◆人教版

学法大视野 XUEFA DASHIYE

考一本

KAOYIBEN

课程基础导练

数学

高中必修5

海豚出版社
DOLPHIN BOOKS
CIPG 中国国际出版集团

考一本

课程基础导练

数学

高中必修5（人教版）

组编单位：长沙市教育科学研究院
编写指导：王　旭　卢鸿鸣　刘维朝
（按姓氏笔画）陈来满　雷建军　黎　奇

本册主编：杨　科　陈　峰
本册编者：丁秋红　匡铀龄　丁正光　李　斑　皮维忠
邓志强　龙检罗　周才凯　李彭超　陈建民
李　强　刘一波　常　君　薛祖山　刘陆军
李群丽　陈秀丽　邓奇志　何永红　彭启艳
本册审读：戴国良　王志翔　龚德军

海豚出版社
DOLPHIN BOOKS
CIPG
中国国际出版集团

图书在版编目（CIP）数据

考一本·课程基础导练. 数学. 5：必修／杨科，陈峰主编. —北京：海豚出版社，2010.8
ISBN 978-7-5110-0348-5

Ⅰ.①考… Ⅱ.①杨… ②陈… Ⅲ.①数学课—高中—习题 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 153647 号

书　　名：考一本·课程基础导练　数学(必修 5)
作　　者：杨　科　陈　峰

责任编辑：范劲松　潘　丽
责任校对：吴小燕　谭著名
装帧设计：张　维　蒋　慧

出　　版：海豚出版社
网　　址：http://www.dolphin-books.com.cn
地　　址：北京市百万庄大街 24 号　　邮　编：100037
客服电话：0731-84322947　84313942　82254875
传　　真：0731-84322947　82322805
印　　刷：湖南版艺印刷有限公司
开　　本：16 开(880 毫米×1230 毫米)
印　　张：6
字　　数：180 千字
版　　次：2010 年 8 月第 1 版　2010 年 8 月第 1 次印刷
标准书号：ISBN 978-7-5110-0348-5
定　　价：12.00 元

PREFACE

编者寄语

积经年之底蕴，凝教学之精华。全新呈现在您面前的《考一本·课程基础导练》是由湖南省四大名校之长郡中学、雅礼中学联手倾力打造，经校内众多长年奋战在教学一线上的特、高级教师潜心编写而成的。长郡、雅礼两校此番在教辅用书上的联袂合作，尚属首次，而由各学科带头人牵头的作者队伍，也都是教育界的精兵强将。作为编者，我们有足够的理由相信，《考一本·课程基础导练》这套新型教辅用书必将给广大师生带来福音。

本套丛书立足于学业水平考试，跟踪服务新高考，以最新教材为依托，彰显教育教学新理念，整体来说，具有权威、同步、联动、实用等几大特色。

权威　本套丛书的编写团队，不仅具有扎实的教学功底，丰富的教学经验，而且深谙高中教育教学的规律和特点，由学科带头人领队的编写更是有力地保证了该套丛书的权威性。

同步　教与学一体，知识与能力同步，将"怎么学"与"怎么教"放在一起同步设计，以方法为主线实施教学，使学生不仅能轻松地掌握基础知识，而且能尽快地提高综合应用能力。本套丛书以全新的视角向广大师生介绍这种符合教学规律的立体化学习方案。

联动　教与学联动，相互促进，涵盖全部知识点的教法学法设计，抓住重难点的讲练结合编排，使这个主体充满鲜活而翔实的内容。

实用　本套丛书注重基础，突出实用、好用，并充分照顾到不同层次、不同阶段的学生学习时的实际需要，在知识和能力的安排上循序渐进，难易有度。书中例题和习题的选取充分考虑最新命题趋势，既博采众长，又自成系统。各分册体例相对统一，但又根据模块特点和各年级教学实际有所不同，各具特色。

踏破铁鞋无觅处。但愿《考一本·课程基础导练》正是您苦苦寻觅中的教辅用书，并祈求它的上乘品质能带给您成功的好运。

本套丛书的编辑与出版，得益于教育界、出版界众多知名人士的热情帮助和大力支持，他们提出了诸多很好的建议，在此谨表衷心感谢。恳切希望广大师生和教育专家在这套丛书问世后，多提宝贵意见，以便我们进一步修订完善。

编　者

2010 年 7 月

目录

CONTENTS

目录

CONTENTS

第一章 解三角形

第 1 课时 正弦定理

发现问题

情景导思

在初中,我们学习过解直角三角形的问题,但现实生活中,解一般三角形的问题很多,目前我们只知道,在任意三角形中有大边对大角、小边对小角的边角关系.我们能否得到这个边、角关系准确量化的表示呢?

互动课堂

知识清单

知识点 1:正弦定理

在一个三角形中,各边和它所对角的正弦的比相等,

即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

知识点 2:正弦定理的几何意义

在$\triangle ABC$中,各边和它所对角的正弦的比等于$\triangle ABC$的外接圆半径R的两倍.

即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

知识点 3:解三角形

(1)把三角形的三条边和三个角叫做三角形的元素.

(2)已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做解三角形.

知识点 4:利用正弦定理可解决两类三角形问题

(1)已知两角和任一边,求其他两边和一角(与"AAS"或"ASA"对应);

(2)已知两边和其中一边的对角,求其他两角和一边(与"SSA"相应,注意两边与一边的对角对应相等不能证明三角形全等,因此此类问题要注意解的情况,可能有三种结果:两解、一解、无解).

学法指导

1. 已知两角及一边解三角形

【例 1】已知在$\triangle ABC$中,$c=10$,$A=45°$,$C=30°$,求a,b和B.

【解析】$\because \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,

$\therefore a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{10\sin 45°}{\sin 30°}=10\sqrt{2}$.

$B=180°-(A+C)=180°-(45°+30°)=105°$.

又$\because \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

$\therefore b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{10\sin 105°}{\sin 30°}=20\sin 75°$

$=20\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=5(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

【点评】已知两角及一边可用正弦定理求出三角形的其他元素,此类题有唯一解.

变式训练:在$\triangle ABC$中,已知$A=45°$,$C=75°$,$AB=\sqrt{3}$,则$BC=$ ( )

A. $3-\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $3+\sqrt{3}$

2. 已知两边及一边的对角解三角形

【例 2】在$\triangle ABC$中,(1)$a=\sqrt{6}$,$b=2$,$B=45°$,求角C;

(2) $A=60°$,$a=\sqrt{2}$,$b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,求B;

(3) $a=3$,$b=4$,$A=60°$,求B.

【解析】(1)由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得

$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又$A\in(0°,180°)$,$\therefore A=60°$或$120°$.

$\therefore C=75°$或$15°$.

(2)由正弦定理得

$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore B=45^\circ$或135°,但$B=135^\circ$时,$135^\circ+60^\circ>180^\circ$,这与$A+B<180^\circ$矛盾,$\therefore B=45^\circ$.

(3)由正弦定理得$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{3}=\frac{2}{\sqrt{3}}>1$,

$\therefore$这样的角B不存在.

【点评】已知两边和其中一边的对角,三角形形状一般不确定,用正弦定理求解时,要根据条件判断这个三角形是否有解,有解时是一解还是两解.判断的依据是:同一个三角形中,大边(角)对大角(边).

变式训练:(1)在$\triangle ABC$中,已知$a=\sqrt{2}$,$b=\sqrt{3}$,$B=60^\circ$,那么角$A=$ ( )

A. 135° B. 90° C. 45° D. 30°

(2)在$\triangle ABC$中,已知$a=1$,$b=\sqrt{3}$,$A=45^\circ$,则满足此条件的三角形的个数是 ( )

A. 0个 B. 1个 C. 2个 D. 无数个

(3)在$\triangle ABC$中,已知$A=30^\circ$,$a=\sqrt{2}$,$b=2$,解此三角形.

3. 判断三角形的形状

【例3】在$\triangle ABC$中,若$b^2\sin^2 C+c^2\sin^2 B=2bc\cos B\cos C$,试判断$\triangle ABC$的形状.

【解析】由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$($R$为$\triangle ABC$的外接圆半径),将原等式化为

$8R^2\sin^2 B\sin^2 C=8R^2\sin B\sin C\cos B\cos C$,

$\because \sin B\sin C\neq 0$,

$\therefore \sin B\sin C=\cos B\cos C$,

即$\cos(B+C)=0$.

$\therefore B+C=90^\circ$,即$A=90^\circ$.

故$\triangle ABC$为直角三角形.

【点评】已知三角形中的边和角的"混合"关系等式,判断三角形的形状时,有两种方法:

(1)化边的关系为角的关系,再进行三角恒等变换,求出三个角之间的关系式;

(2)化角的关系为边的关系,再进行代数恒等变换,求出三条边之间的关系式.

变式训练:(1)在$\triangle ABC$中,若$\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$,则$\triangle ABC$是 ( )

A. 直角三角形 B. 等边三角形

C. 钝角三角形 D. 等腰直角三角形

(2)在$\triangle ABC$中,$a^2\tan B=b^2\tan A$,试判断$\triangle ABC$的形状.

自主成长

夯实基础

1. 在$\triangle ABC$中,若$A:B:C=1:2:3$,则$a:b:c=$ ( )

A. $1:2:3$ B. $3:2:1$

C. $2:\sqrt{3}:1$ D. $1:\sqrt{3}:2$

2. 在$\triangle ABC$中,已知$a=8$,$B=60^\circ$,$C=75^\circ$,则$b=$ ( )

A. $4\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{3}$

C. $4\sqrt{6}$ D. $\frac{32}{3}$

3. 在$\triangle ABC$中,若$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}$,则$\triangle ABC$是 ( )

A. 等腰三角形

B. 等边三角形

C. 直角三角形

D. 等腰三角形或直角三角形

4. 在$\triangle ABC$中,若$a=2$,$b=2\sqrt{3}$,$\angle B=60^\circ$,则边$c=$______,角$C=$______.

5. 等腰三角形一条腰上的高是$\sqrt{3}$，这条高与底边的夹角为$60°$，则底边长为________.

6. 在$\triangle ABC$中，若$\tan A=\frac{1}{3}$，$C=150°$，$BC=1$，则$AB=$____.

7. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c. 若$(\sqrt{3}b-c)\cos A=a\cos C$，则$\cos A=$________.

能力提升

8. 在$\triangle ABC$中，$a:b:c=1:3:3$，求$\frac{2\sin A-\sin B}{\sin C}$.

9. 在$\triangle ABC$中，若$\sin A=2\sin B\sin C$，且$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$，试判断$\triangle ABC$的形状.

挑战自我

10*. 在$\triangle ABC$中，已知$a^2-a=2(b+c)$，$a+2b=2c-3$，若$\sin C:\sin A=4:\sqrt{13}$，求$a,b,c$.

(注释：书中有“*”的题为选做题)

第2课时 余弦定理(1)

发现问题

情景导思

如果已知一个三角形的两条边及其所夹的角，如何从已知的两边和它们的夹角计算出三角形的另一边和另两个角？

互动课堂

知识清单

知识点1:余弦定理

三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们的夹角的余弦的积的两倍.

即 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$；

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$； (Ⅰ)

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

知识点2:余弦定理的变式

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$；

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$； (Ⅱ)

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

注意:余弦定理的三个等式具有轮换的特点，勾股定理是余弦定理的特例，余弦定理是勾股定理的推广.

知识点3:余弦定理及勾股定理

(1)如果一个三角形两边的平方和大于第三边的平方，则第三边所对的角是锐角；

(2)如果一个三角形两边的平方和小于第三边的平方，则第三边所对的角是钝角；

(3)如果一个三角形两边的平方和等于第三边的平方，则第三边所对的角是直角.

知识点4:应用余弦定理可以解决两类解三角形的问题

(1)已知三边，求各角，利用(Ⅱ)，通常先求两个较小边所对的角，因为较小的边所对的角一定是锐角；

(2)已知两边和它们的夹角，求另外两角及一边，利用(Ⅰ)式来求第三边.

学法指导

1. 已知两边和夹角解三角形

【例1】在$\triangle ABC$中，$a=2$，$b=2\sqrt{2}$，$C=15°$，求A.

【解析】解法一：$\because \cos 15°=\cos(45°-30°)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

$\sin 15°=\sin(45°-30°)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

由余弦定理，得

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=4+8-2\sqrt{2}\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})=8-4\sqrt{3}$，

$\therefore c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

又$b>a$，$\therefore B>A$，$\therefore A$为锐角.

由正弦定理，得 $\sin A=\dfrac{a}{c}\sin C=\dfrac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore A=30°$.

解法二：$\because \cos 15°=\cos(45°-30°)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

$\sin15°=\sin(45°-30°)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

由余弦定理，得

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=4+8-2\sqrt{2}\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})=8-4\sqrt{3}=2(\sqrt{3}-1)^2$，

$\therefore c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

$\therefore \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

又$0°<A<180°$，$\therefore A=30°$.

【点评】已知一个角的正弦值求角时，必须注意讨论解的情况，结合三角形大边对大角的性质，由于三角形中至少有两个锐角，那么小边对的角一定是锐角.在解三角形问题时，应根据题目中给定的条件，灵活地选择正弦、余弦定理.

变式训练:在$\triangle ABC$中，$AB=1$，$BC=2$，$B=60°$，则$AC=$______.

2. 已知三角形三边解三角形

【例2】在$\triangle ABC$中，已知$a=7$，$b=3$，$c=5$，求最大角和$\sin C$.

【解析】$\because a>c>b$，$\therefore A$为最大角，

由余弦定理的变式得

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\dfrac{1}{2}$，

又$\because 0°<A<180°$，$\therefore A=120°$，

$\therefore \sin A=\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,得

$\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{5\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

∴最大角 A 为 $120°$,$\sin C=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

【点评】 1. 求 $\sin C$ 也可用下面方法:

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{7^2+3^2-5^2}{2\times7\times3}=\frac{11}{14}$,∴$C$ 为锐角.

$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-(\frac{11}{14})^2}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

2. 在解三角形时,有时既可用余弦定理,也可用正弦定理.

变式训练: 在△ABC 中,已知 $a:b:c=1:\sqrt{3}:2$,求 A,B,C.

3. 判断三角形的形状

【例 3】 在△ABC 中,若 $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$,且 $\sin A=2\sin B\cos C$,试确定△ABC 的形状.

【解析】 ∵$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$,

∴$a^2=b^2+c^2-bc$. 又根据余弦定理,得

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$,∴$A=60°$.

∵$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$

$=2\sin B\cos C$,

∴$\sin B\cos C-\cos B\sin C=0$,

即 $\sin(B-C)=0$,∴$B=C$.

∵$B+C=180°-60°=120°$,

∴$B=C=60°$.

∴△ABC 为等边三角形.

【点评】 1. 在本例中,也可用正弦定理将角的三角函数关系转化为边的关系,再用余弦定理求角,这种相互转化的方法我们今后会经常用到,应熟练掌握.

2. 如何灵活地运用正弦定理、余弦定理呢?关键在于观察、分析已知条件的结构特征,并联想公式运用之.

3. 余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 还可改写为 $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A$(正余弦定理),有时运用它求三角函数值时很方便.

变式训练: 已知方程 $x^2-(b\cos A)x+a\cos B=0$ 的两根之积等于两根之和,a,b 为△ABC 的两条边,A,B 为两个内角,试判断这个三角形的形状.

自主成长

夯实基础

1. 在△ABC 中,已知 $b=5$,$c=5\sqrt{3}$,$A=30°$,则 $a=$ ( )

A. 5　B. 4　C. 3　D. 10

2. 在△ABC 中,已知 $AB=5$,$BC=6$,$AC=8$,则△ABC 的形状是 ( )

A. 锐角三角形　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　D. 非钝角三角形

3. 在△ABC 中,$a^2-c^2+b^2=ab$,则角 $C=$ ( )

A. $60°$　B. $45°$或 $135°$

C. $120°$　D. $30°$

4. △ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,若 $b^2=ac$ 且 $c=2a$,则 $\cos B$ 的值为 ( )

A. $\frac{1}{4}$　B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

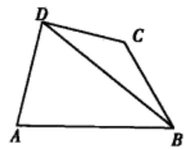
5. 在$\triangle ABC$中，若$AB=\sqrt{5}$，$AC=5$，且$\cos C=\frac{9}{10}$，则BC =________.

6. 在$\triangle ABC$中，$A=60°$，最大边和最小边是方程$x^2-9x+8=0$的两个正实数根，那么BC边长是________.

7. 在$\triangle ABC$中，A,B,C分别为a,b,c三条边的对角，如果$b=2a$，$B=A+60°$，那么$A=$________.

能力提升

8. 如图，在四边形$ABCD$中，已知$AD\perp CD$，$AD=10$，$AB=14$，$\angle BDA=60°$，$\angle BCD=135°$，求BC的长.



9. 在钝角$\triangle ABC$中，$B>90°$，$a=2x-5$，$b=x+1$，$c=4$，求x的取值范围.

挑战自我

10*. 在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$b^2=ac$，$\cos B=\frac{3}{4}$.

(1)求$\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}$的值；

(2)设$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}$，求$a+c$的值.

第3课时 余弦定理(2)

发现问题

情景导思

前两个课时,我们已在初中解决直角三角形的问题的基础上学会了用正、余弦定理来解一般三角形的问题,那么何时选用正弦定理,何时选用余弦定理呢?

互动课堂

知识清单

知识点1:正、余弦定理

正弦定理:$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,

余弦定理:$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$;

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$;

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

知识点2:正弦定理变式拓展

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$=\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{a+c}{\sin A+\sin C}$$

$$=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}.$$

知识点3:三角形的面积公式

$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$;

知识点4:已知两边和其中一边的对角,判定三角形解的个数

例如:已知b,c和B,如何画出这个三角形?应该先作出B,并在B的一边BD上截取$BA=c$,然后再以A为圆心,b的长为半径作圆,这个圆如果与B的另外一边BE有交点,则可以画出三角形,也就是三角形有解,有n个交点就有n个解.

当所给的B是锐角时:

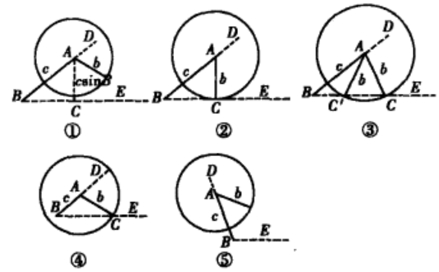
(1) 如果$b<c\sin B$,则所作圆与BE无交点,于是三角形无解.(图①)

(2) 如果$b=c\sin B$,则所作圆与BE相切,三角形有且仅有一解.(图②)

(3) 如果$c\sin B<b<c$,则所作圆与BE有两个交点,于是三角形有两解.(图③)

(4) 如果$b\geqslant c$,则所作圆与BE只有一个交点,于是三角形只有一解.(图④,此时圆与直线BE的另一个交点在BE的反向延长线上.)

(5)当所给的B是直角或钝角时,如果$b>c$,则所作圆与BE有唯一交点,此时三角形有唯一解;如果$b\leqslant c$,则所作圆与射线BE无交点($b=c$时交点为点B),此时无解.(图⑤)



在解题时遇到已知两边与其中一边对角的情况,应注意求得某个角的正弦值后,由于当正弦值在0与1之间时,对应的角在0°与180°之间有两个,可用"三角形内角和为180°"及"三角形中大边对大角",或利用画图的情况来判断解的情况.

学法指导

1. 正、余弦定理的变式应用

【例1】设锐角$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,$a=2b\sin A$.

(1)求B的大小;

(2)若$a=3\sqrt{3}$,$c=5$,求b.

【解析】(1)由$a=2b\sin A$,根据正弦定理,得

$\sin A=2\sin B\sin A$,

$\therefore \sin B=\frac{1}{2}$.

又$\triangle ABC$为锐角三角形,则B为锐角,

$\therefore B=\frac{\pi}{6}$.

(2)根据余弦定理,得

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=27+25-45=7$,

$\therefore b=\sqrt{7}$.

【点评】根据题意,灵活恰当地选择正、余弦定理及其变形公式的应用.

变式训练:在$\triangle ABC$中,$bc=20$,$S_{\triangle ABC}=5\sqrt{3}$,$\triangle ABC$的外接圆半径为$\sqrt{3}$,则$a=$________.

2. 利用正、余弦定理进行三角形的边、角、面积互换

【例 2】 已知$\triangle ABC$,周长$l=18$,面积$S=6\sqrt{3}$,$C=60°$,求a,b边的长.

【解析】 由题得$\begin{cases}a+b+c=18,\\ \frac{1}{2}ab\sin 60°=6\sqrt{3},\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos 60°,\end{cases}$

整理得$\begin{cases}a+b+c=18 & ①\\ ab=24 & ②\\ c^2=a^2+b^2-ab & ③\end{cases}$

①③联立消去c,整理得:$a+b=11$,

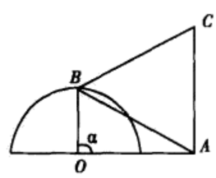
解得$a=3,b=8$或$a=8,b=3$.

【点评】 正、余弦定理都是围绕着三角形进行边角转化的,所以在有关三角形的题目中,要有意识的考虑用哪一个定理更合适,还是两个定理都要用,要抓住两个定理应用的信息,一般地,如果遇到的式子含角的余弦或是边的二次式,要考虑用余弦定理;反之,若是遇到的式子含角的正弦和边的一次式,则大多用正弦定理,若是以上特征不明显,则要考虑两个定理都有可能用.

变式训练: 在$\triangle ABC$中,$BC=a$,$AC=b$,a,b是方程$x^2-2\sqrt{3}x+2=0$的两个根,且$2\cos(A+B)=1$,求:(1)角C的度数;(2)$S_{\triangle ABC}$.

3. 利用正、余弦定理求最值

【例 3】 如图,半圆O的直径为2,A为直径延长线上的一点,$OA=2$,B为半圆上任意一点,以AB为一边作等边三角形ABC. 问:点B在什么位置时,四边形$OACB$的面积最大?



【解析】 设$\angle AOB=\alpha$.

在$\triangle AOB$中,由余弦定理,得

$AB^2=1^2+2^2-2\times1\times2\cos\alpha$

$=5-4\cos\alpha$.

于是,四边形$OACB$的面积为

$S=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle ABC}$

$=\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2$

$=\frac{1}{2}\times2\times1\times\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}(5-4\cos\alpha)$

$=\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha+\frac{5}{4}\sqrt{3}$

$=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{5}{4}\sqrt{3}$.

因为$0<\alpha<\pi$,所以当$\alpha-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$时,$\alpha=\frac{5}{6}\pi$,

即$\angle AOB=\frac{5}{6}\pi$时,四边形$OACB$的面积最大.

【点评】 利用正弦定理、余弦定理将目标表示成α的函数,利用三角形的有界性求出目标的最值.

变式训练: 在$\triangle ABC$中,已知$a=7,b=8,\cos C=\frac{13}{14}$,则最大角的余弦值为________.

自主成长

夯实基础

1. 在$\triangle ABC$中,若$a=7,b=3,c=8$,则其面积等于 (　　)

A. 12　　B. $\frac{21}{2}$

C. 28　　D. $6\sqrt{3}$

2. 在$\triangle ABC$中,根据下列条件解三角形,其中有一解的是 (　　)

A. $b=7,c=3,C=30°$

B. $b=5,c=4\sqrt{2},B=45°$

C. $a=6,b=6\sqrt{3},B=60°$

D. $a=20,b=30,A=30°$

3. 若a,b,c是$\triangle ABC$的三边,且$\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}>1$,则$\triangle ABC$一定是 (　　)

A. 直角三角形　　B. 等边三角形

C. 锐角三角形　　D. 钝角三角形

4. 在$\triangle ABC$中,$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin B\sin C+\sin^2 C$,则$A=$ (　　)

A. 30°　　B. 60°

C. 120°　　D. 150°

5. 在$\triangle ABC$中,$b=2,B=30°,C=135°$,则$a=$________.

6. 在$Rt\triangle ABC$中,$C=90°$,则$\sin A\sin B$的最大值是________.

7. 若三角形中有一个角为60°,夹这个角的两边的边长分别是8和5,则外接圆半径等于________.

能力提升

8. 在$\triangle ABC$中，$A=60^\circ$，$b=1$，面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，求$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$的值.

9*. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，$B=\frac{\pi}{3}$，$\cos A=\frac{4}{5}$，$b=\sqrt{3}$.

(1)求$\sin C$的值；

(2)求$\triangle ABC$的面积.

挑战自我

10*. 在$\triangle ABC$中，a,b,c分别为内角A,B,C的对边，且$2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\sin C$，

(1)求A的大小；

(2)若$\sin B+\sin C=1$，试判断$\triangle ABC$的形状.

第4课时 应用举例(1)

发现问题

情景导思

本章引言中提出这么一个问题:“遥不可及的月亮离地球究竟有多远?”在古代,天文学家没有先进的仪器就已经估算出了两者的距离,是什么神奇的方法探究到这个奥秘的呢?我们知道,对于未知的距离、高度等,存在着许多可供选择的测量方案,比如可以借助解直角三角形等方法,但由于在实际测量问题的现实背景下,某些方法不能实施.上面的问题用以前的方法是不能解决的.那么我们用刚学过的正弦、余弦定理就可以解决以前不能解决的问题,究竟如何测量?

互动课堂

知识清单

知识点1:正、余弦定理在实际测量中的运用

(1)在测量上,根据测量需要而适当确定的线段叫做基线.基线的选取不唯一,一般基线越长,测量的精确度越高;

(2)距离测量问题包括一个不可到达点和两个不可到达点两种,设计测量方案的基本原则是:能够根据测量所得的数据计算所求两点间的距离,其中测量数据与基线的选取有关,计算时需要利用正、余弦定理.

知识点2:常见测量问题中的一些数学术语的解释

(1)以水平线为基准,朝上看时,视线与水平面夹角为仰角;朝下看时,视线与水平面夹角为俯角.

(2)从某点的指北方向线起,依顺时针方向到目标方向线之间的水平夹角,叫做方位角.

把指北或指南方向线与目标方向线所成的小于90°的水平角,叫做方向角.如:北偏东60°.

(3)坡面与水平面的夹角α叫做坡角;坡面的铅直高度(h)和水平宽度(l)的比叫做坡度(i),即$i=\frac{h}{l}=\tan\alpha(\alpha\neq 90^\circ)$.

(4)科学家为了精确地表明各地在地球上的位置,给地球表面假设了一个坐标系,这就是经纬度线.

知识点3:应用三角形知识解决实际问题的解题步骤

(1)分析:根据题意画出示意图;

(2)建模:确定所涉及的三角形,搞清已知和未知;

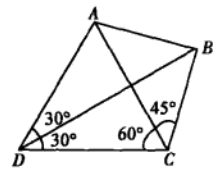
(3)求解:选用合适的定理进行求解;

(4)检验:检验上述所求的解是否符合实际意义,从而得出实际问题的解.

学法指导

1. 测量两个不可到达的点之间的距离

【例1】2003年,伊拉克战争初期,美英联军为了准确分析战场形势,由分别位于科威特和沙特的两个相距为$\frac{\sqrt{3}}{2}a$的军事基地C和D,测得伊拉克两支精锐部队分别在A处和B处,且$\angle ADB=30^\circ$,$\angle BDC=30^\circ$,$\angle DCA=60^\circ$,$\angle ACB=45^\circ$,如图所示,求伊军这两支精锐部队的距离.



【解析】解法一:$\because\angle ADC=\angle ADB+\angle BDC=60^\circ$,

又$\because\angle DCA=60^\circ$,$\therefore\angle DAC=60^\circ$,

$\therefore AD=CD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,在$\triangle BCD$中,

$\angle DBC=180^\circ-30^\circ-105^\circ=45^\circ$,

由正弦定理$\frac{DB}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle DBC}$,

$$BD=CD\cdot\frac{\sin\angle BCD}{\sin\angle DBC}=\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}}{4}a.$$

在$\triangle ABD$中,由余弦定理

$$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB$$

$$=\frac{3}{4}a^2+\left(\frac{3+\sqrt{3}}{4}a\right)^2-2\times\frac{3+\sqrt{3}}{4}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{8}a^2,$$

$\therefore AB=\frac{\sqrt{6}}{4}a$,

$\therefore$伊军这两支精锐部队的距离为$\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

解法二:同解法一得,$AD=DC=AC=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,

在$\triangle BCD$中,$\angle DBC=45^\circ$,

$\therefore\frac{BC}{\sin 30^\circ}=\frac{CD}{\sin 45^\circ}$,

$\therefore BC=\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

在$\triangle ABC$中,由余弦定理,得

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos 45^\circ$$

$=\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{8}a^2-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{\sqrt{6}}{4}a\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{8}a^2$.

$\therefore AB=\frac{\sqrt{6}}{4}a$,

∴伊军这两支精锐部队的距离为$\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

【点评】测量两个不可到达的点之间的距离问题，一般是把求距离问题转化为求三角形的边长问题，然后把未知的另外边长转化为只有一点不能到达的两点距离测量问题.测量长度、距离是解三角形应用题的一种基本题型，在解这类问题时，首先要分析题意，确定已知和所求，然后画好示意图，通过解三角形确定实际问题的解.

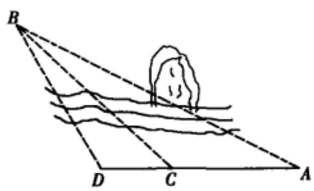
变式训练：炮兵为定位目标A，选用观察点B和C，测得$BC=m$，$\angle CBA=\alpha$，$\angle BCA=\beta$，则A与B之间的距离为 ( )

A. $\frac{m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$　　B. $\frac{m\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}$

C. $\frac{m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$　　D. $\frac{m\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)}$

2. 测量一个不可到达的点距离

【例2】如图，A，B两地间有小河和山丘，求A，B两地间的距离，在A所在的岸边取一点D，使AD可直接测量，且B和D两点可通视，再在AD上取一点C，使B和C可通视，测得$AC=149.46$ m，$CD=52.61$ m，$\angle ADB=108°15'$，$\angle ACB=120°25'$，求A，B间的距离.



【解析】在$\triangle BCD$中，

$\angle DBC=120°25'-108°15'=12°10'$，由正弦定理，得

$BC=\frac{DC\cdot\sin\angle BDC}{\sin\angle DBC}=\frac{51.61\times\sin 108°15'}{\sin 12°10'}$

$=237.068$.

在$\triangle ABC$中，由余弦定理，得

$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB$

$=149.46^2+237.068^2-2\times149.46\times237.068\times\cos120°25'$

$=114\ 417.068$.

$\therefore AB\approx338.3$.

答：A，B两点相距约338.3 m.

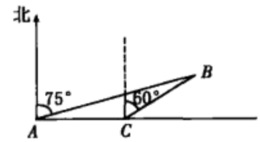
【点评】测量一个不可到达的点距离问题，一般是把求距离问题转化为求三角形的边长问题，一般要注意：

(1)基线的选取要准确恰当；

(2)选定或创建的三角形要确定；

(3)利用正弦定理还是余弦定理要确定.

变式训练：如图，海中有一个小岛B，周围3.8 n mile内有暗礁.一艘军舰从A地出发由西向东航行，望见小岛B在北偏东75°，航行8 n mile到达C处，望见小岛B在北偏东60°.若此军舰不改变航行的方向继续前进，问此军舰有没有触礁的危险？



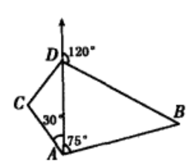
3. 测量相对位置

【例3】某货轮在A处看灯塔B在货轮北偏东75°，距离为$12\sqrt{6}$ n mile；在A处看灯塔C在货轮的北偏西30°，距离为$8\sqrt{3}$ n mile.货轮由A处向正北航行到D处时，再看灯塔B在北偏东120°，求：

(1)A处与D处之间的距离；

(2)灯塔C与D处之间的距离.

【解析】(1)如图，在$\triangle ABD$中，由已知得$\angle ADB=60°$，$B=45°$.



由正弦定理，得

$AD=\frac{AB\sin B}{\sin\angle ADB}=\frac{12\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=24$.

(2)在$\triangle ADC$中，由余弦定理，得

$CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cos 30°$，解得$CD=8\sqrt{3}$.

答：A处与D处之间的距离为24 n mile，灯塔C与D处之间的距离为$8\sqrt{3}$ n mile.

【点评】在解决与三角形有关的问题时，首先要明确题意，正确地画出图形，然后将已知量和未知量归结到三角形中，再根据条件和图形特点，寻找解决问题的方法.