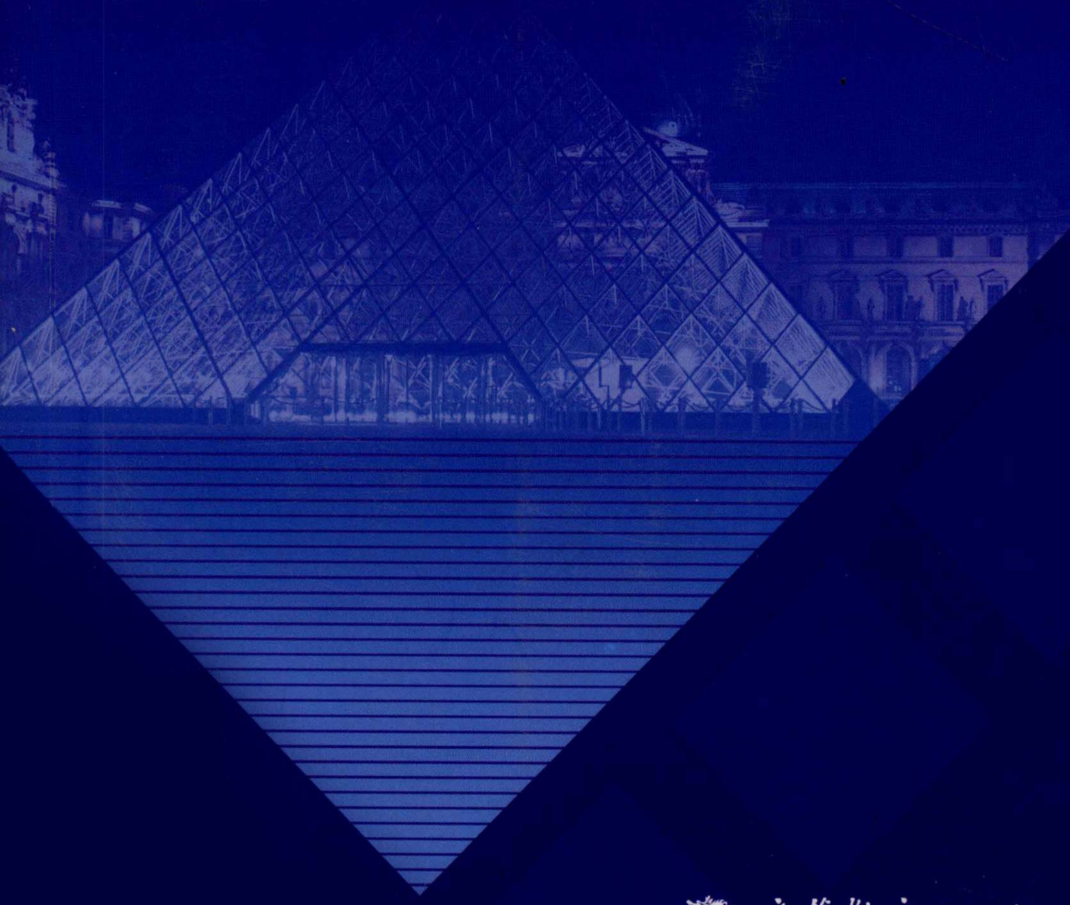
“十一五”国家重点图书

法兰西数学
精品译丛

解析与概率数论导引

□ G. 特伦鲍姆 著
□ 陈华一 译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

数学天元基金资助项目

解析与概率数论导引

Jiexi yu Gailü Shulun Daoyin

□ G. 特伦鲍姆　著
□ 陈华一　译

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目 (CIP) 数据

解析与概率数论导引 / (法) 特伦鲍姆著; 陈华一译.
— 北京: 高等教育出版社, 2011.1
ISBN 978-7-04-029467-5

I. ①解··· II. ①特··· ②陈··· III. ①解析数论 ②概率
-数论 IV. ①O156

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 131127 号

策划编辑	王丽萍	**责任编辑**	边晓娜	**封面设计**	张　楠
责任绘图	杜晓丹	**版式设计**	王　莹	**责任校对**	杨凤玲
责任印制	陈伟光				

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	涿州市京南印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092 1/16	**版　　次**	2011 年 1 月第 1 版
印　　张	39.25	**印　　次**	2011 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	750 000	**定　　价**	79.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　29467-00

《法兰西数学精品译丛》序

随着解析几何及微积分的发明而兴起的现代数学, 在其发展过程中, 一批卓越的法国数学家发挥了杰出的作用, 作出了奠基性的贡献。他们像灿烂的星斗发射着耀眼的光辉, 在现代数学史上占据着不可替代的地位, 在大学教科书、各种专著及种种数学史著作中都频繁地出现着他们的英名。在他们当中, 包括笛卡儿、费马、帕斯卡、达朗贝尔、拉格朗日、蒙日、拉普拉斯、勒让德、傅里叶、泊松、柯西、刘维尔、伽罗华、庞加莱、嘉当、勒贝格、魏伊、勒雷、施瓦茨及利翁斯等这些耳熟能详的名字, 也包括一些现今仍然健在并继续作出重要贡献的著名数学家。由于他们的出色成就和深远影响, 法国的数学不仅具有深厚的根基和领先的水平, 而且具有优秀的传统和独特的风格, 一直在国际数学界享有盛誉。

我国的现代数学, 在 20 世纪初通过学习西方及日本才开始起步, 并在艰难曲折中发展与成长, 终能在 2002 年成功地在北京举办了国际数学家大会, 在一个世纪的时间中基本上跟上了西方历经四个多世纪的现代数学发展的步伐, 实现了跨越式的发展。这一巨大的成功, 根源于好几代数学家持续不断的艰苦奋斗, 根源于我们国家综合国力不断提高所提供的有力支撑, 根源于改革开放国策所带来的强大推动, 也根源于很多国际数学界同仁的长期鼓励、支持与帮助。在这当中, 法兰西数学精品长期以来对我国数学界所起的积极影响, 法兰西数学的深厚根基、无比活力和优秀传统对我国数学家所起的不可低估的潜移默化作用, 无疑也是一个不容忽视的因素。足以证明这一点的是: 在我国的数学家中, 有不少就曾经留学法国, 直接受到法国数学家的栽培和法兰西数学传统和风格的熏陶与感召, 而更多的人也或多或少地通过汲取法国数学精品的营养而逐步走向了自己的成熟与辉煌。

由于语言方面的障碍, 用法文出版的优秀数学著作在我国的传播受到了较大的限制。根据一些数学工作者的建议, 并取得了部分法国著名数学家的热情支持, 高等教育出版社决定出版《法兰西数学精品译丛》, 将法国的一些享有盛誉并有着重要作用与影响的数学经典以及颇具特色的大学与研究生数学教材及教学参考书, 有选择地从法文原文分批翻译出版。这一工作得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的支持和赞助, 对帮助并推动我国读者更好地学习和了解法国的优秀数学传统和杰出数学成就, 进一步提升我国数学 (包括纯粹数学与应用数学) 的教学与研究工作的水平, 将是意义重大并影响深远的, 特为之序。

李大潜

2008 年 5 月

前言

本书基于笔者 15 年来在波尔多、巴黎及南锡讲授的研究生课程, 在 1990 年 Élie Cartan 研究所出版社版的基础上修改、更新、增订而成, 其英文版由剑桥出版社发行。此书旨在给年轻数学工作者提供自洽的算术问题的分析方法导引, 同时在一些基本问题上可供更有经验的研究人员查阅, 起到工具书的作用。这样的目标必然导致要有所取舍。本书的原则是在力所能及的前提下尽量从审美的角度来作选择。

上述双重目标促使了在各章中采用正文 — 注记 — 习题的传统模式。正文中的命题一般都有详细证明, 有时还附有参考文献, 以帮助读者初读时建立整体认识。相反地, 注记包括与正文相关的、虽不应忽视但在泛读时可以略过的定理或证明。习题兼有两种功能: 一部分经典的习题帮助读者掌握学到的概念; 而另一部分习题则是真正的研究成果, 有时甚至是新近发现的成果, 它们主要集中在第三部分。当前教程附带的习题有为难读者之势。笔者曾天真地认为, 通过精心编写不需巧妙构造或精湛技巧便可解答的习题可以避免这一点。然而第一版发行以后收到的许多对习题答案的询问说明了这很可能是不切实际的幻想。于是笔者与吴杰合作撰写了习题答案, 以飨读者。然而, 习题中未解决的问题只是少数; 另外, 习题所涉及的结论都是最常见的, 并指明了关键步骤。就算不努力求解或不看答案, 习题部分也可作为非正式的参考文献。

书中行文均力求偏重于方法而非结论。这样特定的尝试性选择导致了全文被略显人为地分成三部分: 初等方法, 复解析方法和概率方法。人们尽可以质疑这样的分类: 凭什么说基于 Poisson 求和公式的 van der Corput 方法比用复积分的 Selberg-Delange 方法要初等? 鞍点法的第一步是 Laplace 变换的

反转积分公式, 为何将它归为"概率"方法, 等等。从这样或那样的标准看来, 类似的疑问还很多。毋庸置疑, 这样的选择是基于带有争议的偏见之上的。比如, 初等方法的 "定义" 是只用到实变函数的方法; 采用概率观点陈述鞍点法是因为它在概率论中常常用到, 同时也因为在数论中, 它是用来解决概率素数论问题的特殊工具。总之, 本书的分类原则决非 Bourbaki① 式的, 它不过是试图为初学者指明方向而已。

虽然本书的内容并非均有新意, 但总是力求免落俗套。当笔者认为需要的时候, 便会对一些经典结论重新演绎: 要么采用新方法 (例如 Tchébychev 估计的 Nair 方法), 要么简化运算。虽然从目录上看改动并不明显, 但笔者希望这将对细心的读者有所裨益。

书中有些结果从未在文献中出现过, 主要有: Selberg-Delange 方法得出的一致结论 (第二部分第五章); Ikehara-Ingham 定理的显式余项形式 (第二部分 §7.5); 用鞍点法研究筛函数 $\Phi(x,y)$ (第三部分第六章)。Ikehara 定理的实效形式与 Berry-Esseen 不等式有紧密联系, 这个真正原理上的一致令笔者惊叹不已。另外, 力求与其他文献 (特别是 Elliott 的妙作) 互补的合理考虑使得选择上有所侧重, 例如 Erdős-Wintner 定理, Erdős-Kac 定理或 Halász 定理的证明, 等等, 见第三部分第四章。其中最后一个定理相当于 Montgomery 的方法在他所指明的方向上的一个拓展。

与第一版相同, 同事和朋友们在第二版手稿的整理和精炼上给予了我许多帮助。在此谨向 Michel Balazard、Régis de la Bretèche、Gautami Bhomwik、Paul Erdős、Michel Mendès France、Olivier Ramaré、Jean-Luc Rémy、Imre Ruzsa、Patrick Sargos、András Sárközy、Marijke Wijsmuller 及吴杰表示谢意。如果没有他们的帮助, 那勘误表会变得比致谢还要长得多 (实践证明这可不是说说而已)。最后, 衷心感谢 Daniel Barlet 在本书于法兰西数学会出版社出版过程中友好而高效的协助。

Gérald Tenenbaum, 1995 年 3 月于南锡

① 法国数学学派, 著有《数学原理》(Éléments de Mathématique)。 ——译者注

第三版前言

本书第三版承袭了前一版的组织结构以及叙述风格, 但在内容上有很大扩展。这主要基于三重目的: 引进最新进展, 补充方法论, 以及为本科学生, 尤其是参加中学教师资格考试[②]的学生提供基础知识及有益的补充知识。

文献中结果的更新主要体现在注记和习题里, 亦有自成一节的, 例如第三部分 §6.5 中的 Kubilius 模型。另外还会引进某些命题的新证明, 如 Tauber 定理 (第二部分 §7.2) 和 Halász 定理 (第三部分 §4.3)。最后, 新近的科研成果也促成了对行文的一些重大改动, 如 Turán-Kubilius 不等式及其在脆数情形的推广。

许多新进展将在原书框架之下得以体现, 主要有: 第一部分 §4.7 中 Selberg 筛法的一个不甚为人知的一般形式, 以及同一章习题中该方法在素数间小差距问题中的应用; Ramanujan 方法在因子个数函数极大阶估计中的体现 (第一部分第五章习题 90); Kusmin-Landau 不等式 (第一部分定理 6.7) 及广义 van der Corput 定理 (第一部分定理 6.10); 数论中的显式公式 (第二部分 §4.4 及 §8.6); 第二部分第八章算术数列中素数分布部分的显著拓展和第三部分 §5.6 中引进的 Jacobsthal 函数以及关于素数间大差距的 Rankin 定理证明。

在习题中还补充了定理的直接应用及综合问题。另外还增加了为本科生及未来的中学教师准备的关于 Euler-Maclaurin 求和公式的新问题 (第一部分第零章习题); Legendre 符号和二次剩余简介 (第一部分第一章习题); 模 1 均匀分布理论导引 (第一部分 §6.5); Diophantus 逼近论初步及连分式综论 (第一部分第七章) 以及 Euler Γ-函数指南 (第二部分第零章)。

② 译自法文 agrégation。 ——译者注

上述对新内容的简介远不足以体现目标各异的新进展之间错综复杂的联系，另外它也不是面面俱到的。对全书进行了重新整理，甚至重写了一些章节。新加的 125 个习题体现了一种整体感，其中包括对一些重要定理的其他证明，还给出了一些定理的简化形式，如 van der Corput 定理或 Erdős-Turán 不等式。然而行文风格的初衷没有根本性的改变。

笔者谨向仔细阅读新手稿并提出意见的同事们，尤其是向 Joseph Basquin、Régis de la Bretèche、Farrell Brumley、Cécile Dartyge、Kevin Ford、Bruno Martin、Michel Mendès France、Aziz Raouj、Jean-Luc Rémy、Olivier Robert、Anne de Roton、Patrick Sargos、André Stef 及吴杰致以诚挚的谢意。

Gérald Tenenbaum, 2007 年 11 月于南锡

中文版前言

本书大体与 2008 年巴黎 Belin 出版社出版 (收集在 Échelles 系列之中) 的内容相同, 但对发现的笔误以及印刷和内容上的错误作了修正。

作者首先对他的朋友兼合作者吴杰表示深挚的谢意。他无私的帮助对翻译工作起到了关键作用。翻译过程中的语言表达, 学术观点以及符号系统的选择都是非常棘手的事情: 既要忠实于原著, 又要方便中文读者。吴杰在这两方面都具有敏锐的知觉。无论是在准备阶段还是在校对阶段, 他都友善地为翻译工作贡献了他的学识和精力。

作者同样衷心地感谢译者陈华一。书稿长达近 600 页, 从目录到 (双重) 索引, 任务繁重, 而译者欣然接受, 完成了细致, 准确而精巧的工作。值得一提的是, entier friable 一词有了精确的翻译。如今在解析数论领域, 该词所表达概念已经不可或缺。我们希望这个形象的专业词汇能在中国数论界广为流传。

最后感谢高等教育出版社的主动参与以及无可挑剔的细心协助。

Gérald Tenenbaum, 2010 年 1 月于南锡

译者说明

译文中外国人名均用拉丁字母拼写, 以方便读者查阅外文文献。

法国数学文献中开区间用反方括号来表示, 比如 $]a, b]$ 表示以 a 和 b 为端点的左开右闭区间, $]a, b[$ 表示开区间, 等等。遵照作者的意愿, 在译文中仍保留这样的记法。

应作者要求, caractère (d'un groupe) 译成 (群的) 特征标, 但 caractère de Dirichlet (数论函数) 译成 Dirichlet 特征, 请读者不要与 caractéristique 一词混淆 (该词在本书中并不出现)。

译文中引用定义, 命题和公式时采取如下原则。倘若被引用的内容来自同一部分, 则直接引用内容的序号, 比如在第三部分中引用同一部分的序号为 (2.1) 的公式时, 就直接用 (2.1) 表示; 但当被引用的内容来自不同部分的时候, 用大写罗马数字表示部分的序号, 或在引用之前用中文加注部分的序号, 比如在第一部分中引用第二部分的定理 8.17 时, 就用第二部分定理 8.17 来表示, 引用第二部分序号为 (1.6) 的公式时, 用 (II.1.6) 表示。

译文含有双重名词索引, 人名均排在数学名词之前, 按拉丁字母顺序排序; 数学名词在两个索引中分别按拼音字母顺序和笔画排序。读者可以根据自己的需要选择适当的索引进行查询。

本书作者对翻译工作作了耐心的指导; 吴杰老师阅读了译文初稿并提供了许多有益的建议; 焦莹校对了部分译文; 脆数 (entier friable) 一词是第一次翻译成中文, 参考了金丝燕和陈立川老师的意见; 高等教育出版社海外分社的各位老师, 尤其是王丽萍, 赵天夫和李鹏等, 在翻译过程中提供了具体而细致的协助。责任编辑边晓娜为本书的出版付出了辛勤的劳动。译者谨向他们致以最衷心的感谢。

译文的语言表达方面与责任编辑观点不一致的地方, 定稿中采取了译者的意见。如果因此给读者带来理解上的不便, 译者承担全部的责任。

记号

本书中将使用如下记号和约定。

除特别指出或上下文有限制，字母 p，无论有没有下标，总代表一个素数。用 $\mathbb{P}$ 表示所有素数的集合。

$a \mid b$ 表示 a 整除 b；$p^\nu \| a$ 表示 $p^\nu \mid a$ 且 $p^{\nu+1} \nmid a$；$a \mid b^\infty$ 表示 $p \mid a \Rightarrow p \mid b$。并记 $[a,b]$ 为 a 和 b 的最小公倍数，(a,b) 为 a 和 b 的最大公约数。

$P^+(n)$ 表示整数 $n>1$ 的最大素因子，$P^-(n)$ 表示其最小素因子。约定 $P^+(1)=1$，$P^-(1)=+\infty$。

若 x 是实数，$\lfloor x \rfloor$，$\lceil x \rceil$ 和 $\langle x \rangle$ 分别表示不超过 x 的最大整数，不小于 x 的最小整数以及 x 的小数部分。

令 $\|x\| := \min_{n\in\mathbb{Z}} |x-n|$，$x^+ := \max\{x,0\}$ $(x\in\mathbb{R})$ 并记 $\mathrm{e}(x) := \mathrm{e}^{2\pi i x}$ $(x\in\mathbb{R})$，$\ln^+ x := \max\{0, \ln x\}$ $(x>0)$，其中 ln 表示自然对数。用 $\ln_k$ 表示自然对数的 k-次复合函数。记号 log 则用来表示复对数，若不加另行说明，取辐角主值。

当字母 s 表示复数时，隐含地用关系 $s=\sigma+i\tau$ 来定义实数 σ 和 τ。

同时用 Landau 记号 $f=O(g)$ 和 Vinogradov 记号 $f \ll g$ 来表示关系 $|f| \leqslant C|g|$ 对某个适当的正常数 C 成立。该常数可以是绝对常数，也可以依赖于某些参数 (此时对参数的依赖可用下标表示)。另外，用 $f \asymp g$ 表示 $f \ll g$ 和 $g \ll f$ 同时成立。读者须注意到本书中这些记号对复值也适用。

有限集 $\mathcal{A}$ 的基数记作 card$\mathcal{A}$ 或 $|\mathcal{A}|$。

下列是书中一些符号出现的页码。

目录

第一部分　初等方法