。

本书的主要内容共分为 10 章,各章依次为基本概念、连续信号的时域分析、连续系统的时域分析、连续信号的频域分析、连续系统的频域分析、连续信号的复频域分析、连续系统的复频域分析、离散信号的分析、离散系统的分析、信号与系统的 MATLAB 辅助分析。

本书的主要特点有:

(1)全书内容按照"先连续后离散、先信号后系统"的顺序,以模块化的方法组织内容,将信号和系统的各种分析方法分别独立成章,以便在教学时根据实际情况对教学内容和顺序进行灵活取舍。例如,如果拉普拉斯变换已经在复变函数与积分变换课程作了详细介绍,则可以略讲或跳过连续信号的复频域分析。根据实际情况,可以在教学时先完整地介绍信号的时域、频域和复频域分析方法,再介绍系统的各种分析方法。

(2)全书内容突出了本课程在专业教学计划上所起的承上启下作用。在相应章节中列举了大量实例,分别介绍了通信系统中调制解调、闭环控制系统的性能分析以及数字滤波的基本概念。这些内容在各专业后续的专业课程中将详细介绍。通过这些实例,可以使读者初步体会到本课程的基本概念和方法在后续课程中的作用。

(3)全书内容重在实际应用,尽量避免复杂的数学推导。全书涉及的数学公式较多,介绍时尽量强调这些公式表示的物理含义及其在信号和系统分析中的实际应用。

本书编者长期在西南交通大学和四川师范大学成都学院从事信号与系统以及相关课程的教学和研究工作,本书也是在教学讲义的基础上整理而成的。全书内容由向军主编,万再莲和周玮对全书的例题和习题进行了仔细核对。本书的出版得到了四川师范大学成都学院的大力支持。重庆大学出版社的责任编辑周立为本书的及时出版做了大量工作。在此,对上述同志一并致以衷心的感谢,同时感谢本书参考文献中所提及的所有国内外作者。

由于编者水平有限，书中难免有疏漏和不当之处，恳请读者提出宝贵意见。

编　者

2010年10月

目录

第 1 章 基本概念

本章介绍信号和系统的基本概念、描述方法及分类,以及线性时不变系统的概念及特性,为进一步学习信号与系统的分析方法打下基础。

1.1 信号与系统的基本概念

人类社会早已进入了信息时代,在社会活动和日常生活中都离不开对自然界中各种信息的获取。信息是信息论中的基本概念,它指的是人们从接触和感知到的自然现象中提取出来的有意义的内容。在信息时代,人类都生活在信息的海洋中,每时每刻都在接收和处理各种对自己有用的信息。

信息和消息是密切相关的。消息指的是人类感官能够感知的语音、图像、文字符号等。消息是信息的载体,任何信息都必须借助于合适的消息才能进行传输和处理。

很久以来,人类一直在探求各种有效的方法来传递信息和消息,从原始的声、光等直接传播方式发展到通过语言、文字符号等进行传递。在现代社会,信息和消息的传播是与电磁波传播紧密联系在一起的,如电报、电话、无线电广播、电视、通信卫星等一系列现代电磁传播媒介的出现,这是人类信息传播史上具有划时代意义的革命。

各种信息和消息的传送都必须借助于一定形式的信号进行。所谓**信号**,是指信息和消息传播的载体和工具,或者说是信息和消息的具体表现形式。典型的信号有声音信号、光信号、电信号、温度信号、压力信号等。在各种信号中,电信号是一种最便于传输、处理和变换的信号,其具体表现形式可以是电压、电流、功率、电荷等。实际系统中的各种消息信号,一般都可以通过适当的传感变换装置转换为相应的电信号。例如,通过话筒将语音信号转换为电压信号,通过热电偶将温度信号转换为电流信号等。因此,本课程主要研究电信号的分析、处理和传输。

系统是一个广泛应用的术语,实际生活中有各种各样的系统,如工程上的通信系统、控制系统、人体上的消化系统、呼吸系统等。概括起来,**系统**是指由若干相互有联系的事物组合而成的整体,用于将送入系统的输入信号进行加工处理、运算变换得到期望的输出信号,或者将信号传输到接收端。所有的系统都可以视为一个处理器或者变换器,其基本作用是对信号进

行处理和变换。而信号是系统处理和变换的对象,各种信号都产生于系统,并且在系统中按照要求进行传输、处理和变换。因此,系统的概念与信号是密不可分的。

例如,一个电工学网络是由各种电路元件(电源、电阻、电感、电容等)相互连接起来构成的一个整体,用于将外部信号源送入的电压或电流信号进行规定的运算和变换(放大、滤波等)得到期望的输出电压或电流信号。再如,一个基本的通信系统是由发送设备、传输信道和接收设备构成的一个整体,如图 1.1.1(a)所示,其作用是进行信号和信息的传输,将来自于信源(话筒、摄像机等)的消息信号传送到接收端。而一个典型的闭环控制系统可以用图 1.1.1(b)表示,包括控制器和被控对象,为了实施闭环控制,还需要有反馈检测装置及比较器。该系统通过反馈检测装置对被控对象的指定参数信号(如温度、压力等)进行检测,再通过比较器与给定输入信号(被控参数的期望值)进行比较,得到误差信号。控制器根据误差信号计算得到所需的控制信号,将其送到被控对象,对指定的参数进行调节,使其达到给定值或者按照给定规律变化。

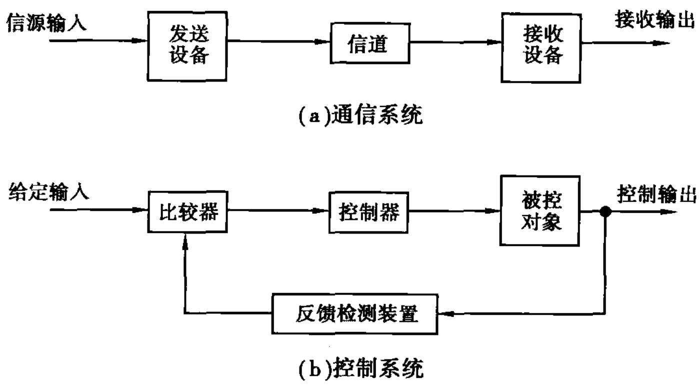

图 1.1.1　通信系统和控制系统的基本结构组成

任何一个系统至少有一个输入信号和一个输出信号,对比较复杂的系统,可能会有若干不同的输入和输出信号。输入信号又称为系统的激励,输出信号又称为系统的响应。输入信号、输出信号与系统的关系如图 1.1.2 所示。同一个系统,在不同的输入信号作用下将产生不同的输出。如果将相同的输入信号分别加到不同系统的输入端,其输出信号也会有所不同。

图 1.1.2　系统、激励与响应

1.2　信号的描述和分类

1.2.1　**信号的描述**

实际系统中的信号可以表现为不同的物理形式,为了便于对各种不同的信号进行分析,可以将其特性进行抽象概括,而用统一的数学方法进行描述。

一般来说,任何信号都表现为其幅度取值随一个或若干个参数而变化。例如,一个交流电压信号表示电路中某点的电压幅度随时间按正弦规律变化,而一幅黑白图像信号表示图像中各像素的灰度等级随像素所在的行列坐标而变化。因此,信号可用数学函数来描述,其中自变

量可以是时间、空间或者其他物理量，而函数值代表信号的幅度。根据信号的具体物理形式，函数值的量纲也不同。

考虑到大多数信号的自变量都是时间，因此，这里将所有信号函数表达式中的自变量都统一用时间 t 来表示。表示信号的函数名用小写字母表示，不同的信号用不同的字母或者下标来区分，如 $f(t)$，$y(t)$，$f_1(t)$，$y_f(t)$ 等。函数的具体表达式相应地称为信号的时间函数表达式。

例如，一个正弦信号，其时间函数表达式为

$$f(t) = 10\sin\frac{20\pi t + \pi}{2} \tag{1.2.1}$$

由式可知，该信号的幅度随时间按正弦函数规律而变化，因而称为正弦信号。假设该信号为电压信号，则其幅度为 10 V，角频率为 20π rad/s，初始相位为 $\pi/2$ rad。

数学上，所有的函数都可以用波形图来表示。因此，除了时间函数表达式外，信号还可以用时间波形图来描述。在时间波形图上，横轴代表时间，纵轴代表信号的幅度。如图 1.2.1 所示给出了上述正弦信号的时间波形。

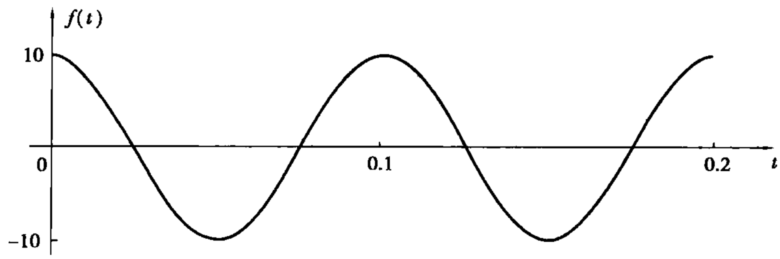

图 1.2.1　正弦信号的时间波形

波形图用图形的形式直观地描述了信号幅度随时间的变化规律。在实际系统中，信号的波形图可以用示波器等测量仪器直接得到。在信号分析时，借助于波形图可以很方便地对信号进行运算和变换，并对多个不同信号的特性进行比较。

时间函数表达式和时间波形图是信号的基本描述方法，由于这两种形式都是描述信号幅度随时间的变化规律，故称为信号的时域描述。在以后各章会看到，借助于傅里叶变换和拉普拉斯变换、Z 变换等数学工具，信号还可以有频域和复频域等描述方法。

1.2.2　信号的分类

实际系统中的信号是多种多样的，对不同类型的信号，分析方法也有区别。因此，在具体进行信号分析之前，必须首先了解信号属于哪种类型，从而采用相应的分析方法。

实际上，信号的名称也就说明了信号某一方面的特点或性质，据此可以得到不同物理形态和作用的信号，如电压信号、温度信号、手机信号、电视信号等。这里，主要按照信号的不同性质和数学特征对信号进行分类。

(1) 确定信号和随机信号

能够用确定的时间函数表达式或波形图描述，在任一指定时刻的幅度都可以根据函数表达式或波形图来确定，这样的信号称为**确定信号**。例如图 1.2.1 所示的正弦信号，其 3 个参数和函数表达式都是已知的，因此，在任意指定时刻的幅度都可以根据其波形图或函数表达式确定。

如果信号没有确定的时间函数表达式，在任一时刻的幅度取值事先都不可确定，而只知道幅度取为某个数值的概率有多大，这样的信号就称为**随机信号**。

本书只介绍确定信号的分析，但分析的结论也是随机信号分析的基础。

(2)**连续信号和离散信号**

如果在所研究的时间区间内，除了有限个间断点外，在每个时刻信号的幅度都有确定的定义，这样的信号就称为连续时间信号，简称为**连续信号**。

如果信号的幅度只在离散时刻上有定义，而在其他时刻幅度取值不确定，或者没有定义，这样的信号就称为离散时间信号，简称为**离散信号**。

显然，这里的连续和离散指的是在信号的时间函数表达式中，自变量 t 的取值是连续的还是离散的。默认情况下，时间 t 的取值范围为 $(-\infty, +\infty)$。在此范围内，除了在有限的个别时刻信号幅度取值不确定外，在其他任意时刻，信号的幅度都有确定的定义，或者说，自变量 t 可以取任意实数值，则这样的信号就是连续信号。

如果时间 t 只能取离散的某些值，信号只在这些离散时刻点上有定义，而在其他无穷多个时刻，信号的幅度都没有取值定义，则对应的信号为离散信号。在一种比较简单的情况时，t 的取值是等间隔的，即每隔相等的时间间隔 T 取一个值。此时显然有 $t = kT$，其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$。这样的离散信号通常简称为序列。

例如，在式(1.2.1)所示函数表达式中，自变量 t 默认情况下可以取任意实数，则该函数表示的正弦信号为连续信号。如果令 $t = kT$(k 为整数)，并且假设 $T = 0.01$ s，则

$$f(k) = 10\sin(0.2\pi k + \pi/2) \tag{1.2.2}$$

式中，自变量变为了一个整数变量 k，它只能离散地取整数数值。因此，该函数代表的信号就成为离散信号，称为正弦序列。根据式(1.2.2)作出正弦序列的波形如图 1.2.2 所示。

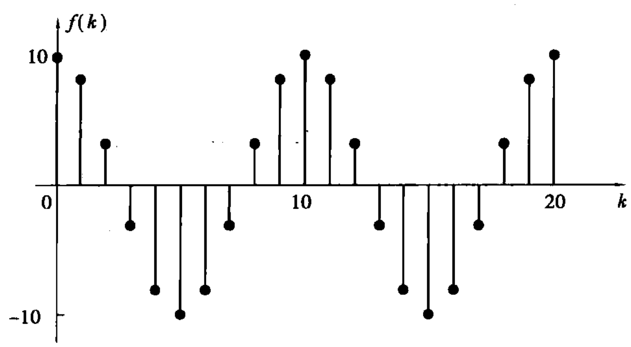

图 1.2.2　正弦序列的时间波形

比较图 1.2.1 和图 1.2.2 可知，连续信号的时间波形一般为连续的直线或曲线，其中可以在个别时刻存在间断点。信号在各时刻幅度都有定义，当然允许在有限的间断点时刻没有定义。而离散信号的时间波形是由在横轴方向离散的点构成，除了这些离散时刻外，在其他很多时刻信号的幅度都没有定义。在有定义的时刻，一般通过这些点用实线向横轴作垂线以指示各点对应的 k 的取值。

(3)**周期信号和非周期信号**

信号幅度随时间的变化规律每隔一段时间就重复一次，并且沿时间轴方向重复无穷多次，这样的信号称为**周期信号**。凡是不具有上述特点的信号都称为**非周期信号**。与周期信号相

比，非周期信号的幅度在时间上不具有周期性和重复性。

对连续信号 $f(t)$，若其函数表达式满足

$$f(t) = f(t + mT), m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{1.2.3}$$

则 $f(t)$ 称为连续时间周期信号，且周期为 T，表示一个周期持续的时间长度，并且将

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \tag{1.2.4}$$

称为该周期信号的基波角频率，单位为 rad/s。

对离散信号 $f(k)$，若其函数表达式满足

$$f(k) = f(k + mN), m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{1.2.5}$$

则称为离散周期信号或周期序列，且周期为 N，表示一个周期中包括有几个点，并且将

$$\Omega = \frac{2\pi}{N} \tag{1.2.6}$$

称为该离散周期信号的基波角频率。显然，N 是没有单位的正整数，相应的 Ω 的单位为 rad，称为数字角频率。

典型的周期信号是用正弦函数等周期函数描述的信号。如果某信号是由若干个周期信号叠加而成的，例如，

$$f(t) = A_1\sin(\Omega_1 t + \varphi_1) + A_2\sin(\Omega_2 t + \varphi_2)$$

则必须满足各周期信号的周期之比为整数之比，即

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi/\Omega_1}{2\pi/\Omega_2} = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \frac{m}{n}$$

其中，m 和 n 必须为整数。此时，信号 $f(t)$ 为周期信号，且其周期为 T_1 和 T_2 的最小公倍数。

周期信号的概念及应用在信号与系统分析中具有十分重要的意义，在以后各章将会陆续介绍。

(4) **能量信号和功率信号**

信号的能量和平均功率分别定义为

$$E = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.2.7}$$

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.2.8}$$

如果已知信号的函数表达式，即可分别由以上两式计算其能量和平均功率。需要注意的是，电工学中定义的电信号的能量和功率与上述定义不同，可以认为以上定义表示信号在单位电阻（1 Ω）上消耗的能量和功率。

不同的信号，其能量和平均功率也不同。如果信号的能量为有限值，而平均功率为零，则称为**能量信号**。如果能量为无穷大，而平均功率为有限值，则称为**功率信号**。

典型的能量信号包括持续时间有限的信号和幅度随时间逐渐衰减到零的信号，典型的功率信号包括周期信号和随机信号等。对周期信号，其平均功率的计算公式可以简化为

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.2.9}$$

式中，T 为周期信号的周期，t_0 为任一实常数。

例 1.2.1 如图 1.2.3 所示信号，分别判断它们是能量信号还是功率信号。

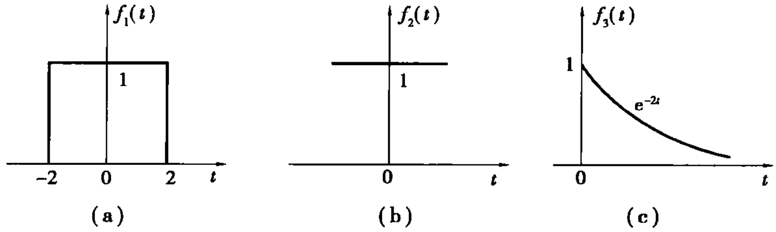

图 1.2.3 例 1.2.1 图

解 1）信号 $f_1(t)$ 的表达式为

$$f_1(t)=\begin{cases}1 & |t|<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

根据定义求得其能量和平均功率分别为

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}f_1^2(t)\,dt=\lim_{T\to\infty}\int_{-2}^{2}1^2dt=\lim_{T\to\infty}4=4$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_1^2(t)\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-2}^{2}1^2dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}4=0$$

由于能量为有限值，平均功率为零，因此 $f_1(t)$ 为能量信号。

2）信号 $f_2(t)$ 的表达式为 $f_2(t)=1$，这是一个直流信号。根据定义同样求得其能量和平均功率分别为

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}f_2^2(t)\,dt=\lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}1^2dt=\lim_{T\to\infty}T=\infty$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_2^2(t)\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}1^2dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}T=1$$

由于能量为无穷大，平均功率为有限值，因此 $f_2(t)$ 为功率信号。

3）信号 $f_3(t)$ 的表达式为

$$f_3(t)=\begin{cases}e^{-2t} & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

由定义分别求得其能量和平均功率分别为

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}f_3^2(t)\,dt=\lim_{T\to\infty}\int_{0}^{T/2}e^{-4t}dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4}(1-e^{-2T})=\frac{1}{4}$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_3^2(t)\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T/2}e^{-4t}dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}(1-e^{-2T})=0$$

由于能量为有限值，平均功率为零，因此 $f_3(t)$ 为能量信号。

（5）因果信号和非因果信号

在连续信号的时间函数表达式中，自变量 t 的取值范围为 $(-\infty,+\infty)$。如果当 $t<0$ 时，幅度恒为零，而在 $t\geqslant 0$ 时，幅度不恒为零，这样的信号就称为**因果信号**，或者单边信号。当 $t<0$ 时，其幅度不恒为零的信号称为**非因果信号**。

非因果信号又可以分为反因果信号和双边信号。当 $t\geqslant 0$ 时，幅度恒为零，而在 $t<0$ 时，幅度不恒为零，将这样的信号称为**反因果信号**。在 $t\geqslant 0$ 和 $t<0$ 的区间内，幅度都不恒为零的信

号称为**双边信号**。显然,双边信号可以分解为一个因果信号和一个反因果信号的叠加,分别称为该双边信号的因果部分和反因果部分。

例如,对图1.2.4中所示3个信号,其中$f_1(t)$为因果信号,$f_2(t)$为反因果信号,而$f_3(t)$为双边信号。根据波形图显然有$f_3(t)=f_1(t)+f_2(t)$,$f_1(t)$和$f_2(t)$分别为双边信号$f_3(t)$的因果部分和反因果部分。

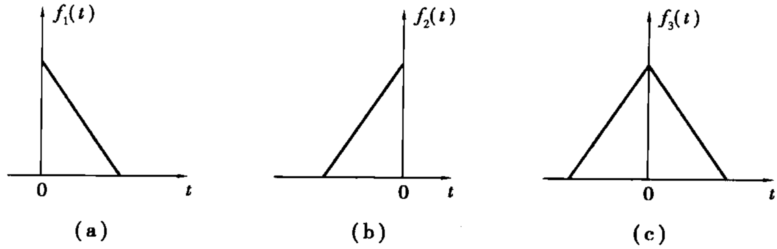

图1.2.4　因果、反因果和双边信号

对离散信号也有类似的分类。当自变量$k<0$时,幅度恒为零,而在$k\geq0$时,幅度不恒为零,这样的离散信号就称为因果序列,或者单边序列;当$k<0$时,幅度不恒为零,而在$k\geq0$时幅度恒为零,这样的离散信号称为反因果序列;当$k\geq0$和$k<0$时,幅度都不恒为零的离散信号称为双边序列。反因果序列和双边序列合称为非因果序列。

需要注意的是,因果信号和非因果信号没有本质上的区别,因为其定义中t(或k)=0时刻的确定带有一定的主观性。对于实际的信号,一般将产生该信号的起始时刻规定为t(或k)=0的时刻。在此时刻以前没有信号,意味着信号在t(或k)小于零时,幅度恒为零。因此,实际系统中的信号都可视为因果信号。

1.3　系统的描述和分类

1.3.1　系统的描述

实际的系统种类很多,其功能及工作原理也千差万别,为了便于用统一的数学方法对其进行分析和性能比较,需要首先用数学的方法进行描述。

对系统进行描述也就是建立系统的数学模型,系统模型是对系统特性和功能的一种抽象描述。可以用多种方法来描述一个具体的系统。例如,电路系统,可以用相应的电路图来描述,称为该系统的物理模型;根据电工学的基本理论,对组成电路的各元件特性进行抽象后,又可以用一定的数学关系来描述电路系统,称为系统的数学模型。对复杂的系统,还可以将其分解成一些子系统,每个子系统的特性经过抽象后用相应的数学关系描述,然后按照这些子系统在整个系统中的地位和作用将它们连接起来以构成大的系统,并且用方框图、信号流图等图形化的模型来描述各子系统之间的相互连接关系,称为图形化的系统模型。

(1)输入输出方程

任何一个系统至少有一个输入信号和一个输出信号。由于所有系统的功能都是对输入信号进行运算变换后得到相应的输出信号,因此,描述一个系统最直接的方法就是规定和说明系

统输入输出信号之间的运算关系。

假设系统的输入信号为$f(t)$,输出信号为$y(t)$,则其功能可以表示为

$$y(t)=T[f(t)] \tag{1.3.1}$$

式中,T表示将输入信号$f(t)$变换得到输出信号$y(t)$。

大多数情况下,上述输入输出之间的变换关系都可以近似用线性常系数的微分方程来描述,即

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m} b_j f^{(j)}(t) \tag{1.3.2}$$

式中,$a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$和$b_j(j=0,1,2,\cdots,m)$分别为方程中各项的系数,一般a_n取为1。$y^{(i)}(t)$和$f^{(j)}(t)$分别表示系统输入输出信号的i阶和j阶导数。

式(1.3.2)用微分方程的形式来描述一个系统,方程左右两边都只含有系统的输出信号和输入信号以及它们的各阶导数,称为系统的输入输出方程。其中,n代表该微分方程的阶,也称为系统的阶。

例 1.3.1　求如图1.3.1所示电路系统的输入输出方程。已知输入、输出信号$f(t)$和$y(t)$都为电压信号。元件参数为:$R=1\ \Omega,L=1\ \text{H},C=0.25\ \text{F}$。

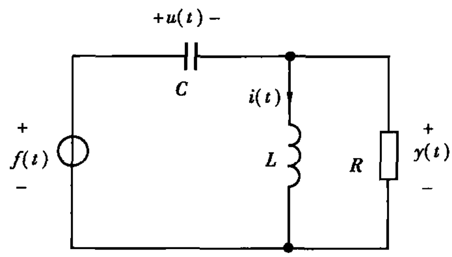

图1.3.1　例1.3.1图

解　设中间电流信号$u(t)$和$i(t)$如图1.3.1所示,则

$$f(t)=u(t)+y(t) \tag{①}$$

$$Cu'(t)=i(t)+\frac{1}{R}y(t) \tag{②}$$

$$Li'(t)=y(t) \tag{③}$$

对式①两边求导,并考虑到式②得

$$f'(t)=u'(t)+y'(t)=\frac{1}{C}i(t)+\frac{1}{RC}y(t)+y'(t)$$

再对上式两边求导,并将式③代入得

$$\begin{aligned}f''(t)&=\frac{1}{C}i'(t)+\frac{1}{RC}y'(t)+y''(t)\\&=\frac{1}{LC}y(t)+\frac{1}{RC}y'(t)+y''(t)\end{aligned}$$

整理得

$$y''(t)+\frac{1}{RC}y'(t)+\frac{1}{LC}y(t)=f''(t)$$

代入元件参数得

$$y''(t)+4y'(t)+4y(t)=f'(t)$$

这是一个二阶微分方程,因此该系统为二阶系统。

(2)状态空间方程

上述输入输出方程描述只关心系统输入输出信号之间的关系,而不直接涉及系统内部的情况。随着科学技术的发展,各种系统的功能不断完善,内部组成也越来越复杂。在实际应用中,不仅需要研究系统的输入输出关系,还需要研究系统内部的工作性能。这时就需要采用以系统内部变量为基础的状态空间描述。

状态空间描述是用状态变量描述系统的内部特性,并且通过状态变量将系统的输入输出信号联系起来,用于描述系统的外部特性。所谓状态变量,是表示系统运行状态所需的一组相互独立的信号,根据这些信号在某时刻的取值及系统在此时刻以后的输入可以完全确定系统各时刻的状态及其输出。

以电路系统为例,在列写其状态空间方程时,一般可取电路中流过电感的电流和电容两端的电压作为状态变量。根据电路分析得到各状态变量的一阶导数与状态变量和输入信号之间的关系,这些关系一般都可以用一组一阶微分方程表示,合称为系统的状态方程。此外,观察分析电路输出信号与各状态变量和输入信号之间的关系,可得到一个代数方程,该方程称为系统的输出方程。状态方程和输出方程合称为系统的状态空间方程。下面举例说明电路系统状态空间方程的建立方法。

例 1.3.2 求如图 1.3.1 所示电路系统的状态空间方程。

解 设电容两端的电压 $u(t)$ 和流过电感的电流 $i(t)$ 为状态变量,根据电路得到两个状态变量及其与输入电压 $f(t)$ 之间的关系,即

$$Cu'(t)=i(t)+\frac{1}{R}[f(t)-u(t)]$$

$$Li'(t)=f(t)-u(t)$$

整理得

$$u'(t)=-\frac{1}{RC}u(t)+\frac{1}{C}i(t)+\frac{1}{RC}f(t)$$

$$i'(t)=-\frac{1}{L}u(t)+\frac{1}{L}f(t)$$

将元件参数代入以上两式得

$$u'(t)=-4u(t)+4i(t)+4f(t) \quad ①$$

$$i'(t)=-u(t)+f(t) \quad ②$$

此外,由电路可以得到输出电压 $y(t)$ 与输入信号 $f(t)$ 及状态变量 $u(t)$ 和 $i(t)$ 之间的关系为

$$y(t)=f(t)-u(t) \quad ③$$

将式①、式②和式③分别用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} u'(t) \\ i'(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(t) \\ i(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}f(t) \quad ④$$

$$y(t)=\begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(t) \\ i(t) \end{bmatrix}+f(t) \quad ⑤$$