◆ 人教版

学法大视野 XUEFA DASHIYE

KAOYIBEN

考一本

课程基础导练

SHUXUE

数学

高中选修4-5

海豚出版社
DOLPHIN BOOKS
CIPG 中国国际出版集团

责任编辑：范劲松　潘　丽
责任校对：吴小燕　谭著名
装帧设计：张　维　蒋　慧

拥有《考一本》 圆你一本梦

考一本

KAOYIBEN

课程基础导练

长郡雅礼 联袂打造

一线名师 担纲编写

语文・高中必修 1，2，3，4，5(人教版)
数学・高中必修 1，2，3，4，5(人教版)
英语・高中模块 1，2，3，4，5(译林版)
物理・高中必修 1，2(人教版)
化学・高中必修 1，2(人教版)
历史・高中必修 1，2，3(人教版)
地理・高中必修 1，2，3(湘教版)
生物・高中必修 1，2，3(人教版)
思想政治・高中必修 1，2，3，4(人教版)

语文・高中选修・文章写作与修改(人教版)
语文・高中选修・中国古代诗歌散文欣赏(人教版)
语文・高中选修・新闻阅读与实践(人教版)
语文・高中选修・中国文化经典研读(人教版)
语文・高中选修・外国小说欣赏(人教版)
数学・高中选修 1－1，1－2，2－1，2－2，2－3(人教版)
数学・高中选修 4－1，4－4，4－5，4－7(人教版)
英语・高中模块 6，7，8，9，10，11(译林版)
物理・高中选修 1－1，3－1，3－2，3－4，3－5(人教版)
化学・高中选修 1，4，5(人教版)
生物・高中选修 1，3(人教版)
历史・高中选修 1，3(人教版)
地理・高中选修 3，5(湘教版)

百校联盟
BiSCHOOL

本丛书由 www.acpub.com(中国学术出版网)提供数字出版支持
欢迎访问 www.baishibaile.com，查询学科资讯，参与在线互动

ISBN 978-7-5110-0356-0

定价：7.00元

考一本

KAOYIBEN

课程基础导练

数学

高中选修4-5（人教版）

组编单位：长沙市教育科学研究院

编写指导：王　旭　卢鸿鸣　刘维朝
（按姓氏笔画）陈来满　雷建军　黎　奇

本册主编：杨　科　陈　峰

本册编者：李云皇　杨铭瑛　汤　灏　邓顺清　易兰桂
朱玉文　屈检嗣　张新民　何永红　彭启艳

本册审读：戴国良　邓奇志　龚德军

海豚出版社
DOLPHIN BOOKS
CIPG 中国国际出版集团

图书在版编目（CIP）数据

考一本·课程基础导练. 数学. 4-5：选修／杨科，陈峰主编. —北京：海豚出版社，2010.8
ISBN 978-7-5110-0356-0

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①杨… ②陈… Ⅲ. ① 数学课—高中—习题 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 165831 号

书　　名：考一本 · 课程基础导练　数学(选修 4-5)
作　　者：杨　科　陈　峰

责任编辑：范劲松　潘　丽
责任校对：吴小燕　谭著名
装帧设计：张　维　蒋　慧

出　　版：海豚出版社
网　　址：http://www.dolphin-books.com.cn
地　　址：北京市百万庄大街 24 号　　邮　编：100037
客服电话：0731-84322947　84313942　82254875
传　　真：0731-84322947　82322805
印　　刷：湖南版艺印刷有限公司
开　　本：16 开(880 毫米 × 1230 毫米)
印　　张：3.5
字　　数：95 千字
版　　次：2010 年 8 月第 1 版　2010 年 8 月第 1 次印刷
标准书号：ISBN 978-7-5110-0356-0
定　　价：7.00 元

PREFACE

编者寄语

积经年之底蕴，凝教学之精华。全新呈现在您面前的《考一本·课程基础导练》是由湖南省四大名校之长郡中学、雅礼中学联手倾力打造，经校内众多长年奋战在教学一线上的特、高级教师潜心编写而成的。长郡、雅礼两校此番在教辅用书上的联袂合作，尚属首次，而由各学科带头人牵头的作者队伍，也都是教育界的精兵强将。作为编者，我们有足够的理由相信，《考一本·课程基础导练》这套新型教辅用书必将给广大师生带来福音。

本套丛书立足于学业水平考试，跟踪服务新高考，以最新教材为依托，彰显教育教学新理念，整体来说，具有权威、同步、联动、实用等几大特色。

权威 本套丛书的编写团队，不仅具有扎实的教学功底，丰富的教学经验，而且深谙高中教育教学的规律和特点，由学科带头人领队的编写更是有力地保证了该套丛书的权威性。

同步 教与学一体，知识与能力同步，将"怎么学"与"怎么教"放在一起同步设计，以方法为主线实施教学，使学生不仅能轻松地掌握基础知识，而且能尽快地提高综合应用能力。本套丛书以全新的视角向广大师生介绍这种符合教学规律的立体化学习方案。

联动 教与学联动，相互促进，涵盖全部知识点的教法学法设计，抓住重难点的讲练结合编排，使这个主体充满鲜活而翔实的内容。

实用 本套丛书注重基础，突出实用、好用，并充分照顾到不同层次、不同阶段的学生学习时的实际需要，在知识和能力的安排上循序渐进，难易有度。书中例题和习题的选取充分考虑最新命题趋势，既博采众长，又自成系统。各分册体例相对统一，但又根据模块特点和各年级教学实际有所不同，各具特色。

踏破铁鞋无觅处。但愿《考一本·课程基础导练》正是您苦苦寻觅中的教辅用书，并祈求它的上乘品质能带给您成功的好运。

本套丛书的编辑与出版，得益于教育界、出版界众多知名人士的热情帮助和大力支持，他们提出了诸多很好的建议，在此谨表衷心感谢。恳切希望广大师生和教育专家在这套丛书问世后，多提宝贵意见，以便我们进一步修订完善。

编 者

2010 年 7 月

CONTENTS

目录

第一讲 不等式和绝对值不等式

第1课时 不等式的基本性质

发现问题

情景导思

不等关系是自然界中存在着的基本数学关系. 日常生活中息息相关的问题,如"自来水管的直截面为什么做成圆的,而不做成方的呢?""电灯挂在写字台上方怎样的高度最亮?""用一块正方形白铁皮,在它的四个角各剪去一个小正方形,制成一个无盖的盒子,要使制成的盒子的容积最大,应当剪去多大的小正方形?"等,都属于不等关系的问题,需要借助不等式的相关知识才能得到解决. 而且,不等式在数学研究中也起着相当重要的作用.

互动课堂

知识清单

知识点1:两个实数的大小关系

对于任意两个实数 a,b,有且只有以下三种情况之一成立:

$a>b\Leftrightarrow a-b>0$;$a=b\Leftrightarrow a-b=0$;$a<b\Leftrightarrow a-b<0$.

知识点2:不等式的性质

(1)如果 $a>b$,那么 $b<a$;如果 $b<a$,那么 $a>b$. 即 $a>b\Leftrightarrow b<a$.(对称性)

(2)如果 $a>b,b>c$,那么 $a>c$. 即 $a>b,b>c\Rightarrow a>c$.(传递性)

(3)如果 $a>b$,那么 $a+c>b+c$,即 $a>b\Rightarrow a+c>b+c$.

推论:如果 $a>b,c>d$,那么 $a+c>b+d$. 即 $a>b,\ c>d\Rightarrow a+c>b+d$.

(4)如果 $a>b,c>0$,那么 $ac>bc$;如果 $a>b,c<0$,那么 $ac<bc$.

(5)如果 $a>b>0$,那么 $a^n>b^n$($n\in\mathbf{N}$,且 $n\geqslant2$).

(6)如果 $a>b>0$,那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$($n\in\mathbf{N}$,且 $n\geqslant2$).

学法指导

1. 利用不等式的基本性质,探究不等式成立的条件

【例1】 适当增加条件,使下列各个命题成立.

(1)若 $ac^2\geqslant bc^2$,则 $a>b$;

(2)若 $a>b$,则 $ac<bc$;

(3)若 $a\geqslant b$,则 $\frac{1}{a}\leqslant\frac{1}{b}$;

(4)若 $a>b,c>d$,则 $ac>bd$;

(5)若 $a<b$,则 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$,n 为正整数;

(6)若 $a>b$,则 $a-c>b-d$.

【解析】(1)增加条件 $c\neq0$;

(2)增加 $c<0$;

(3)由 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}\leqslant0$,因为 $a\geqslant b$,所以增加 $b>0$;

(4)答案可不同:$b>0,d>0$ 或 $a>0,d>0$ 或 $b>0,c>0$;

(5)当 n 为偶数时,就增加 $a\geqslant0$,当 n 为奇数时,不必增加条件;

(6)若 $c\leqslant d$,则 $-c\geqslant-d$,可知 $a-c>b-d$ 成立,故应增加 $c\leqslant d$.

【点评】 对不等式性质的准确运用,不能凭猜想,解题时重在思维的推理.

变式训练:(1)若 $a<b<0$,则下列不等式不能成立的是 ( )

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ B. $2^a>2^b$

C. $|a|>|b|$ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^a>\left(\frac{1}{2}\right)^b$

(2)已知下列三个不等式:①$ab>0$;②$\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$;③$bc>ad$. 以其中两个作为条件,余下一个作为结论,则可组成几个正确命题?

2. 利用比较法，比较数式的大小或证明不等式

【例2】比较$\frac{a+m}{b+m}$与$\frac{a}{b}$（其中$b>a>0,m>0$）的大小.

【解析】作差整理得

$\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}=\frac{b(a+m)-a(b+m)}{b(b+m)}=\frac{m(b-a)}{b(b+m)}$,

$\because b>a>0,m>0,\therefore \frac{m(b-a)}{b(b+m)}>0,\therefore \frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$.

【点评】作差比较法的步骤是：(1)作差；(2)变形：配方、因式分解、通分、分母(分子)有理化等；(3)判断符号；(4)作出结论.

变式训练：已知$n\in \mathbf{N}$，比较$\left(\frac{n}{\sqrt{6}}+1\right)^3-\left(\frac{n}{\sqrt{6}}-1\right)^3$与2的大小.

3. 不等式性质的综合应用

【例3】已知$-1<a+b<3$且$2<a-b<4$，求$2a+3b$的取值范围.

【解析】（因为$a+b,a-b$的范围已知，要求$2a+3b$的取值范围，只需将$2a+3b$用已知量$a+b,a-b$表示出来. 可设$2a+3b=x(a+b)+y(a-b)$，用待定系数法求出x,y.）

设$2a+3b=x(a+b)+y(a-b)$，

$\therefore \begin{cases}x+y=2,\\x-y=3,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=\frac{5}{2},\\y=-\frac{1}{2}.\end{cases}$

$\therefore -\frac{5}{2}<\frac{5}{2}(a+b)<\frac{15}{2}$,

$-2<-\frac{1}{2}(a-b)<-1$.

$\therefore -\frac{9}{2}<\frac{5}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)<\frac{13}{2}$,

即$-\frac{9}{2}<2a+3b<\frac{13}{2}$.

【点评】解此题常见错误是：

$-1<a+b<3$, ①

$2<a-b<4$. ②

①＋②得$1<2a<7$. ③

由②得$-4<b-a<-2$. ④

①＋④得$-5<2b<1$,

$\therefore -\frac{15}{2}<3b<\frac{3}{2}$. ⑤

③＋⑤得$-\frac{13}{2}<2a+3b<\frac{17}{2}$.

错误的根源在于③式与⑤式成立的条件不一致.

本题还可以用线性规划的思想方法解题.

变式训练：已知$a>0,a^2-2ab+c^2=0,bc>a^2$，试比较a,b,c的大小关系.

自主成长

夯实基础

1. 如果 a,b,c 满足 $c<b<a$，且 $ac<0$，那么下列选项中不一定成立的是（　　）

A. $ab>ac$　　B. $c(b-a)>0$

C. $cb^2<ab^2$　　D. $ac(a-c)<0$

2. 对于实数 a,b，“$b(b-a)\leqslant 0$”是“$\frac{a}{b}\geqslant 1$”成立的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则下列不等式：①$a+b<ab$；②$|a|>|b|$；③$a<b$；④$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$ 中，正确的不等式有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

4. 若 $a>0,b>0$，则不等式 $-b<\frac{1}{x}<a$ 等价于（　　）

A. $-\frac{1}{b}<x<0$ 或 $0<x<\frac{1}{a}$

B. $-\frac{1}{a}<x<\frac{1}{b}$

C. $x<-\frac{1}{a}$ 或 $x>\frac{1}{b}$

D. $x<-\frac{1}{b}$ 或 $x>\frac{1}{a}$

5. 已知命题“$a\geqslant b\Rightarrow c\geqslant d$”和“$a<b\Rightarrow e\leqslant f$”是真命题，则下列命题中的真命题是（　　）

A. $e\geqslant f\Rightarrow c>d$　　B. $c\leqslant d\Rightarrow e<f$

C. $e<f\Rightarrow c\geqslant d$　　D. $c<d\Rightarrow e\leqslant f$

6. 已知 $1<x<3$，$M=3x^2-x+1$，$N=4x^2-5x+4$，则 M 与 N 的大小关系为________.

7. 设 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\beta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，则 $2\alpha-\frac{\beta}{3}$ 的范围是________.

能力提升

8. 设 $a>b>0,m>0,n>0$，则 $\frac{b}{a},\frac{a}{b},\frac{b+m}{a+m},\frac{a+n}{b+n}$ 由大到小的顺序是________.

挑战自我

9. 实数 a,b,c,d 满足下列三个条件：

(1)$d>c$；

(2)$a+b=c+d$；

(3)$a+d<b+c$.

请将 a,b,c,d 从小到大排列.

第2课时 基本不等式

发现问题

情景导思

不等式$(a-b)^2\geqslant 0$是大家所熟悉的.由它派生出来的结论:$a,b\in\mathbf{R}$,则$a^2+b^2\geqslant 2ab$,以及它的变形形式应用很广.这就是本节所学的基本不等式.

互动课堂

知识清单

知识点1:基本不等式

定理1:如果$a,b\in\mathbf{R}$,那么$a^2+b^2\geqslant 2ab$,

当且仅当$a=b$时,等号成立.

定理2:如果$a,b>0$,那么$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$,

当且仅当$a=b$时,等号成立.

变形:$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

知识点2:最值定理

设$x,y>0$,由$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$.

(1)若积$xy=P$(定值),则和有最小值$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}=2\sqrt{P}$.当$x=y$时,取"=".

(2)若和为定值S,则积xy有最大值$\left(\frac{S}{2}\right)^2$.

即:积定和最小,和定积最大.

运用最值定理求最值的三要素:一正二定三相等.

学法指导

1.运用基本不等式证明不等式

【例1】 设$a>0,b>0$,且$a+b=1$,求证下列不等式:

(1)$a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$;

(2)$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{25}{2}$.

【证明】 (1)$\because a>0,b>0,a+b=1$,

$\therefore ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1-2ab\geqslant 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

(2)证法一:$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2$

$=a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+4\geqslant 2ab+2\cdot\frac{1}{ab}+4$,

由(1)知,$ab\leqslant\frac{1}{4}$,$\frac{1}{ab}\geqslant 4$,

所以$2ab+2\cdot\frac{1}{ab}+4\geqslant\frac{1}{2}+8+4=\frac{25}{2}$,

即$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{25}{2}$.

证法二:$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2}{2}$

$=\frac{\left(1+\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}\right)^2}{2}=\frac{\left(3+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2}{2}$

$\geqslant\frac{(3+2)^2}{2}=\frac{25}{2}$.

【点评】 利用基本不等式证明时,要注意和与积的相互转化.

变式训练:(1)若正数a,b满足$ab=a+b+3$,则ab的取值范围是________.

(2)若$x>0,y>0,x+y=1$,求证:$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geqslant 9$.

2. 运用基本不等式求最值

【例 2】(1)已知正数 x,y 满足 $x+2y=1$,求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值.

(2)设 $x\geqslant0$, $y\geqslant0$, $x^2+\frac{y^2}{2}=1$,求 $x\sqrt{1+y^2}$ 的最大值.

【解析】(1)$\because x,y$ 为正数,且 $x+2y=1$,

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=(x+2y)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$

$=3+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant3+2\sqrt{2}$,

当且仅当 $\frac{2y}{x}=\frac{x}{y}$,即当 $x=\sqrt{2}-1$, $y=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立.

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$.

(2) $\left(\because x^2+\frac{y^2}{2}=1\right.$ 是常数, $\therefore x^2$ 与 $\frac{y^2}{2}$ 的积可能有最大值,

$\therefore$ 可把 x 放到 $\sqrt{x^2(1+y^2)}$ 里面去考虑,注意到 x^2 与 $1+y^2$ 的积,应处理成 $2x^2\cdot\frac{1+y^2}{2}$. $\left.\right)$

解法一:$\because x\geqslant0$, $y\geqslant0$, $x^2+\frac{y^2}{2}=1$,

$\therefore x\sqrt{1+y^2}=\sqrt{x^2(1+y^2)}=\sqrt{2x^2\cdot\frac{1+y^2}{2}}$

$\leqslant\sqrt{2}\cdot\frac{x^2+\frac{1+y^2}{2}}{2}$

$=\sqrt{2}\cdot\frac{x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$,

当且仅当 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$(即 $x^2=\frac{1+y^2}{2}$)时, $x\sqrt{1+y^2}$ 取得最大值 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

解法二:令 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sqrt{2}\sin\theta,\end{cases}$ $(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$,

则 $x\sqrt{1+y^2}=\cos\theta\sqrt{1+2\sin^2\theta}$

$=\sqrt{2\cos^2\theta(1+2\sin^2\theta)\cdot\frac{1}{2}}$

$\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{2\cos^2\theta+(1+2\sin^2\theta)}{2}\right]^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$,

当 $2\cos^2\theta=1+2\sin^2\theta$,

即 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时, $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $x\sqrt{1+y^2}$ 取得最大值.

【点评】在运用基本不等式求最值时,凑出定值是关键!但是不一定一步就能凑出定值来,实际上,分几步凑也是可以的,只要每步取等号的条件相同便可.

变式训练:已知两个正数 x,y 满足 $x+y=1$,则 $z=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)$ 的最小值为________.

3. 运用基本不等式解决实际问题

【例 3】设计一幅宣传画,要求画面面积为 4 840 cm^2,画面的宽与高的比为 $\lambda(\lambda<1)$,画面的上、下各留 8 cm 的空白,左、右各留 5 cm 的空白. 怎样确定画面的高与宽的尺寸,才能使宣传画所用纸张面积最小?

【解析】设画面的宽为 x cm,则画面的高为 $\frac{4\,840}{x}$ cm,设纸张面积为 S,

$S=(x+10)\left(\frac{4\,840}{x}+16\right)$

$=5\,000+16\left(x+\frac{3\,025}{x}\right)$

$\geqslant5\,000+16\cdot2\sqrt{x\cdot\frac{3\,025}{x}}=6\,760$,

当且仅当 $x=\frac{3\,025}{x}$,即 $x=55$ 时取"=",

此时高为 $\frac{4\,840}{55}=88$,

$\lambda=\frac{55}{88}=\frac{5}{8}<1$.

所以,画面高为 88 cm,宽为 55 cm 时,能使所用纸张面积最小.

【点评】在应用基本不等式解决这类实际问题时,应注意:

(1)设变量,一般把要求最大值和最小值的变量设为函数;

(2)建立相应的函数关系式,把实际问题抽象为函数的最值问题;

(3)在定义域内,求函数的最大值或最小值,正确写出答案.

变式训练:某种汽车的购车费用是 10 万元,每年使用的保险费和汽油费约为 0.9 万元,年维修费用第一年是 0.2 万元,以后逐年递增 0.2 万元. 问这种汽车使用多少年时,它的年平均费用最小? 最小值是多少?

自主成长

夯实基础

1. 若 x，$y\in\mathbf{R}_+$，且 $x+y=S$，$xy=P$，则下列命题中正确的是 （　）

A. 当且仅当 $x=y$ 时，S 有最小值 $2\sqrt{P}$

B. 当且仅当 $x=y$ 时，P 有最大值 $\frac{S^2}{4}$

C. 当且仅当 P 为定值时，S 有最小值 $2\sqrt{P}$

D. 若 S 为定值，则当且仅当 $x=y$ 时，P 有最大值 $\frac{S^2}{4}$

2. 若 x，$y\in\mathbf{R}_+$，$x+y\leqslant 4$，则下列不等式中成立的是 （　）

A. $\frac{1}{x+y}\leqslant\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 1$

C. $\sqrt{xy}\geqslant 2$　　D. $\frac{1}{xy}\geqslant 1$

3. 若 $a>b>1$，$P=\sqrt{\lg a\lg b}$，$Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$，$R=\lg\frac{a+b}{2}$，则 （　）

A. $R<P<Q$　　B. $P<Q<R$

C. $Q<P<R$　　D. $P<R<Q$

4. 设 $a>0$，$b>0$，则下列不等式中不成立的是 （　）

A. $a+b+\frac{1}{\sqrt{ab}}\geqslant 2\sqrt{2}$

B. $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$

C. $\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}\geqslant a+b$

D. $\frac{2ab}{a+b}\geqslant\sqrt{ab}$

5. 设 $x\neq 0$，函数 $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1$ 在 $x=$________时，y 有最小值________.

6. 设实数 x,y 满足 $x^2+2xy-1=0$，则 $x+y$ 的取值范围是________.

7. 设 x,y 均为正实数，且 $\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}=\frac{1}{3}$，则 xy 的最小值为________.

能力提升

8. 半径为 4 的球面上有 A,B,C,D 四点，且 AB,AC,AD 两两互相垂直，则 $\triangle ABC$，$\triangle ACD$，$\triangle ADB$ 的面积之和 $S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ADB}$ 的最大值为 （　）

A. 8　　B. 16　　C. 32　　D. 64

9. 已知 a,b,c 为两两不相等的实数，求证：$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$.

挑战自我

10. 若 $a>b>0$，求 $a^2+\frac{16}{b(a-b)}$ 的最小值.

第3课时　三个正数的算术-几何平均不等式

发现问题

情景导思

基本不等式给出了两个正数的算术平均与几何平均的关系,这个不等式是否可以推广呢?

互动课堂

知识清单

知识点:三个正数的算术-几何平均不等式

(1)如果 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$,那么 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$,

当且仅当 $a=b=c$ 时,等号成立.

(2)定理3:如果 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$,那么 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$,

当且仅当 $a=b=c$ 时,等号成立.

(3)如果 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$,那么,

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\geqslant\frac{a+b+c}{3}\geqslant\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}},$$

当且仅当 $a=b=c$ 时,等号成立.

学法指导

1. 运用三个正数的算术-几何平均不等式证明不等式

【例1】 设 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$,求证:

(1) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9$;

(2) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geqslant\frac{9}{2}$.

【证明】 (1)∵$a,b,c\in\mathbf{R}_+$,

∴$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$,

两式相乘,得 $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9$,

当且仅当 $a=b=c$ 时,等号成立.

(2)∵ $2(a+b+c)=(a+b)+(a+c)+(b+c)\geqslant 3\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(b+c)}$,

$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geqslant 3\frac{1}{\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(b+c)}}$,

∴ $(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geqslant\frac{9}{2}$,

当且仅当 $a=b=c$ 时,等号成立.

【点评】 注意观察欲证不等式的结构,联想到三元均值不等式的特征,考虑欲证不等式右边的常数是9,是解决本题的关键所在.

变式训练: 求证:$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geqslant 9abc$.

2. 运用三个正数的算术-几何平均不等式求最值

【例2】 求函数 $y=2x^2+\frac{3}{x}(x>0)$ 的最大值,下列解法是否正确?为什么?

解法一:$y=2x^2+\frac{3}{x}=2x^2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x}$

$\geqslant 3\sqrt[3]{2x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x}}=3\sqrt[3]{4}$,

∴$y_{\min}=3\sqrt[3]{4}$.

解法二:$y=2x^2+\frac{3}{x}\geqslant 2\sqrt{2x^2\cdot\frac{3}{x}}=2\sqrt{6x}$,

当 $2x^2=\frac{3}{x}$,即 $x=\frac{\sqrt[3]{12}}{2}$ 时,

$y_{\min}=2\sqrt{6\cdot\frac{\sqrt[3]{12}}{2}}=2\sqrt{3\sqrt[3]{12}}=2\sqrt[6]{324}$.

【解析】 以上两种解法均有错误.解法一错在取不到"=",即不存在 x 使得 $2x^2=\frac{1}{x}=\frac{2}{x}$;解法二错在 $2\sqrt{6x}$ 不是定值(常数).

正确的解法是:

$y=2x^2+\frac{3}{x}=2x^2+\frac{3}{2x}+\frac{3}{2x}\geqslant 3\sqrt[3]{2x^2\cdot\frac{3}{2x}\cdot\frac{3}{2x}}$

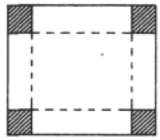
$=3\sqrt[3]{\frac{9}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{36}$,

当且仅当 $2x^2=\frac{3}{2x}$,即 $x=\frac{\sqrt[3]{6}}{2}$ 时,$y_{\min}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{36}$.

【点评】 本题的两种错误解法是运用三个正数的均值不等式求最值的主要错误,再次说明运用均值不等式求最值时,要注意一正二定三相等的条件.

变式训练: 若 $0<x<1$,求 $y=x^4(1-x^2)$ 的最大值.

3. 运用三个正数的算术-几何平均不等式解应用问题



【例3】 将一块边长为 a 的正方形铁皮，剪去四个角(四个全等的正方形)，做成一个无盖的铁盒，要使其容积最大，剪去的小正方形的边长为多少？最大容积是多少？

【解析】 设剪去的小正方形的边长为 x，

则其容积为 $V=x(a-2x)^2\left(0<x<\frac{a}{2}\right)$，

$V=\frac{1}{4}\cdot 4x\cdot(a-2x)\cdot(a-2x)$

$\leqslant\frac{1}{4}\left[\frac{4x+(a-2x)+(a-2x)}{3}\right]^3=\frac{2a^3}{27}$，

当且仅当 $4x=a-2x$，即 $x=\frac{a}{6}$ 时取“＝”，

即当剪去的小正方形的边长为 $\frac{a}{6}$ 时，铁盒的容积为 $\frac{2a^3}{27}$.

【点评】 *建立目标函数是关键，在得出目标函数后，要注意定义域，并将目标函数进行适当的变形使之满足均值不等式使用的条件.*

变式训练： 制造容积为 $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{m}^2$ 的无盖圆柱形桶，用来做底面的金属板的价格为 30 元/m^2，做侧面的金属板的价格为 20 元/m^2，要使用料成本最低，求此圆柱形桶的底面半径和高各为多少？

自主成长

夯实基础

1. 设 $a,b\in\mathbf{R}_+$，则下列不等式中不成立的是 (　　)

A. $\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{3}}\geqslant\frac{a+2b}{3}$　　B. $ab^2\leqslant\frac{(a+2b)^3}{27}$

C. $\sqrt{\frac{a}{b}}\leqslant\frac{2a}{a+b}$　　D. $\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\leqslant\sqrt[3]{abc}$

2. 正实数 a,b,c 满足 $abc=8$，则 (　　)

A. $a+b+c$ 的最大值为 6　　B. $a+b+c$ 的最小值为 6

C. $a+b+c$ 的最小值为 8　　D. $a+b+c$ 的最大值为 8

3. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，且 $a>b>c$，$P=a-c$，$Q=\frac{3}{(a-b)(b-c)}$，则 $P+Q$ 与 4 的大小关系为 (　　)

A. $P+Q<4$　　B. $P+Q>4$

C. $P+Q\leqslant4$　　D. $P+Q\geqslant4$

4. 已知圆柱的轴截面周长为 6，体积为 V，则下列各式总成立的是 (　　)

A. $V\geqslant\pi$　　B. $V\leqslant\pi$

C. $V\geqslant\frac{\pi}{8}$　　D. $V\leqslant\frac{\pi}{8}$

5. 某工厂年产值第二年比第一年增长的百分率为 p_1，第三年比第二年增长的百分率为 p_2，第四年比第三年增长的百分率为 p_3，若 $p_1+p_2+p_3=m$，m 为常数，则年平均增长率 p 的最大值为 (　　)

A. $\sqrt[3]{p_1p_2p_3}$　　B. $\frac{p_1+p_2+p_3}{3}$

C. $\frac{p_1p_2p_3}{3}$　　D. $\frac{(1+p_1)(1+p_2)(1+p_3)}{3}$

6. 函数 $y=\frac{x^2-2x+2}{2x-2}(-4<x<1)$ 的最小值是________.

7. 若 $a>b>0$，则 $a+\frac{1}{b(a-b)}$ 的最小值为____________.

能力提升

8. 设 $0<\alpha<\pi$，则函数 $y=\sin^2\alpha(1-\cos\alpha)$ 的最大值为______.

9. 设 a,b,c 是互不相等的正数，且 $abc=1$，

求证：$(1+a+b)(1+b+c)(1+c+a)>27$.

挑战自我

10. 已知边长为 a 和 b 的矩形球场 $ABCD$，在球场正中悬挂一照明灯 P，已知球场上各点的照明度与灯光照射到这点的光线和地面夹角的正弦成正比，与这点到灯的距离的平方成反比，若要使球场最边缘的点 A 获得最好的照明亮度，灯离地面的高度是多少？

第 4 课时　绝对值三角不等式

发现问题

情景导思

许多不等式都涉及距离的长短，面积或体积的大小，重量的大小等，它们都要通过非负数来表示. 我们如何利用绝对值不等式来解决实际问题呢？

互动课堂

知识清单

知识点 1：绝对值的意义

在数轴上，一个点到原点的距离称为这个点所表示的数的绝对值，即 $|x|=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

知识点 2：绝对值三角不等式

定理 1：如果 a,b 是实数，则 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，当且仅当 $ab\geqslant0$ 时，等号成立.

知识点 3：绝对值三角不等式的向量形式

当向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线时，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；当向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线时，①$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；②$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$. 一般形式为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

知识点 4：定理 2

如果 a,b,c 是实数，那么 $|a-c|\leqslant|a-b|+|b-c|$，

当且仅当 $(a-b)(b-c)\geqslant0$ 时，等号成立.

学法指导

1. 绝对值三角不等式

【例 1】 设 $\varepsilon>0$，$|x-a|<\frac{\varepsilon}{4}$，$|y-b|<\frac{\varepsilon}{6}$.

求证：$|2x+3y-2a-3b|<\varepsilon$.

【证明】 $|2x+3y-2a-3b|=|2(x-a)+3(y-b)|$

$\leqslant2|(x-a)|+3|(y-b)|<2\times\frac{\varepsilon}{4}+3\times\frac{\varepsilon}{6}=\varepsilon$.

【点评】 本题应用了 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 这一定理，解题的关键是把 $2x+3y-2a-3b$ 化成用 $x-a$，$y-b$ 表示的式子，再利用定理转化到已知条件上来.

变式训练： 不等式 $|x-1|+|x+3|>a$ 对一切实数 x 都成立，求实数 a 的取值范围.

2. 绝对值三角不等式的实际应用

【例 2】 两个施工队分别被安排在公路沿线的两个施工点施工，这两个地点分别位于公路路牌的第 10 km 和第 20 km 处. 现在要在公路沿线建两个施工队的共同临时生活区，每个施工队每天在生活区和施工地点之间往返一次. 要使两个施工队每天往返的路程之和最小，生活区应建在何处？

【解析】 解法一：生活区应建在工路路牌的第 x km 处，两个施工队每天往返的路程之和为 $s(x)$ km，则

$s(x)=2(|x-10|+|x-20|)$，

因为 $|x-10|+|x-20|=|x-10|+|20-x|$

$\geqslant|x-10+20-x|=10$，

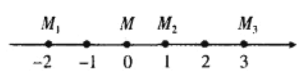
当且仅当 $(x-10)(20-x)\geqslant0$，即 $10\leqslant x\leqslant20$ 时，等号成立.

所以，当 $10\leqslant x\leqslant20$ 时，函数 $s(x)=2(|x-10|+|x-20|)$ 取得最小值 20.

故生活区建在两个施工地点之间的任何一个位置时，都能使两个施工队每天往返的路程之和最小.

解法二：画出函数 $s(x)=2(|x-10|+|x-20|)$ 的图象，从图象上直观地看出结论.

变式训练*： 如图，三台机器人 M_1，M_2，M_3 和检测台 M（M 与 M_1，M_2，M_3 均不能重合）位于一条直线上，三台机器人需把各自生产的零件送交 M 处进行检测，送检程序设定：当 M_1 把零件送达 M 处时，M_2 即刻自动出发送检，当 M_2 把零件送达 M 处时，M_3 即刻自动出发送检，设 M_2 的送检速度为 v，且送检速度是 M_1 的 2 倍、M_3 的 3 倍.



(1)求三台机器人 M_1，M_2，M_3 把各自生产的零件送达检测台 M 处的时间总和；

(2)现要求三台机器人 M_1，M_2，M_3 送检时间总和必须最短，请你设计出检测台 M 在该直线上的位置.

注释：书中带“*”的题为选做题.

自主成长

夯实基础

1. "$a>0$"是"$|a|>0$"的 ( )

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

2. $x,y\in\mathbf{R}$,且 $xy<0$,则下列不等式正确的是 ( )

A. $|x+y|\geqslant x-y$　B. $2\sqrt{xy}\leqslant|x+y|$

C. $|x+y|<|x|+|y|$　D. $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 2$

3. 若 $a,b,c\in\mathbf{R}$,且 $|a+c|<b$,则下列不等式必成立的是 ( )

A. $|a|<|b|-|c|$　B. $|a|<|c|-|b|$

C. $|a|>|b|-|c|$　D. $|a|>|c|-|b|$

4. 正数 a,b,c,d 满足 $a+d=b+c$, $|a-d|<|b-c|$,则 ( )

A. $ad=bc$　B. $ad<bc$

C. $ad>bc$　D. ad 与 bc 大小不定

5. 设 $a_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$,则对任意正整数 m,n $(m>n)$都成立的是 ( )

A. $|a_n-a_m|<\frac{m\cdot n}{2}$　B. $|a_n-a_m|>\frac{m-n}{2}$

C. $|a_n-a_m|<\frac{1}{2^n}$　D. $|a_n-a_m|>\frac{1}{2^n}$

6. 已知 α,β 是实数,给出下列四个论断:① $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$;② $|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha+\beta|$;③ $|\alpha|>2\sqrt{2}$, $|\beta|>2\sqrt{2}$;④ $|\alpha+\beta|>5$. 以其中两个论断作为条件,其余两个论断作为结论,写出你认为正确的一个命题:______________.

7. 已知 $|x-a|<\frac{c}{2}$, $|y-b|<\frac{c}{2}$,

求证:$|(x+y)-(a+b)|<c$.

能力提升

8. 已知 $a^2+b^2+c^2=1$, $x^2+y^2+z^2=1$.

求证:$|ax+by+cz|\leqslant 1$.

9. 已知 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, $a^2\neq b^2$,

求证:$|f(a)-f(b)|<|a-b|$.

挑战自我

10*. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$,对于 $x\in[0,1]$,均有 $|f(x)|\leqslant 1$,试求 $|a|+|b|+|c|$ 的最大值.

第5课时 绝对值不等式的解法

发现问题

情景导思

绝对值的几何意义告诉我们，$|a|$表示数轴上的点到原点的距离，我们如何利用绝对值的几何意义来解绝对值不等式呢？

互动课堂

知识清单

知识点1：绝对值的意义

在数轴上，一个点到原点的距离称为这个点所表示的数的绝对值. 即$|x|=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

知识点2：绝对值不等式的解法

$|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a$，$|x|>a\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$. $(a>0)$

学法指导

1. $|ax+b|\leqslant c$ 和 $|ax+b|\geqslant c$ 型不等式的解法

【例1】 解不等式：$x^2+3<4|x|$.

【解析】 $\because x\in\mathbf{R}$，$|x|^2=x^2$，

$\therefore$令$|x|=t$，则原不等式化为$t^2-4t+3<0$.

解得$1<t<3$.

$\therefore 1<|x|<3\Rightarrow\begin{cases}|x|>1,\\ |x|<3\end{cases}\Rightarrow -3<x<-1$ 或 $1<x<3$.

变式训练： 设$f(x)=|2x-1|+x+3$. 若$f(x)\leqslant 5$，求x的取值范围.

2. $|x-a|+|x-b|\geqslant c$ 和 $|x-a|+|x-b|\leqslant c$ 型不等式的解法

【例2】 解不等式$||x+3|-|x-3||>3$.

【解析】 分区间去绝对值(零点分段法)：

$\because ||x+3|-|x-3||>3$.

$\therefore$(1) $\begin{cases}x<-3,\\ |-(x+3)+(x-3)|>3\end{cases}\Rightarrow x<-3$；

(2) $\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 3,\\ |(x+3)+(x-3)|>3\end{cases}$

$\Rightarrow \frac{3}{2}<x\leqslant 3$ 或 $-3\leqslant x<-\frac{3}{2}$；

(3) $\begin{cases}x>3,\\ 6>3\end{cases}\Rightarrow x>3$.

$\therefore$ 原不等式的解集为$\{x|x<-\frac{3}{2}$ 或 $x>\frac{3}{2}\}$.

变式训练： 解关于x的不等式$|x-1|+a-1>0(a\in\mathbf{R})$.

自主成长

夯实基础

1. 不等式$(1-|x|)(1+x)>0$的解集是________.
2. 不等式$x^2-5|x|+6\leqslant 0$的解集是________.
3. 不等式$|x+1|+|x+2|<5$的解集是________.
4. 不等式$|2x-1|<2-3x$的解集是________.
5. 不等式$3\leqslant|5-2x|<9$的整数解是________.
6. 求满足不等式组$\begin{cases}y-|x^2-2x|+\frac{1}{2}>0,\\ y+|x-1|<2\end{cases}$的整数对$(x,y)$的个数.
7. 解不等式：$\left|\frac{x+2}{x-1}\right|>\frac{x+2}{x-1}$.