常微分方程：理论、建模与发展

郭玉翠 编著

清华大学出版社

常微分方程：理论、建模与发展

郭玉翠 编著

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书是在数学与应用数学专业使用的常微分方程讲义的基础上编写而成的，除了讲述常微分方程的基础理论外，突出“发展”和“建模”两条线索，体现常微分方程学科的建立和发展与解决实际问题的密切关系.全书分为7章，分别讲述微分方程概论、微分方程模型、初等积分法、基本定理、线性微分方程(组)的理论和解法、非线性微分方程组、首次积分与一阶偏微分方程.

本书可以作为数学与应用数学、信息科学与计算数学等专业“常微分方程”课程的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程：理论、建模与发展/郭玉翠编著.--北京：清华大学出版社，2010.8

ISBN 978-7-302-23177-6

Ⅰ.①常…　Ⅱ.①郭…　Ⅲ.①常微分方程　Ⅳ.①O175.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第122494号

责任编辑：刘　颖
责任校对：刘玉霞
责任印制：何　芊
出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社　总　机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质　量　反　馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　**印　张**：15　**字　数**：234千字
版　　次：2010年8月第1版　　**印　　次**：2010年8月第1次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：25.00元

产品编号：036430-01

前 言

FOREWORD

市面上能够买到的《常微分方程》教材不可谓不多，选一本拿来教是最省事的办法. 然而在教学和科研活动中我们发现并深切体会到“常微分方程”这门课程从其诞生之日起，就根植在生产和生活实际之中，并且伴随着物理和其他工程学科(比如生物工程、信息工程、环境工程甚至人口与计划生育工程)的发展而不断丰富和发展，几乎每年都有从实际问题中产生的微分方程需要求解和讨论解的性质. 于是我们决定编写这本教材，除了保持微分方程原有体系和理论完整外，本教材主要突出“发展”和“建模”两个观点.

1. 微分方程发展的思想贯穿始终

我们的做法并不是在书的前面或其他地方加上些发展史的内容，而是使“发展的思想”贯穿始终，当然强调微分方程的早期发展，这些发展是随着课程内容逐渐渗透到教材中的. 我们向学生阐明：每一个完善的定义、严密的定理实际上是数学百花园中的“果子”，我们讲数学的严谨性、完美性是通过这些果子体现的. 然而果子的成长成熟过程是需要时间和劳动的. 首先果树要经过播种、发芽阶段，出土以后需要阳光雨露的滋养、需要除虫、施肥的培育，也需要抵御风霜雪雨的侵害. 这个成长过程是漫长的，中间需要经过许多科学家园丁般的辛勤努力. 果子是甜美的，然而要培育出自己的果子，必须使学生们透过果子去了解果树的成长过程，了解科学园丁们不懈的思考和劳作. 比如对里卡蒂(Riccati)方程的认识，充分体现了这个过程.

里卡蒂方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y^2+q(x)y+r(x) \tag{0.1}$$

是形式上最简单的非线性常微分方程，在历史上和近代，在理论和实际中都有重要应用. 关于里卡蒂方程有两个重要定理.

定理 1 设已知里卡蒂方程(0.1)的一个特解 $\varphi(x)$，则可以用初等积分法求得它的通解.

定理 2 设有里卡蒂方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay^2=bx^m, \tag{0.2}$$

其中 a,b,m 都是常数，且设 $a\neq 0$ 及 $x\neq 0,y\neq 0$. 则当

$$m=0,-2,\frac{-4k}{2k+1},\frac{-4k}{2k-1}\quad (k=1,2,\cdots)$$

时，方程(0.2)可以通过适当的变量变换化成变量可分离方程.

定理 2 充分性的证明是在 1725 年由法国数学家丹尼尔·伯努利(Daniel Bernoulli)(1700—1782)做出的. 而其必要性的证明直到 1841 年才由另一位法国数学家刘维尔(Liouville)(1809—1882)给出. 在丹尼尔·伯努利做出贡献的年代，对微分方程的研究主要集中在对出现在重大的实际力学问题中的微分方程的解析求解上. 包括牛顿、莱布尼茨在内的许多数学家如伯努利(家族)、欧拉、高斯、拉格朗日和拉普拉斯等在这方面都做出了突出贡献. 但是在对这些微分方程求解的过程中，数学家们也逐渐发现很多微分方程的解不能用初等函数表示出来. 于是人们开始另辟新径，探讨在不求出微分方程解的情况下，直接从方程的结构出发，分析方程解的重要性质. 因此，1841 年刘维尔关于里卡蒂方程第二个定理必要性的证明成了微分方程发展史上里程碑式的工作. 因为这个必要性告诉人们：形式很简单的常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$$

不能用初等积分法求解！此后以解的存在性、唯一性以及解的各种性质的研究为内容的微分方程论才成为微分方程研究的又一方向，使微分方程的发展进入了一个多元化时期.

因此，在教材的编写过程中，我们力图循着常微分方程发展的脚步，逐渐将这门学科的主要内容连同它们发展的重要里程碑展现在读者面前，读此书更像做一次探寻微分方程发展之路的探险之旅，不但学到知识，更领略数学大师的思想痕迹，并从中得到启发. 我们在课上课下总是跟学生讲，学过一门课会做若干道题不是大学生学习的主要目的，主要目的是以知识为载体，学习产生知识的思想. 因为只有思想才是创造的源泉，而形成思想的好办法就是与大师“攀谈”、“对话”，在深入的交流与询问之中碰撞出思想的火花.

这样，在学习每个知识点的时候，在感觉上这些知识点就不是孤立的、抽象的、难涩的数学概念和定理，而是充满着科学思辨、螺旋式发展以及智者思想光芒的事件、成果. 这样由微分方程发展史引领知识点展开主线的方法将把读者引入知识的殿堂、智慧的宝库，徜徉其中，定会受益匪浅. 微分方程的现代发展我们是通过建模的思想来体现的.

2. 微分方程“建模”的思想贯穿始终

前面已经提到过，微分方程的发展一直伴随着物理和其他应用学科的发展. 每年都有新的有实际背景的微分方程出现，这些新的微分方程给微分方程这门古老的学科注入了新的活力. 在教学过程中，我们注意强调知识的应用性、鲜活性，注意知识的“源”和“流”之间的关系. 这种思想是通过微分方程模型的思想来体现的. 我们的做法仍然是使这种思想贯穿教材的始终，而不只是在一个章节中讲完. 比如在讲高阶方程的解法时，我们不只是讲了悬链线方程的解法，而是讲了悬链线的建模过程，使这个古老的工程问题成为讲“建模”思想的很好

的例子，并且可以通过这个例子使学生思考，如果这个“线”是运动的，结果会怎样？通过这样的思考，偏微分方程中的“弦振动”问题就迎刃而解了，知识之间都是相互关联的！

再比如在讲微分方程定性理论的时候，以往的教科书中很少举例，而给学生的印象是这部分内容很抽象、难懂，理解了也不会应用.在我们的教材中在“相空间”理论和“稳定性”理论部分都加上与生产和生活实际密切相关的微分模型的例子——传染病动力学模型和捕鱼业可持续发展的模型，不但有助于学生对内容的理解，更启发学生对知识的灵活掌握，培养他们初步科学研究的能力.

本教材除了突出以上两点外，在线性方程(组)的处理上，应用高阶方程和一阶方程组之间的等价关系，将高阶方程和方程组统一起来讲，这样使知识容易理解并且无需记忆关于线性方程和方程组两套定理.对使用首次积分法等方法求解非线性方程和方程组也有好处.总之，我们是用心的，我们在努力！教材在出版以前，作为讲义已经使用多次，学生反映和教学效果很好，但由于我们水平有限，书中还会有很多不足甚至错误，敬请各位读者朋友批评指正、不吝赐教.先致谢意！

本书由郭玉翠执笔，参加编写的还有单文锐、吕卓生、石霞、陈秀卿和田玉.

本书作者感谢北京邮电大学教务处精品课程建设资金的支持，感谢各位师友和读者的支持.

作　者

2010 年 7 月

目录

CONTENTS

第 1 章　微分方程概论 …… 1

1.1　基本概念 …… 1

1.2　几何解释 …… 3

1.3　微分方程论简介 …… 7

1.4　常微分方程发展简史与相关著名科学家简介 …… 8

1.4.1　常微分方程发展简史 …… 8

1.4.2　对微分方程发展有重要贡献的数学家简介 …… 10

习题 1 …… 13

第 2 章　微分方程模型 …… 14

2.1　简单模型 …… 14

2.2　人口问题模型 …… 18

2.3　传染病动力学模型 …… 22

习题 2 …… 26

第 3 章　初等积分法 …… 28

3.1　分离变量法 …… 28

3.1.1　可分离变量方程 …… 28

3.1.2　可化为分离变量方程的方程 …… 30

3.2　一阶线性微分方程 …… 34

3.2.1　一阶线性齐次方程 …… 34

3.2.2　非齐次方程,参数变易法 …… 35

3.2.3　伯努利方程 …… 37

3.2.4 里卡蒂方程 …… 38
3.3 全微分方程,积分因子法 …… 40
3.3.1 全微分方程 …… 40
3.3.2 积分因子 …… 46
3.4 一阶隐式方程与解的积分表示 …… 50
3.4.1 可以解出 y 或 x 的方程 …… 50
3.4.2 不显含 y(或 x)的方程 …… 54
3.5 高阶微分方程的几种可积类型 …… 56
3.5.1 方程 $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\cdots,y^{(n)})=0$ …… 56
3.5.2 方程 $F(y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ …… 59
习题 3 …… 61

第 4 章 基本定理 …… 66

4.1 引言 …… 66
4.2 解的存在唯一性定理 …… 68
4.3 解的延拓 …… 74
4.4 解对初值的连续性和可微性定理 …… 78
4.4.1 解对初值的连续性 …… 78
4.4.2 解对初值的可微性 …… 82
习题 4 …… 84

第 5 章 线性微分方程(组)的理论和解法 …… 88

5.1 化任意正规型微分方程和方程组为一阶正规型微分方程组 …… 88
5.2 一阶线性方程组解的存在唯一性定理 …… 92
5.3 线性微分方程组 …… 96
5.3.1 齐次线性微分方程组 …… 96
5.3.2 非齐次线性微分方程组,常数变易法 …… 100
5.4 常系数线性微分方程组的解法 …… 103
5.4.1 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根均是单根的情形 …… 104
5.4.2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有重的特征根的情形 …… 111
5.4.3 常系数线性非齐次微分方程组的解法 …… 115
5.5 高阶线性微分方程 …… 118
5.6 常系数高阶线性微分方程 …… 123
5.6.1 常系数线性齐次方程 …… 123
5.6.2 常系数线性非齐次方程 …… 125

5.6.3 线性非齐次方程的叠加原理 …… 128
5.6.4 欧拉方程 …… 128
习题 5 …… 130

第 6 章 非线性微分方程组 …… 139

6.1 动力系统与自治微分方程的概念 …… 139
6.1.1 引例 …… 140
6.1.2 基本概念 …… 141
6.2 自治微分方程组解的性质 …… 149
6.2.1 自治系统轨线的特点 …… 150
6.2.2 自治系统解的基本性质 …… 151
6.2.3 应用实例——传染病动力学模型分析 …… 153
6.3 平面线性系统的稳定性 …… 156
6.4 按线性近似决定非线性微分方程组的稳定性 …… 163
6.5 李雅普诺夫第二方法 …… 167
6.6 周期解与极限环 …… 174
习题 6 …… 183

第 7 章 首次积分与一阶偏微分方程 …… 185

7.1 一阶常微分方程组的首次积分 …… 185
7.1.1 首次积分的定义 …… 185
7.1.2 首次积分的性质 …… 189
7.1.3 首次积分的存在性 …… 192
7.2 一阶线性偏微分方程 …… 199
7.2.1 一阶齐次线性偏微分方程 …… 199
7.2.2 一阶拟线性偏微分方程 …… 201
7.3 一阶偏微分方程解的几何解释 …… 204
习题 7 …… 206

附录 系统矩阵 A 有重特征根时线性常微分方程组的解 …… 208

部分习题参考答案 …… 217

参考文献 …… 229

第1章

微分方程概论

1.1 基本概念

微分方程是联系自变量、未知函数以及未知函数的导数或微分的等式，其中未知函数的导数或微分必须出现在等式中. 当未知函数只依赖于一个自变量时，相应的微分方程称为**常微分方程**，当未知函数是多元函数时，相应的微分方程称为**偏微分方程**. 微分方程在物理学、化学、生物科学、工程科学甚至社会科学中有着广泛应用，有些学科的基本方程就是微分方程或微分方程组. 在物理学中常见的微分方程有

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v(t),\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a(t),\qquad \text{(运动方程)} \tag{1.1.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}+\alpha\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+k^2 s=f\sin\omega t,\qquad \text{(振动方程)} \tag{1.1.2}$$

$$v+m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}m}=v^2,\qquad \text{(火箭的质量与速度的关系)} \tag{1.1.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{w}{H}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2},\qquad \text{(悬索线方程)} \tag{1.1.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EJ(x)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)=q(x),\qquad \text{(梁的挠度方程)} \tag{1.1.5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\qquad \text{(静电场的电势方程)} \tag{1.1.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),\qquad \text{(热传导方程)} \tag{1.1.7}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),\qquad \text{(波动方程)} \tag{1.1.8}$$

$$D\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)=q(x,y),\qquad \text{(板弯曲方程)} \tag{1.1.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0, \quad \text{（浅水波方程）} \tag{1.1.10}$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial q}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}+|q|^2 q=0 \quad \text{（非线性薛定谔(Schrödinger)方程）} \tag{1.1.11}$$

等各种形式.

容易看出上述微分方程中(1.1.1)～(1.1.5)是常微分方程；而方程(1.1.6)～(1.1.11)是偏微分方程.

微分方程中待定函数的最高阶导数的阶数，称为微分方程的阶. n 阶常微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{1.1.12}$$

或

$$y^{(n)}=F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n-1)}). \tag{1.1.13}$$

其中 F 是它所依赖的 $n+2(n+1)$ 个变量的已知函数. 像方程(1.1.13)这样已经就最高阶导数解出的微分方程称为**正规型微分方程**. 而称形如方程(1.1.12)的方程为**隐式微分方程**.

如果待定函数和它的各阶导数都独立地以一次的形式出现在方程的各项中，即方程(1.1.12)和方程(1.1.13)中的 F 可以写成 y 的各阶导数的线性组合形式，则这种微分方程称为线性的，正规型 n 阶线性常微分方程的一般形式为

$$y^{(n)}=a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y+f(x). \tag{1.1.14}$$

含有 n 个自变量的二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n}B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu=f, \tag{1.1.15}$$

其中 A_{ik},B_i,C,f 都只是自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数，与待定函数 u 无关. 两个自变量的二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+F(x,y)u=f(x,y). \tag{1.1.16}$$

方程(1.1.14)～(1.1.16)中的 f 称为"外源"项，如果 $f\equiv 0$，称相应的线性微分方程为齐次线性微分方程，否则称为非齐次线性微分方程.

在本节开始列出的微分方程(1.1.1)～(1.1.11)中的方程(1.1.1)，(1.1.2)，(1.1.5)～(1.1.9)都是线性微分方程，而方程(1.1.3)和(1.1.4)是非线性常微分方程，方程(1.1.10)和(1.1.11)是非线性偏微分方程.

设 I 是一个区间，函数 $y=\varphi(x)$ 在 I 上有定义，而且有直到 n 阶导数，如果对任意 $x\in I$，有

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))=0, \tag{1.1.17}$$

或

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x,\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x),\cdots,\varphi^{(n-1)}(x)) \tag{1.1.18}$$

成立,**则称 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$是微分方程(1.1.12)或(1.1.13)的解**. $y=\varphi(x)$在 xOy 坐标平面内代表的曲线称为**积分曲线**.

最简单的微分方程 $y'=f(x)$的求解就是已知导数求原函数的问题. 推而广之,微分方程的解是通过积分(不定积分)求得的,有一阶导数需要积分一次,出现一个任意常数. 所以一般来说,**$\boldsymbol{n}$ 阶常微分方程的解中含有 $\boldsymbol{n}$ 个任意常数**,即

$$y = \varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n), \tag{1.1.19}$$

其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为任意常数.

微分方程解中独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同时,称这种解为微分方程的**通解**或**一般解**.

由于通解中含有任意常数,所以它不能完全地反映特定客观事物的规律性,必须确定这些常数的值. 为此根据问题的实际情况,提出确定这些常数的条件,这些条件有时是以初始条件(比如运动学问题中的初始位移和初始速度)给出,有时是以边界条件(比如已知曲线通过一个定点)给出. **初始条件和边界条件统称为定解条件**. 由定解条件定出常数后的解称为微分方程的**特解**.

求解满足初始条件的微分方程问题称为**初值问题**或**柯西**(Cauchy)**问题**; 求解满足边界条件的微分方程问题称为**边值问题**,在偏微分方程中还有要求既满足边界条件又满足初始条件的问题,称为**混合问题**.

例如微分方程(1.1.12)的初始条件可以写成

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1,\cdots, \quad y^{(n)}(x_0) = y_{n-1}. \tag{1.1.20}$$

1.2 几何解释

微分方程理论问题的基本源泉主要有两个,一个是物理和技术科学,另一个是几何学. 因此从物理与几何直观的角度来理解我们要讨论的问题,是非常重要的.

考虑一阶正规型微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y). \tag{1.2.1}$$

我们把 x 和 y 看成是一个平面上的直角坐标,并设方程(1.2.1)的右端函数 $f(x,y)$在这平面上的某个区域 D 内有定义. 过这区域内的每一点,方程(1.2.1)解的图像的切线斜率显然就等于函数 $f(x,y)$在这点上的值. 假设在区域 D 内的每一点,都画上以 $f(x,y)$在这点的值为斜率,并且一律指向 x 增加方向的有向线段,我们就说在区域 D 上做出了一个由方程(1.2.1)确定的**方向场**. 这个方向场称为由微分方程(1.2.1)所确定的**向量场**. 于是,方程(1.2.1)的一个解 $y=\varphi(x)$,从几何上看就是位于此方向场中的方程为 $y=\varphi(x)$的曲线. 它在所经过的每一点都与方向场在该点的方向相切,或者形象地说,就是始终顺着方向场中

的方向行进的曲线.因此,求方程(1.2.1)满足初值条件 $y(x_0)=y_0$ 的解的问题,就是求通过点 (x_0,y_0) 的这样的一条曲线,这条曲线称为**积分曲线**.这样一个事实对于用数值方法求解微分方程(1.2.1)是非常重要的.因为当方程(1.2.1)不可解时,就可以根据向量场的走向来求近似的积分曲线,同时还可以根据向量场本身的性质来研究解的性质,而不必求出微分方程的解.这正是近似解法和定性理论的基础.这一直观的认识可以表述为下面的定理.

定理 1.2.1　曲线 C 为微分方程(1.2.1)的积分曲线的充分必要条件是:在 C 上任意一点,C 的切线与方程(1.2.1)所确定的向量场在该点的向量相重合.C 在每一点均与向量场的向量相切.

证明　必要性.设 C 为方程(1.2.1)的积分曲线,且其方程为 $y=\varphi(x)$,则函数 $y=\varphi(x)$ 为微分方程(1.2.1)的一个解,于是,在其定义区间上有

$$\varphi'(x)\equiv f(x,\varphi(x)).$$

上式左端为 C 在点 $(x,\varphi(x))$ 的切线的斜率,右端恰为方程(1.2.1)的方向场在同一点 $(x,\varphi(x))$ 的向量的斜率.从而,C 在点 $(x,\varphi(x))$ 的切线与方向场在该点的方向重合.又因为上式为恒等式,这说明上述说法在整个曲线 C 上成立.

充分性.设有曲线 C,其方程为 $y=\varphi(x)$,在其上任意一点 $(x,\varphi(x))$,它的切线方向都与微分方程(1.2.1)的方向场的方向重合,则切线与向量的斜率应该相等.于是,在 $y=\varphi(x)$ 有定义的区间上,有恒等式

$$\varphi'(x)\equiv f(x,\varphi(x)).$$

这个等式说明 $y=\varphi(x)$ 为微分方程(1.2.1)的解.从而 C 是积分曲线.

例 1.2.1　在区域 $D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 2,|y|\leqslant 2\}$ 内画出微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y$$

的向量场和几条积分曲线.

解　用计算各点的斜率的方法在 1×1 的网格点上画出向量场的方向.逐点计算各点的斜率,所得的数据列成表 1.2.1.

表 1.2.1　方程 $y'=-y$ 在 1×1 网格点上的斜率

点	斜率	点	斜率	点	斜率	点	斜率	点	斜率
$(-2,-2)$	2	$(-2,-1)$	1	$(-2,0)$	0	$(-2,1)$	-1	$(-2,2)$	-2
$(-1,-2)$	2	$(-1,-1)$	1	$(-1,0)$	0	$(-1,1)$	-1	$(-1,2)$	-2
$(0,-2)$	2	$(0,-1)$	1	$(0,0)$	0	$(0,1)$	-1	$(0,2)$	-2
$(1,-2)$	2	$(1,-1)$	1	$(1,0)$	0	$(1,1)$	-1	$(1,2)$	-2
$(2,-2)$	2	$(2,-1)$	1	$(2,0)$	0	$(2,1)$	-1	$(2,2)$	-2

根据表 1.2.1 的数据,逐点描出方向场在网格点上方向,得到的向量场如图 1.2.1 所示.从图 1.2.1 可以看出,当 $y<0$ 时,积分曲线的斜率为正,而当 $y>0$ 时,积分曲线的斜率为负,当 $y=0$ 时,积分曲线的斜率为零.即 $y=0$ 本身就是一条积分曲线.但由于网格太少,要画出其他积分曲线就很困难.用计算机软件 Maple 可以帮助我们解决这个问题.输入如下 Maple 命令并回车,就得到如图 1.2.2 所示的向量场图形,并给出了过点(−2,2),(−2,1)和(−2,−2)的三条积分曲线.

```
> DEtools[phaseportrait]
([diff(y(x),x) = - y(x)],y(x),x = - 2..2,[[y( - 2) = 2],[y( - 2) = 1],[y( - 2) = - 2]],dirgrid =
[17,17],arrows = LINE,axes = NORMAL);
```

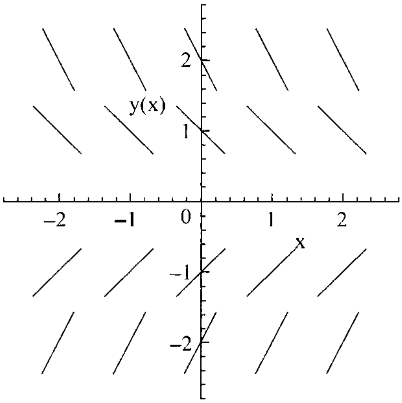


图 1.2.1

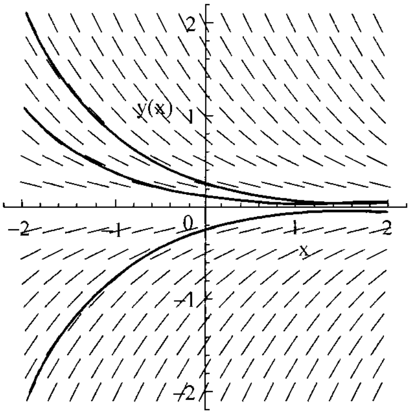


图 1.2.2

例 1.2.2 画出微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2-y$ 的向量场的图形和几条积分曲线的图形.

解 还是在以原点为中心的矩形

$$D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 2,\ |y|\leqslant 2\}$$

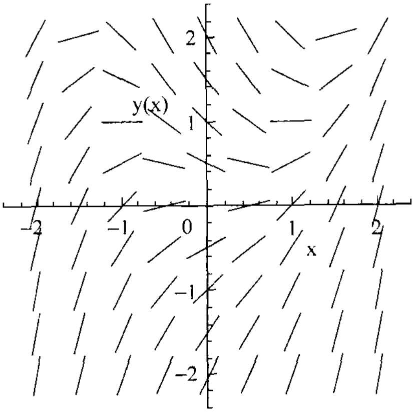
内画方程的向量场和积分曲线,输入下列 Maple 命令:

```
> DEtools[dfieldplot]
([diff(y(x),x) = x^2 - y(x)],y(x),x = - 2..2,y = - 2..2,dirgrid = [9,9],arrows = LINE,axes =
NORMAL);
```

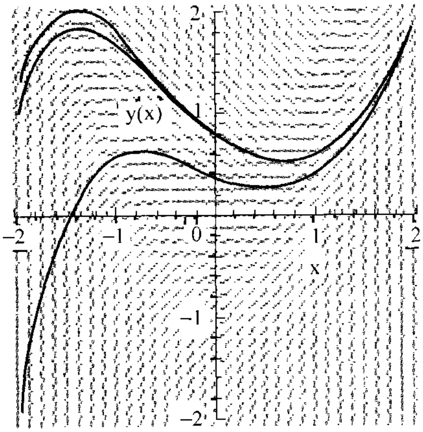
就得到方程向量场的示意图(图 1.2.3(a));再输入如下 Maple 命令:

```
> DEtools[phaseportrait]
([diff(y(x),x) = x^2 - y(x)],y(x),x = - 2..2,[[y( - 2) = 1.3],[y( - 2) = 1],[y( - 2) = - 2]],
dirgrid = [33,33],arrows = LINE,axes = NORMAL);
```

就得到方程向量场和几条积分曲线(图 1.2.3(b)).



(a)



(b)

图　1.2.3

例 1.2.3　对于微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2,$$

试分别绘出经过点(0,0),$\left(0,-\frac{1}{2}\right)$,$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$的积分曲线.

解　输入 Maple 命令如下:

```
> DEtools[phaseportrait]
([diff(y(x),x) = x ^ 2 + y(x)^ 2],y(x),x = - 1.2..1.2,[[y(0) = 0],[y(0) = - 1/2],[y(1/2) =
1/2]],dirgrid = [15,15],arrows = LINE,axes = NORMAL);
```

得积分曲线图见图 1.2.4.

例 1.2.4　绘出方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+xy$$

的积分曲线图.

解　输入 Maple 命令

```
> DEtools[phaseportrait]
([diff(y(x),x) = 1 + x * y(x)],y(x),x = - 1.2..1.2,[[y( - 1/2) = 4],[y(1) = - 1],[y( - 1) = 1]],
dirgrid = [15,15],arrows = LINE,axes = NORMAL);
```

得积分曲线图见图 1.2.5.

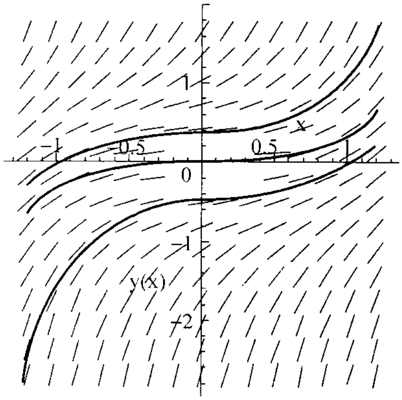


图 1.2.4

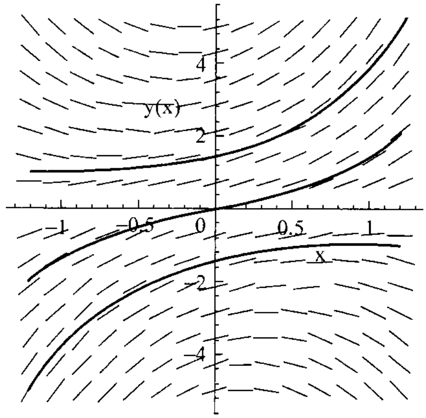


图 1.2.5

1.3 微分方程论简介

常微分方程理论,作为数学的一个重要分支,所研究的问题是多种多样的.不言而喻,求出微分方程的解是微分方程论的首要问题之一.

如前所述,如果能找出微分方程通解的形式,就有可能适当地选定其中的任意常数,获得所需要的特殊解;就有可能通过这种表达式,讨论解对某些参数(这些参数在应用上往往表征某些物理特征)的依赖性,从而适当地选取这些参数,使得对应的解具有所需要的性能.当然也会有助于进行关于解的其他研究.因此,在微分方程发展的古典时期,数学家们曾经把主要目标放在求通解上.但是后来却发现大多数微分方程都求不出通解,而物理和力学上所提出的微分方程问题又大都是要求满足某种指定条件的特殊解,即所谓定解问题的解.这就迫使人们改变原来的想法,而把定解问题的研究提到重要的地位.

柯西和魏尔斯特拉斯(Weierstrss)就是采用了这种观点,差不多在同一时期,在很一般的条件下,解决了当时常微分方程论中的一个基本问题——初值问题解的存在性与唯一性.在这以前,除了若干能求出通解的简单情形外,一个微分方程是否有解这一点并不明确,也完全没有证明过.柯西和魏尔斯特拉斯正是在增添若干适当的定解条件(初始条件)后,才明确地证明解的存在性与唯一性.

因为能用初等方法求解的微分方程为数甚少,所以,微分方程的近似解法就显得十分重要.求不出精确解而只能求出近似解这个事实,可能使人们感到不满意,但是随着计算机的高速发展,首先,至少在原则上,这种近似解可能达到很高的精确度;其次值得强调指出的是,用来描述各种物理过程的微分方程本身以及实验测定的定解条件本身就具有一定的误差.在推导微分方程时,只能考虑那些决定物理过程的主要因素,而略去一些次要因素不计.这种抽象化,不仅在导出微分方程时是不可避免的,而且从解决问题的角度看也是必要的.

不这样做，就会使问题复杂化，有时甚至使问题不可能得到解决.

因此，无论从微分方程的求解，还是从整个微分方程理论的建立来看，解的存在唯一性定理都是最基本的. 很明显如果解根本不存在，要去求它，或者近似求它，问题本身就是没有意义的. 有解而不唯一，要去确定它或者近似地确定它，问题也是不明确的——不知道要确定哪一个解. 因此解的存在唯一性定理就是求解或近似求解的前提和基础. 更何况存在唯一性定理的证明往往同时又提供近似求解的方法. 实际上，解的存在唯一性定理是整个微分方程理论中最基本的定理.

在微分方程理论中，同样重要的问题是解的各种属性的研究.

上面说过，对于描述物理过程的微分方程来说，定解条件和方程本身都只能是近似的，定解条件和方程本身有了变化，对应的解一般也跟着变化. 这种变化的程度怎样？会不会当定解条件和方程本身变化很小时，对应的解会发生强烈的变化呢？这些都是微分方程论应该回答的问题.

特别是关于解的各种渐近性质的研究. 比如在有关天体力学的微分方程中，就是要求当时间 $t\to\infty$ 时解的性状.

在很多重要的问题中，要求不只是研究单个解的性质，而是要确定整族解的定性分布图形，也就是研究整族解的几何与拓扑性质.

因此，在求不出微分方程通解的情形下，根据微分方程本身的结构，讨论其解的各种属性，成为微分方程论的重要任务之一.

1.4　常微分方程发展简史与相关著名科学家简介

1.4.1　常微分方程发展简史

微分方程差不多是和微积分同时产生的，在牛顿和莱布尼茨奠定微积分的基本思想的同时，他们也就正式提出了微分方程的概念.

从 17 世纪末到 18 世纪，许多著名数学家，例如伯努利(家族)、欧拉、高斯、拉格朗日和拉普拉斯等，都遵循历史传统，把数学研究结合于当时许多重大的实际力学问题. 在这些问题中通常离不开常微分方程的求解法. 到 1740 年左右，几乎所有的求解一阶微分方程的初等方法都已经知道. 1728 年，欧拉的一篇论文引进了著名的指数代换将二阶常微分方程化为一阶方程，开始了对二阶常微分方程的系统研究. 1743 年，欧拉给出了二阶常系数线性齐次方程的完整解法，这是高阶常微分方程的重要突破. 1774—1775 年间，拉格朗日用参数变易法解出了一般二阶变系数非齐次常微分方程，这一工作是 18 世纪常微分方程求解的最高成就. 在 18 世纪末，常微分方程已成为有自己的目标和方向的新的数学分支，成为当时工程技术、物理、力学等学科的基本工具之一. 后来法国天文学家勒维烈和英国天文学家亚当斯使用微分方程各自计算出那时尚未发现的海王星的位置. 使数学家更加深信微分方程在认