



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 高等数学基础

## 多元函数微积分与线性常微分方程

(第二版)

马知恩 王绵森 主编



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学基础

# 多元函数微积分与线性 常微分方程

Duoyuan Hanshu Weijifen yu Xianxing  
Changweifen Fangcheng

(第二版)

马知恩 王绵森 主编



高等教育出版社·北京  
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学基础. 多元函数微积分与线性常微分方程/马知恩,王绵森主编.—2版.—北京:高等教育出版社,2010.7

ISBN 978-7-04-029668-6

I. ①高… II. ①马…②王… III. ①高等数学-高等学校-教材②微积分-高等学校-教材③常微分方程-高等学校-教材 IV. ①O13②O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第082164号

策划编辑 王 强      责任编辑 王 强      封面设计 张 志  
责任绘图 宗小梅      版式设计 范晓红      责任校对 金 辉  
责任印制 张泽业

---

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街4号  
邮政编码 100120

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司  
印 刷 三河市华润印刷有限公司

开 本 787×960 1/16  
印 张 23.5  
字 数 420 000

购书热线 010-58581118  
咨询电话 400-810-0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landaco.com>  
<http://www.landaco.com.cn>  
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2005年2月第1版  
2010年7月第2版  
印 次 2010年7月第1次印刷  
定 价 29.50元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 29668-00

## 内容提要

由西安交通大学编写的普通高等教育“十一五”国家级规划教材——《高等数学基础》(第二版)共分三册,本书是其中的一册,内容包括多元函数微分学及其应用、多元函数积分学及其应用、线性常微分方程三章及附录 I 矩阵与行列式初步、附录 II 向量代数与空间解析几何、附录 III 部分曲面和空间立体的图形。

本书较第一版适当降低了教学要求,删去了一些要求较高的理论内容,努力揭示数学概念的本质,注重数学思想方法的讲授和应用能力的培养,加强基本训练,更加符合认知规律、更易于被读者接受。

本书体系结构简明严谨,内容丰富,要求适中,应用实例范围广泛,叙述清晰,深入浅出,富于启发性。习题分为 A、B 两类,并配有综合练习题,书末附部分习题答案与提示。

本书可作为高等理工科院校非数学类专业本科生的教材,也可供其他社会读者阅读与参考。

## 第二版前言

本套教材(《高等数学基础》,包括《一元函数微积分与无穷级数》、《多元函数微积分与线性常微分方程》、《线性代数与解析几何》三个分册)第一版自2004年7月出版以来,被不少兄弟院校作为相关课程的教材,第二版又被列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材。为了进一步提高教材的质量,我们在听取了同行专家、使用过该套教材的教师和读者意见的基础上,总结了近年来的教学经验,对第一版进行了认真的修改,在保持第一版的基本框架结构和主要特色的基础上,本次修改主要集中在以下几个方面。

1. 精简了次要内容,删去了某些较难的理论,适当降低了难度。例如:删去了二重积分一般换元公式的证明及三重积分的一般换元法,仅保留了二重积分的一般换元公式;删去了空间曲线的曲率、挠率与 Frenet 标架,将平面曲线的曲率以及与此密切相关的平面曲线的弧长、弧微分的内容移到《一元函数微积分与无穷级数》分册中;对二元函数的极限和连续性定义进行了改写,将第一版中要求 $(x_0, y_0)$ 是函数定义域的聚点改为仅要求函数定义在 $(x_0, y_0)$ 的邻域中,与一元函数类似的方法来定义,然后对定义域的边界点等情况再将定义作适当的拓展;将有界闭集上连续函数的性质改为在有界闭域上讨论;二元函数在点 $(x_0, y_0)$ 处可微的充分条件中删去了该函数“在 $(x_0, y_0)$ 的邻域内可偏导”的要求。

2. 为了进一步培养学生应用数学知识分析解决实际问题的能力,在《线性代数与解析几何》分册中,新增了“MATLAB 软件简介及其应用举例”一章供各校选用,既可作为数学实验课的内容,也可穿插在有关内容中讲解。鉴于加强几何直观和应用的重要性,在新版中增加了多元函数的等值线与等值面及其在函数的几何表示、梯度和 Lagrange 乘法法的应用方面的内容。另外,新版中还增加了一些饶有趣味的应用方面的例题和习题。

3. 考虑到当前我国中学数学教学的实际情况,新版中还适当增加了一些内容或附录。例如:在一元函数中增加了函数的参数表示与极坐标表示;在《一元函数微积分与无穷级数》分册后面编写了“几种常用的曲线”、“几类常用的初等

数学公式”和“复数简介”三个附录；在《多元函数微积分与线性常微分方程》分册后面增加了“部分曲面和空间立体的图形”(共 25 幅)一个附录。这些内容可供读者选学或查阅。

4. 对某些内容的讲述方法和全书的文字表述作了进一步加工,使得本套教材更富于可读性和启发性,同时也改正了少数不确切甚至错误之处(例如:误将无穷小量阶的高低看作是无穷小量趋于零的“速度”)。

5. 删去了习题(特别是每章后的习题)中的一些难题,增加了一些基本训练题和应用题。

参加第二版微积分两个分册修订工作的有:马知恩、王绵森、魏战线、武忠祥、常争鸣;参加《线性代数与解析几何》分册修订工作的有魏战线、李继成。

多年来,许多同行专家及使用过本套教材的兄弟院校和西安交通大学的老师和学生通过多种方式对本套教材第一版提出了很多非常宝贵的意见和建议,这些意见和建议对提高本书的质量起到了重要的作用。在此,编者向他们表示诚挚的感谢,并恳请他们对第二版继续提出批评和进一步修改的意见。

编 者

二〇一〇年三月于西安交通大学

# 第一版前言

本套教材是普通高等教育“十五”国家级规划教材。全套教材共分三册,即《一元函数微积分与无穷级数》、《线性代数与解析几何》、《多元函数微积分与线性常微分方程》,其中的微积分部分是作者编写的《工科数学分析基础》一书的简化本。《工科数学分析基础》是由高等教育出版社出版的面向 21 世纪课程教材,也是“九五”国家级重点教材,并于 2001 年获中国高校科学技术一等奖,2002 年获国家优秀教材一等奖,适用于高等理工科院校对数学要求较高的非数学类专业的本科生。本套教材则兼顾科技发展的需要和当前我国高等院校的实际情况,对《工科数学分析基础》内容的深、广度作较大幅度的调整,使其适用于多数院校的教学需求。本书在编写的指导思想和内容体系方面继承了《工科数学分析基础》的一些主要特色:

1. 适当拓宽必要的数学基础。与《工科数学分析基础》相比,本套教材虽然删去了实数完备性、确界定理、一致连续、含参变量积分、微分方程稳定性与无限维分析等内容,削减了极限理论以及某些定理的证明,并对级数的一致收敛、二元函数的 Taylor 公式、Frenet 标架、挠率、重积分的一般换元法、线性微分方程组等目录标题前冠以“\*”号,其内容用楷体字排印,不作为教学基本要求。但是,本书仍保留了在集合与映射的基础上讲解函数、极限的基本理论、向量值函数的微分、通过向量值函数的微分来研究曲线与曲面的性质等内容。对于没有给出分析证明的重要定理,也努力通过几何直观或其他方法分析并揭示定理的正确性或定理证明的基本思路,以便使学生掌握必要的数学知识的同时,在数学的抽象性、逻辑性和严谨性方面受到必要的基本训练,培养他们的理性思维方法,提高数学素养和能力。

2. 注意分析、代数与几何相关内容的有机结合和相互渗透。本套教材从多元函数微分学开始,就注意逐步加强向量和矩阵的运用,利用向量、矩阵和线性代数中的知识来表述微积分中的有关内容,并采用从二维、三维逐步过渡到  $n$  维的讲解方法。例如,利用 Jacobi 矩阵来表示向量值函数的导数和微分;用向量值函数的微分来研究曲线和曲面的性质;将第二型线、面积分与向量场的研究结合

起来。另一方面,在线性代数中,又列举了一些分析方面的例题,说明线性代数的某些概念。例如在讲解内积时,介绍了用两个函数乘积的定积分定义函数空间中内积的例子,在矩阵特征值理论中讲解了它在求解线性微分方程组方面的应用等。这样做,既有利于培养学生综合运用数学知识的能力,又能更好地满足现代科技的发展对数学的需求。

3. 强化学生数学应用能力的培养。在讲解数学内容的同时,着力于揭示数学概念的本质和在实际问题中有重要应用的数学思想方法是本书的另一个鲜明特色。例如,编者反复强调了微积分基本思想方法、局部线性化方法、逼近的思想、最优化方法、微元法以及变量代换的思想和方法等。为了培养学生应用数学解决实际问题的意识、兴趣和能力,书中精选了一批工程、生态、人口、经济、医学,甚至在日常生活方面饶有趣味的应用性例题和习题,并配备了一些综合练习题,供读者选做。

4. 削减次要内容,淡化运算技巧的训练。与某些传统教材相比,本套教材精减了一些次要内容。例如,以链式法则为主线讲解一元函数求导法;以换元法和分部积分法两种基本方法为主线讲解积分法,将一些简单的有理函数、三角有理函数和无理函数的积分作为两种基本积分法的应用例题;将某些近似计算方法移至数学实验等后继课中;每节配备的习题均分为A、B两类,微积分部分每章后还配备了一些综合性习题。A类为基本要求题,致力于基本概念、基本理论、基本运算和应用的训练;B类以及每章后配备的习题,可供学有余力的同学选做。

5. 适当采用了一些近代数学的思想、术语和符号,为学生学习近代数学开设一些“窗口”和“接口”。与《工科数学分析基础》相比,本套教材删去了不少要求较高的内容,但仍保留了某些近代数学的思想和观点。例如,将多元函数分为数量值函数与向量值函数,定义为从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的映射;将定积分、重积分、第一型线(面)积分统一为几何形体上的数量值函数的积分;以参数方程为主线讲解曲线与曲面的有关内容等。但在讲解这些内容时,我们更加注意可接受性,采用由直观到抽象、由特殊到一般的方法循序渐进,逐步深入。

本套教材中的《线性代数与解析几何》分册介绍了线性代数和空间解析几何的基本内容,共分八章。该分册采用模块式结构,可根据不同专业大类的教学要求和学时对内容进行取舍。讲完基本内容(除打“\*”的部分)需42~48学时,讲完全部内容需56~60学时。该分册力求将线性代数与解析几何相互结合,相互渗透,并为学习多元函数微积分和线性常微分方程提供必要的准备,因此,它既可与微积分课程配套使用,又可单独作为线性代数课程的教材。

由于学习本套教材的《多元函数微积分与线性常微分方程》分册需要少量线性代数与解析几何的知识,因此使用本套教材可采用两种不同的方法。一种



是将线性代数与解析几何单独设课,与一元函数微积分双轨并进,在学习多元函数微积分与线性常微分方程前完成;另一种是用单轨串连式,即先讲一元函数微积分,再讲线性代数与解析几何,最后讲多元函数微积分。本套教材在《多元函数微积分与线性常微分方程》分册后编写了一个附录,简要介绍了使用该分册时所必须具备的线性代数和解析几何的基本知识。这样,即便对于某些将线性代数在二年级单独设课,而将解析几何放在高等数学课程中讲解的院校(如果不讲线性微分方程组一节),也可用本套教材作为教材。

另外,为了便于在高等数学课程中进行双语教学,编者与美国著名数学家 Fred Brauer 合作,编写了书名为《Fundamentals of Advanced Mathematics》的英文教材,由高等教育出版社正式出版。该书在体系和内容方面与本套教材基本相同,是两本相互配套的教材。因此,一方面,本套教材可作为使用该英文教材进行双语教学师生配套的参考书;另一方面,使用本套教材的读者也可将该英文教材作为一本英文参考书。

参加本套教材编写的有马知恩、王绵森、魏战线、武忠祥、常争鸣和徐文雄。全套教材分三册,其中《一元函数微积分与无穷级数》由王绵森、马知恩主编,《多元函数微积分与线性常微分方程》由马知恩、王绵森主编,《线性代数与解析几何》由魏战线编。本套教材已在西安交通大学电气工程学院等多个教学大班试用过2~3届,任课教师提出的许多宝贵意见对书稿的修改完善起了重要作用。借此机会对参加试用的所有教师表示衷心的感谢。同时,感谢高等教育出版社的编辑们,他们为本套教材的出版和质量的提高起了十分重要的作用。

本套教材得到了高等教育出版社和西安交通大学教务处的资助,在此,我们向有关方面一并表示感谢!

本套教材虽几经试用和修改,但由于编者水平所限,加之时间较紧,不妥之处在所难免。恳请专家、同行以及广大读者不吝指正,使本套教材在今后的教学实践中日臻完善!

编 者

二〇〇四年四月于西安交通大学

# 目 录

第 5 章 多元函数微分学及其应用	1
第一节 多元函数的极限与连续	1
1.1 $\mathbf{R}^n$ 空间中点集的初步知识	1
1.2 多元函数的概念	4
1.3 多元函数的极限与连续性	7
习题 5.1	10
第二节 多元函数的偏导数与全微分	12
2.1 偏导数	12
2.2 全微分	16
2.3 高阶偏导数	22
2.4 方向导数与梯度	24
习题 5.2	32
第三节 多元复合函数和隐函数的微分法	34
3.1 多元复合函数的偏导数与全微分	34
3.2 由一个方程确定的隐函数的微分法	41
3.3 由方程组所确定的隐函数的微分法	43
习题 5.3	46
第四节 多元函数的极值问题	47
4.1 无约束极值	47
4.2 最大值与最小值	49
4.3 有约束极值, Lagrange 乘法法	56
习题 5.4	60
* 第五节 二元函数的 Taylor 公式	61
5.1 二元函数的 Taylor 公式	61
5.2 二元函数极值充分条件的证明	64
习题 5.5	65
第六节 向量值函数的导数与微分	65

6.1 一元向量值函数的导数与微分 .....	65
6.2 二元向量值函数的导数与微分 .....	71
6.3 微分运算法则 .....	74
习题 5.6 .....	76
第七节 多元函数微分学在几何中的应用 .....	77
7.1 空间曲线的切线与法平面 .....	77
7.2 曲面的切平面与法线 .....	82
习题 5.7 .....	91
第 5 章习题 .....	92
综合练习题 .....	96
<b>第 6 章 多元函数积分学及其应用</b> .....	97
第一节 多元数量值函数积分的概念与性质 .....	97
1.1 物体质量的计算 .....	97
1.2 多元数量值函数积分的概念 .....	99
1.3 多元数量值函数积分的性质 .....	101
习题 6.1 .....	102
第二节 二重积分的计算 .....	103
2.1 二重积分的几何意义 .....	104
2.2 直角坐标系下二重积分的计算法 .....	105
2.3 极坐标系下二重积分的计算法 .....	111
* 2.4 二重积分的一般换元法 .....	117
习题 6.2 .....	121
第三节 三重积分的计算 .....	124
3.1 化三重积分为单积分与二重积分的累次积分 .....	124
3.2 柱面坐标与球面坐标下三重积分的计算法 .....	128
习题 6.3 .....	136
第四节 重积分的应用 .....	139
4.1 重积分的微元法 .....	139
4.2 应用举例 .....	143
习题 6.4 .....	146
第五节 第一型线积分与面积分 .....	147
5.1 第一型线积分 .....	147
5.2 第一型面积分 .....	151
习题 6.5 .....	157
第六节 第二型线积分与面积分 .....	160

6.1 场的概念 .....	160
6.2 第二型线积分 .....	162
6.3 第二型面积分 .....	168
习题 6.6 .....	177
第七节 各种积分的联系及其在场中的应用 .....	180
7.1 Green 公式 .....	180
7.2 平面线积分与路径无关的条件 .....	185
7.3 Stokes 公式与旋度 .....	192
7.4 Gauss 公式与散度 .....	200
7.5 几种重要的特殊向量场 .....	207
习题 6.7 .....	211
第 6 章习题 .....	214
综合练习题 .....	218
<b>第 7 章 线性常微分方程</b> .....	<b>220</b>
第一节 高阶线性微分方程 .....	220
1.1 高阶线性微分方程举例 .....	220
1.2 线性微分方程解的结构 .....	223
1.3 高阶常系数线性齐次微分方程的解法 .....	229
1.4 高阶常系数线性非齐次微分方程的解法 .....	233
1.5 高阶变系数线性微分方程的求解问题 .....	241
习题 7.1 .....	242
* 第二节 线性微分方程组 .....	244
2.1 线性微分方程组的基本概念 .....	244
2.2 线性微分方程组解的结构 .....	245
2.3 常系数线性齐次微分方程组的求解方法 .....	253
2.4 常系数线性非齐次微分方程组的求解 .....	262
2.5 微分方程组应用举例 .....	264
习题 7.2 .....	269
第 7 章习题 .....	271
综合练习题 .....	272
<b>附录 I 矩阵与行列式初步</b> .....	<b>273</b>
<b>附录 II 向量代数与空间解析几何</b> .....	<b>283</b>
<b>附录 III 部分曲面和空间立体的图形</b> .....	<b>328</b>
部分习题答案与提示 .....	340

# 第5章 多元函数微分学及其应用

在上册中,我们讨论了一元函数微积分,研究的对象是仅依赖于一个自变量的一元函数.然而,在实际问题中常会遇到依赖于两个或两个以上自变量的所谓多元函数,因此,还需要讨论多元函数的微积分.多元函数微积分的基本概念、理论和方法是一元函数微积分中相应概念、理论和方法的推广与发展,它们既有许多相似之处,又有很多本质上的不同.读者在学习多元函数微积分的时候,要善于将它与一元函数微积分进行比较,既要注意它们的共同点和相互联系,更要注意它们之间的区别,研究所出现的新情况和新问题.这样,才能深刻理解,融会贯通.

本章讨论多元函数微分学.首先将极限、连续的概念推广到多元函数,然后重点讲解多元函数(包括多元数量值函数和多元向量值函数)的导数、微分与微分法,最后讨论多元函数微分学在多元函数极值问题和几何中的一些应用.

## 第一节 多元函数的极限与连续

同一元函数微积分一样,多元函数的极限与连续概念也是学习多元函数微积分的基础.因此需要首先将极限和连续的概念推广到多元函数.由于 $n$ 元函数的定义域是 $n$ 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的子集,所以本节先来介绍 $\mathbf{R}^n$ 中点集的一些初步知识.

### 1.1 $\mathbf{R}^n$ 空间中点集的初步知识

读者在线性代数中已学习过 $n$ 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的有关知识,现将其中主要之点作如下复习.

我们称一个 $n(n \geq 2)$ 元有序实数组

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n)$$

为一个 $n$ 维实向量,记 $n$ 维实向量全体所构成的集合为

$$\mathbf{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ ,定义两个向量的加法为

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \quad (5.1.1)$$

数  $\alpha \in \mathbf{R}$  与向量  $\mathbf{x}$  的乘法定义为

$$\alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n), \quad (5.1.2)$$

则  $\mathbf{R}^n$  按照上述向量的加法及数与向量的乘法构成一个  $n$  维实向量空间(或  $n$  维实线性空间).

在  $\mathbf{R}^n$  空间中定义两个向量  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{y}$  的内积为

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad (5.1.3)$$

则  $\mathbf{R}^n$  按照内积(5.1.3)构成一个  $n$  维 Euclid 空间.

$n$  维 Euclid 空间  $\mathbf{R}^n$  中的向量也称为点, 向量  $\mathbf{x}$  的第  $i$  个分量  $x_i$  也称为点  $\mathbf{x}$  的第  $i$  个坐标.  $\mathbf{R}^n$  中的点(向量)常用小写黑体英文字母  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$  等表示, 有时也用大写英文字母  $P, Q$  等来表示  $\mathbf{R}^n$  中的点.

特别地,  $\mathbf{R}^2$  中的点(向量)常用  $(x, y)$  来表示, 所以  $\mathbf{R}^2$  可看作是一个平面上全体点所组成的集合;  $\mathbf{R}^3$  中的点(向量)常用  $(x, y, z)$  来表示, 所以可把  $\mathbf{R}^3$  与几何空间看成是等同的.

$\mathbf{R}^n$  中向量  $\mathbf{x}$  的长度(或范数)定义为

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \quad (5.1.4)$$

两点  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{y}$  之间的距离定义为

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}. \quad (5.1.5)$$

$\mathbf{R}^n$  中上述概念显然都是  $\mathbf{R}^2$  和  $\mathbf{R}^3$  中相应概念的直接推广.

现在, 可以利用  $\mathbf{R}^n$  的线性运算和距离的概念, 来介绍  $\mathbf{R}^n$  中点集的一些基本概念, 包括邻域、开集、闭集和区域等. 虽然这些概念都是在  $\mathbf{R}^n$  空间中定义的, 但读者容易通过平面  $\mathbf{R}^2$  中的直观图形来理解它们.

**1. 邻域** 设点  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ , 常数  $\delta > 0$ , 则称  $\mathbf{R}^n$  中与点  $\mathbf{a}$  的距离小于  $\delta$  的点  $\mathbf{x}$  的全体所构成的点集为点  $\mathbf{a}$  的  $\delta$  邻域, 记为  $U(\mathbf{a}, \delta)$ , 即

$$U(\mathbf{a}, \delta) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta\},$$

而将  $U(\mathbf{a}, \delta)$  中去掉点  $\mathbf{a}$  的部分称为  $\mathbf{a}$  的去心  $\delta$  邻域, 记为  $\dot{U}(\mathbf{a}, \delta)$ , 即

$$\dot{U}(\mathbf{a}, \delta) = U(\mathbf{a}, \delta) \setminus \{\mathbf{a}\},$$

在不需要强调邻域的半径时, 通常就用  $U(\mathbf{a})$  与  $\dot{U}(\mathbf{a})$  分别表示点  $\mathbf{a}$  的某个邻域与某个去心邻域.

在直线  $\mathbf{R}$  上,  $U(\mathbf{a}, \delta)$  就是开区间  $(a - \delta, a + \delta)$ ; 在平面  $\mathbf{R}^2$  上,  $U(\mathbf{a}, \delta)$  就是以  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  为中心、 $\delta$  为半径的圆周  $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = \delta^2$  内的所有点构成的集合(称为开圆盘); 在空间  $\mathbf{R}^3$  中,  $U(\mathbf{a}, \delta)$  就是以  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  为中心、 $\delta$  为半

径的球面  $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = \delta^2$  内的所有点构成的集合,也就是通常所说的开球.

**2. 内点、外点与边界点** 设  $A$  是  $\mathbf{R}^n$  的一个点集,点  $a \in A$ ,如果存在  $a$  的一个邻域  $U(a, \delta)$ ,使得  $U(a, \delta) \subseteq A$ ,则称  $a$  为点集  $A$  的一个内点,  $A$  的内点全体所组成的集合称为  $A$  的内部,记为  $A^\circ$  或  $\text{int } A$ ; 设点  $a_1 \in \mathbf{R}^n$ ,如果存在点  $a_1$  的一个邻域  $U(a_1, \delta_1)$ ,使得  $U(a_1, \delta_1)$  中的点都不是  $A$  的点,即  $U(a_1, \delta_1) \subseteq A^c$ ,则称  $a_1$  为  $A$  的一个外点,  $A$  的外点全体所组成的集合称为  $A$  的外部,记为  $\text{ext } A$ ; 设点  $a_2 \in \mathbf{R}^n$  ( $a_2$  可能属于  $A$ ,也可能不属于  $A$ ),如果对任何  $\delta > 0$ ,  $U(a_2, \delta)$  中既含有  $A$  中的点,也含有  $A$  的余集  $A^c$  中的点,则称  $a_2$  为点集  $A$  的一个边界点,  $A$  的边界点全体所组成的集合称为  $A$  的边界,记为  $\partial A$  (图

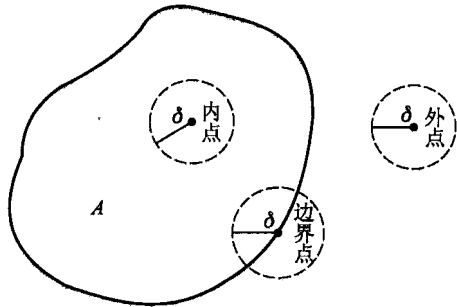


图 5.1.1

5.1.1 给出了  $\mathbf{R}^2$  中点集  $A$  的内点、外点和边界点的示意图).

例如,设  $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ ,则由上述定义易知  $A$  的内部、外部和边界分别为:  $A^\circ = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ ,  $\text{ext } A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, x^2 + y^2 > 4\}$ ,  $\partial A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4\}$ .

**3. 聚点** 设  $A$  是  $\mathbf{R}^n$  的一个点集,  $a \in \mathbf{R}^n$  (点  $a$  可能属于  $A$ ,也可能不属于  $A$ ),如果对任何  $\delta > 0$ ,点  $a$  的去心邻域  $\dot{U}(a, \delta)$  中总含有  $A$  中的点,则称点  $a$  为点集  $A$  的一个聚点.

例如,满足条件  $x^2 + y^2 \leq 4$  的任一点  $(x, y)$  都是集合  $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 4\}$  的聚点,  $(0, 0)$  点并不属于  $A$ ,但却是  $A$  的聚点.

**4. 开集与闭集** 设  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ,如果  $A$  的点都是  $A$  的内点,即  $A^\circ = A$ ,则称  $A$  为  $\mathbf{R}^n$  的开集;如果  $A$  的余集  $A^c$  为开集,则称  $A$  为闭集<sup>①</sup>.

例如,  $\mathbf{R}^2$  中的点集  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$  是开集;  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$  是闭集;而  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$  既不是开集也不是闭集.

**5. 区域** 设  $a$  与  $b$  是  $\mathbf{R}^n$  中两个不同点,称点集

$$\{ta + (1 - t)b \mid t \in \mathbf{R}, 0 \leq t \leq 1\}$$

为  $\mathbf{R}^n$  中联结  $a$  与  $b$  的线段. 设  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ,如果  $A$  是开集,而且  $A$  中任意两点都可以用完全含在  $A$  中的由有限条线段所组成的折线联结起来(具有此性质的点集

① 通常约定空集  $\emptyset$  及全空间  $\mathbf{R}^n$  既是开集也是闭集.

$A$  称为连通集), 则称  $A$  是开区域或区域, 换句话说, 区域是指连通的开集. 区域连同它的边界一起, 称为闭区域<sup>①</sup>.

**6. 有界集与无界集** 设  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ , 如果存在一个常数  $M > 0$ , 使得对于所有的  $x \in A$ , 都有  $\|x\| < M$ , 则称  $A$  是有界集, 否则称为无界集. 显然, 有界集的几何意义是它能被包含在一个以原点  $O$  为中心、 $M$  为半径的开球  $U(O, M)$  中.

## 1.2 多元函数的概念

在实际问题中常常要研究多个变量之间的关系. 例如, 理想气体状态方程式  $P = R \frac{T}{V}$  ( $R$  为常数) 表示气体的压强  $P$  对体积  $V$  及绝对温度  $T$  的依赖关系, 它可以看成两个自变量  $V$  和  $T$  与一个因变量  $P$  之间的关系. 这里的自变量有两个, 我们称  $P$  是关于  $V, T$  的二元函数.

**定义 5.1.1 (二元函数)** 设  $A \subseteq \mathbf{R}^2$  是一个点集,  $f: A \rightarrow \mathbf{R}$  是一个映射, 则称  $f$  是定义在  $A$  上的一个二元函数. 这个函数也可记为

$$z = f(x, y) \text{ (或 } z = z(x, y)), \forall (x, y) \in A,$$

若把  $(x, y)$  记作点  $P$ , 也可记为  $z = f(P)$ ,  $\forall P \in A$ . 其中  $(x, y) \in A$  称为自变量,  $z$  称为因变量,  $D(f) = A$  称为  $f$  的定义域,  $R(f) = \{z \mid z = f(x, y), (x, y) \in A\}$  称为  $f$  的值域.

与一元函数类似, 如果没有指定二元函数  $f$  的定义域, 则  $f$  的定义域是指使得该函数有确定值的实数对  $(x, y)$  的全体, 对于实际问题, 还要求使得该实际问题有意义.

将二元函数  $f$  的自变量  $(x, y)$  看作  $xOy$  平面上点的坐标, 则  $f$  的定义域就可以用  $xOy$  平面上点的集合来表示, 常见的定义域是  $xOy$  平面上的一个或几个区域.

**例 5.1.1** 求下列函数的定义域  $A$ :

(1)  $z = \ln(1 - x^2 - 2y^2)$ ;

(2)  $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$ ;

(3)  $u = \frac{1}{\sqrt{z - x^2 - y^2}}$ .

**解** (1)  $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 < 1\}$ , 它是  $xOy$  平面上以椭圆  $x^2 + 2y^2 = 1$  为边界的有界区域(图 5.1.2(a) 中阴影部分, 不含椭圆).

(2)  $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \geq 1\}$ , 它表示  $xOy$  平面上的两个无界闭区域(图 5.1.2(b) 中阴影部分). **■**

**二元函数的图像** 对于二元函数  $z = f(x, y)$ , 设  $(x, y) \in D(f) = A$ , 则对应的

<sup>①</sup> 严格地说, 所谓区域是指开区域, 但有时区域也用作开区域和闭区域的统称.



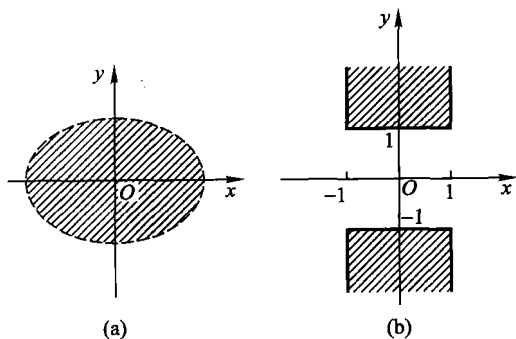


图 5.1.2

函数值为  $z=f(x,y)$ , 这样, 以  $x$  为横坐标、以  $y$  为纵坐标、以  $z$  为竖坐标, 在  $O-xyz$  空间直角坐标系中就确定了一点  $M(x,y,z)$ . 当  $(x,y)$  取遍  $A$  上的一切点时, 所得到的  $\mathbf{R}^3$  的点集

$$\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x,y) \in A, z=f(x,y)\}$$

称为函数  $z=f(x,y)$  的**图像**, 记为  $Gr(f)$ , 它通常是空间的一张曲面, 而这个曲面在  $xOy$  面的投影区域就是  $f$  的定义域  $A$ . 例如函

数  $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$  的图像是立在  $xOy$  面之上的上半球面 (图 5.1.3), 它在  $xOy$  面的投影域正是该函数的定义域  $A=\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ .

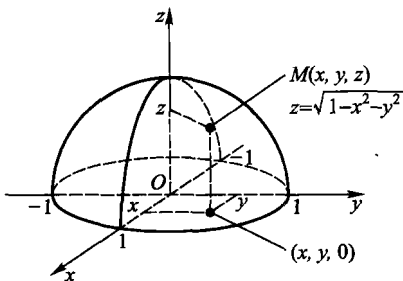


图 5.1.3

**二元函数的等值线** 另一种图示函数  $z=f(x,y)$  的方法是利用所谓的等值线  $f(x,y)=C$ , 其中  $C$  为常数. 它表示  $xOy$  平面上的曲线族. 当点  $(x,y)$  在其中每一条曲线  $f(x,y)=C_0$  上变化时, 函数  $f(x,y)$  都取相同的值  $C_0$ . 容易看出, 等值线  $f(x,y)=C$  实际上就是曲面  $z=f(x,y)$  与平面  $z=C$  的交线在  $xOy$  坐标平面上的投影 (图 5.1.4). 因此, 将等值线  $f(x,y)=C$  族中各曲线升到相应的高度  $z=C$  处就不难想象出曲面  $z=f(x,y)$  的图像. 地图中的等高线就是等值线的一种. 用水平平面  $z=C$  截小山表面, 其截线在  $xOy$  平面上的投影就是表示这个小山形状的函数  $z=f(x,y)$  的等高线  $f(x,y)=C$ . 这一系列 ( $C$  取不同值) 等高线就形成了此山体的地形图 (鸟瞰图). 例如, 若将图 5.1.4 中的曲面  $z=f(x,y)$  看作是一小山的表面形状, 由其等高线  $f(x,y)=C$  便可看出, 山体朝  $y$  轴正向的一侧由于等高线比较密集, 从而山体较为陡峭, 而相反的一侧则相对较为平缓.

**例 5.1.2** 画出函数  $z=x^2+y^2$  的等值线, 并由此等值线讨论此曲面的形状.

**解** 显然, 此函数的等值线为