◆人教版

学法大视野
XUEFA DASHIYE

考一本
KAOYIBEN

课程基础导练

数学

高中选修2-3

海豚出版社
DOLPHIN BOOKS
中国国际出版集团

责任编辑：范劲松　潘　丽
责任校对：吴小燕　谭著名
装帧设计：张　维　蒋　慧

语文·高中必修 1，2，3，4，5(人教版)
数学·高中必修 1，2，3，4，5(人教版)
英语·高中模块 1，2，3，4，5(译林版)
物理·高中必修 1，2(人教版)
化学·高中必修 1，2(人教版)
历史·高中必修 1，2，3(人教版)
地理·高中必修 1，2，3(湘教版)
生物·高中必修 1，2，3(人教版)
思想政治·高中必修 1，2，3，4(人教版)

语文·高中选修·文章写作与修改(人教版)
语文·高中选修·中国古代诗歌散文欣赏(人教版)
语文·高中选修·新闻阅读与实践(人教版)
语文·高中选修·中国文化经典研读(人教版)
语文·高中选修·外国小说欣赏(人教版)
数学·高中选修 1－1，1－2，2－1，2－2，2－3(人教版)
数学·高中选修 4－1，4－4，4－5，4－7(人教版)
英语·高中模块 6，7，8，9，10，11(译林版)
物理·高中选修 1－1，3－1，3－2，3－4，3－5(人教版)
化学·高中选修 1，4，5(人教版)
生物·高中选修 1，3(人教版)
历史·高中选修 1，3(人教版)
地理·高中选修 3，5(湘教版)

百校联盟
BiSCHOOL

本丛书由 www.acpub.com(中国学术出版网)提供数字出版支持
欢迎访问 www.baishibaile.com，查询学科资讯，参与在线互动

ISBN 978-7-5110-0355-3

定价：11.00 元

KAOYIBEN

考一本

课程基础导练

数学

高中选修 2-3（人教版）

组编单位：长沙市教育科学研究院

编写指导：王　旭　卢鸿鸣　刘维朝

（按姓氏笔画）陈来满　雷建军　黎　奇

本册主编：陈　峰　杨　科

本册编者：陈　峰　唐　亮　谭泽阳　曾卫国　张志忠

王平波　高　李　华接春　赵攀峰　朱同彪

王小伟　李生根　饶金伟　王　毅　邓奇志

龚德军　何永红　彭启艳　刘炳臣　郭丽君

本册审读：戴国良　马喜霞　王志翔

海豚出版社

DOLPHIN BOOKS

CIPG

中国国际出版集团

图书在版编目（CIP）数据

考一本·课程基础导练. 数学. 2-3：选修／陈峰，杨科主编. —北京：海豚出版社，2010.8

ISBN 978-7-5110-0355-3

Ⅰ.①考… Ⅱ.①陈… ②杨… Ⅲ.① 数学课—高中—习题 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 165840 号

书　　名：考一本·课程基础导练　数学（选修 2-3）
作　　者：陈　峰　杨　科

责任编辑：范劲松　潘　丽
责任校对：吴小燕　谭著名
装帧设计：张　维　蒋　慧

出　　版：海豚出版社
网　　址：http://www.dolphin-books.com.cn
地　　址：北京市百万庄大街 24 号　　邮　编：100037
客服电话：0731-84322947　84313942　82254875
传　　真：0731-84322947　82322805
印　　刷：湖南版艺印刷有限公司
开　　本：16 开（880 毫米 × 1230 毫米）
印　　张：5.5
字　　数：180 千字
版　　次：2010 年 8 月第 1 版　2010 年 8 月第 1 次印刷
标准书号：ISBN 978-7-5110-0355-3
定　　价：11.00 元

PREFACE

编者寄语

积经年之底蕴，凝教学之精华。全新呈现在您面前的《考一本·课程基础导练》是由湖南省四大名校之长郡中学、雅礼中学联手倾力打造，经校内众多长年奋战在教学一线上的特、高级教师潜心编写而成的。长郡、雅礼两校此番在教辅用书上的联袂合作，尚属首次，而由各学科带头人牵头的作者队伍，也都是教育界的精兵强将。作为编者，我们有足够的理由相信，《考一本·课程基础导练》这套新型教辅用书必将给广大师生带来福音。

本套丛书立足于学业水平考试，跟踪服务新高考，以最新教材为依托，彰显教育教学新理念，整体来说，具有权威、同步、联动、实用等几大特色。

权威　本套丛书的编写团队，不仅具有扎实的教学功底，丰富的教学经验，而且深谙高中教育教学的规律和特点，由学科带头人领队的编写更是有力地保证了该套丛书的权威性。

同步　教与学一体，知识与能力同步，将"怎么学"与"怎么教"放在一起同步设计，以方法为主线实施教学，使学生不仅能轻松地掌握基础知识，而且能尽快地提高综合应用能力。本套丛书以全新的视角向广大师生介绍这种符合教学规律的立体化学习方案。

联动　教与学联动，相互促进，涵盖全部知识点的教法学法设计，抓住重难点的讲练结合编排，使这个主体充满鲜活而翔实的内容。

实用　本套丛书注重基础，突出实用、好用，并充分照顾到不同层次、不同阶段的学生学习时的实际需要，在知识和能力的安排上循序渐进，难易有度。书中例题和习题的选取充分考虑最新命题趋势，既博采众长，又自成系统。各分册体例相对统一，但又根据模块特点和各年级教学实际有所不同，各具特色。

踏破铁鞋无觅处。但愿《考一本·课程基础导练》正是您苦苦寻觅中的教辅用书，并祈求它的上乘品质能带给您成功的好运。

本套丛书的编辑与出版，得益于教育界、出版界众多知名人士的热情帮助和大力支持，他们提出了诸多很好的建议，在此谨表衷心感谢。恳切希望广大师生和教育专家在这套丛书问世后，多提宝贵意见，以便我们进一步修订完善。

编　者

2010 年 7 月

目录

CONTENTS

目录

CONTENTS

第一章 计数原理

第1课时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理(1)

发现问题

情景导思

三层书架上,上层放有10本不同的语文书,中层放有9本不同的数学书,下层放有8本不同的外语书.

问题1:从书架上任取1本书有多少种不同的取法?

问题2:从书架上任取语文、数学、外语书各1本,有多少种不同的取法?

上述两个问题的答案是否一致呢?我们作如下探究:

探究1:任取1本书有3类方案:第1类,任取1本语文书,有10种不同的取法;第2类,任取1本数学书,有9种不同的取法;第3类,任取1本外语书,有8种不同的取法.

所以从书架上任取1本书共有10+9+8=27种不同的取法.

探究2:完成这件事可分为三个步骤:第1步取语文书,有10种不同的方法;第2步取数学书,有9种不同的方法;第3步取外语书,有8种不同的方法.

这三个步骤缺一不可,依分步乘法计数原理知,从书架上任取语文、数学、外语书各1本,共有10×9×8=720种不同的取法.

互动课堂

知识清单

知识点1:分类加法计数原理

做一件事情,完成它可以有n类办法,在第1类办法中有m_1种不同的方法,在第2类办法中有m_2种不同的方法,……,在第n类办法中有m_n种不同的方法,那么完成这件事共有$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$种不同的方法.

知识点2:分步乘法计数原理

做一件事情,完成它需要分成n个步骤,做第1步有m_1种不同的方法,做第2步有m_2种不同的方法,……,做第n步有m_n种不同的方法,那么完成这件事共有$N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$种不同的方法.

学法指导

1.分类加法计数原理的应用

【例1】在所有的两位数中,个位数字大于十位数字的两位数共有多少个?

【解析】解法一:(按个位数分类)个位数是9,则十位数可以是1,2,3,…,8中的一个,有8个;

个位数是8,则十位数可以是1,2,3,…,7中的一个,有7个;

个位数是7时,有6个;个位数是6时,有5个;……;个位数是2时,只有1个.

由分类加法计数原理知,满足条件的两位数有$8+7+6+\cdots+2+1=\frac{8+1}{2}\times 8=36$(个).

解法二:(按十位数分类)依题意知,十位数只能为1,2,3,…,8,共8类.

十位数是1时,个位数可为2,3,4,…,9中的一个,有8个;

十位数是2时,个位数可为3,4,5,…,9中的一个,有7个;

十位数是3时,有6个;十位数是4时,有5个;……;十位数是8时,有1个.

由分类加法计数原理知,满足条件的两位数有$8+7+6+\cdots+2+1=36$(个).

【点评】选择分类标准是分类的关键,因为分类标准不同可产生不同的解法,其方法有难有易.

变式训练:三边长为正整数,且最长边长为7的三角形有多少个?

2. 分步乘法计数原理的应用

【例 2】 将 5 封信投入 3 个邮筒，不同的投法共有多少种？

【解析】 不妨将 5 封信分 5 步进行投入.

第 1 步，第 1 封信有 3 种投入邮筒的方法；

第 2 步，第 2 封信有 3 种投入邮筒的方法；

……

第 5 步，第 5 封信也有 3 种投入邮筒的方法.

根据分步乘法计数原理，不同的投法共有 3^5 种.

【点评】 本题分步按元素分析法执行，即从安排元素(信)分 5 步入手. 若本题从安排位置(邮筒)入手，则只能分类执行，其过程就复杂得多！

变式训练： 从$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$中，任取 3 个不同的数作为抛物线方程 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的系数，使抛物线过原点，且顶点在第一象限，这样的抛物线共有多少条？

3. 分类加法和分步乘法原理的综合运用

【例 3】 某中学艺术组有 9 人，每人至少会钢琴和小号中的一种乐器，其中 7 人会钢琴，3 人会小号，从中选出会钢琴与会小号的各 1 人，有多少种不同的选法？

【解析】 由题意可知，在艺术组 9 人中，有且仅有 1 人既会钢琴又会小号(把该人称为“多面手”)，只会钢琴的有 6 人，只会小号的有 2 人，把会钢琴、小号各 1 人的选法分为两类：

第 1 类：多面手入选，另 1 人只需从其他 8 人中任选 1 个，故这类选法共有 8 种.

第 2 类：多面手不入选，则会钢琴者只能从 6 个只会钢琴的人中选出，会小号的 1 人也只能从只会小号的 2 人中选出，故这类选法共有 $6\times2=12$ 种，因此有 $N=8+6\times2=20$ 种.

故共有 20 种不同的选法.

【点评】 利用两个计数原理解题的基本要领是要分清分类还是分步.

变式训练： 已知直线 $ax+by+c=0$ 中，a,b,c 的值是集合$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$中的 3 个不同的元素，并且该直线的倾斜角为锐角，求这样的直线的条数.

4. 借助“树形图”与“列表格”进行枚举，是计数最本质性的方法

【例 4】 同室四人各写一张贺年卡，先集中起来，然后每人从中拿一张别人送出的贺年卡，则四张贺年卡不同的分配方法有多少种？

【解析】 解法一：设四张贺年卡分别记为 A,B,C,D. 由题意，某人(不妨设 A 卡的供卡人)取卡的情况有 3 种，据此将卡的不同分配方式分为 3 类，对于每一类，其他人依次取卡分步进行. 为了避免重复或遗漏现象，用“树形图”表示如下：

```
  A—D—C        A—D—B        A—B—C
 /            /            /
B—C—D—A      C—D—A—B      D—C—A—B
 \            \            \
  D—A—C        D—B—A        C—B—A
```

故共有 9 种不同的分配方法.

解法二：将同室四人分别记为 A,B,C,D，然后利用四个人取卡的情况分步来确定.

第 1 步，四个人中的任意一人(例如 A)先取一张，则由题意知共有 3 种取法；第 2 步，由第一人取走的贺年卡的供卡人取，也有 3 种取法；第 3 步，由剩余的两个中的任一人取，只有一种取法；第 4 步，最后一人取，只有一种取法. 由分步乘法计数原理，共有 $3\times3\times1\times1=9$(种)不同的分配方法.

解法三：设四人 A,B,C,D 所写的贺年卡分别是 a,b,c,d. 当 A 拿贺年卡 b 时，则 B 可拿 a,c,d 中任何一张，即 B 拿 a，C 拿 d，D 拿 c；或 B 拿 c，C 拿 d，D 拿 a；或 B 拿 d，C 拿 a，D 拿 c，所以 A 拿 b 时有 3 种不同的分配方法. 同理 A 拿 c,d 时都各自有 3 种不同的分配方法，这时对 A 的分类完成. 用分类加法计数原理，共有 $3+3+3=9$(种)不同的分配方法.

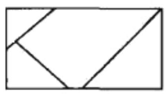
【点评】 一题多解. 解法一体现了枚举法，解法二和解法三又回归到运用分类加法和分步乘法原理，其思想深刻.

变式训练： 满足 $A\cup B=\{1,2\}$ 的集合 A,B 共有多少组？

自主成长

夯实基础

1. 乘积$(a+b+c+d)(p+q+r)(m+n)$展开式的项数是 ( )
A. 12　B. 24　C. 36　D. 48
2. 用1,3,5,7,9这5个数字中的3个替换直线方程$Ax+By+C=0$中的A,B,C,若A,B,C的值互不相同,则不同的直线共有 ( )
A. 25条　B. 60条　C. 80条　D. 181条
3. 用10元、5元和1元面值的钞票来购买价值为20元的商品,不同的支付方法有 ( )
A. 9种　B. 8种　C. 7种　D. 6种
4. 用5种不同的颜色给下图中的各部分涂色,每部分涂1色,颜色允许重复使用,但相邻部分涂不同色,则涂色的不同方法共有 ( )
A. 96种
B. 120种
C. 192种
D. 240种



5. 从5个中国人、4个美国人、3个日本人中各选1人的选法有________种.
6. 用1,2,3,4这4个数字组成含有重复数字的四位数,其个数是________.
7. 设坐标平面内有一个质点从原点出发,沿x轴跳动,每次向正方向或负方向跳1个单位,经过5次跳动后质点落在点(3,0)(允许重复过此点)处,则质点不同的运动方法共有________种.

能力提升

8. 高二(1)班有学生50人,其中男生30人,女生20人;高二(2)班有学生60人,其中男生30人,女生30人;高二(3)班有学生55人,其中男生35人,女生20人.
(1)从高二(1)班或高二(2)班或高二(3)班中选1名学生任学生会主席,有多少种不同的选法?
(2)从高二(1)、高二(2)班男生中,或从高二(3)班女生中任选1名学生任学生会体育部长,有多少种不同的选法?

9. (1)仅用数字1,2,3,可以写出许多个正整数,各数位上的数字可以重复,那么其中小于1 000的正整数的个数为______.
(2)在1～20共20个整数中取2个数相加,使其和为偶数的不同取法共有多少种?

挑战自我

10. 过三棱柱任意两个顶点的直线共15条,其中互为异面直线的有多少对?

第2课时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理(2)

发现问题

情景导思

问题:4名同学去争夺3项冠军,不允许并列,则共有多少种不同的获奖情形?

错解:(分步做)第1步,第1名同学去夺3项冠军,有可能一个不得,也有可能夺得1个或2个或全部,因此共有4种不同情形;以下3步分别让剩下的3名同学去夺这3项冠军,均各有4种不同情形,由乘法原理可知,一共有 $4\times4\times4\times4=4^4$(种)夺得冠军的情形.

错解分析:错解对"完成一件事"选错了对象,如第1步中,若3项冠军都给第1名同学,则这件事就算做完了,不需要以下各步;又如四步做法中4名同学均1项冠军未获得,则四步全做完了,而这件事还没完成,错误的主要原因在于选择的方法不当,错选了对象.

正解:从每个冠军被夺得的情形进行分步处理.第1步,第1项冠军被4名同学去夺,它一定被其中1名且只能是1名同学获得,因此,共有4种不同的获奖情况;第2步,第3步是其余2项冠军分别被4名同学中的1名去获得,各有4种不同的获奖情形,由分步乘法计数原理可知,一共有 $4\times4\times4=4^3$(种)获奖情形.

由上述正与误两方面的探究过程知,运用两个基本原理计数很关键的是正确理解题意.

互动课堂

知识清单

知识点1:"分类"的理解

"做一件事,完成它可以有 n 类办法"这是对完成这件事的所有办法的一个分类.分类时,首先要根据问题的特点确定一个分类标准,不同的分类标准会产生不同的分类方式,其次分类时要掌握两个原则:第一,完成这件事的任何一种方法都必须属于某一类,即不遗漏;第二,分别属于不同两类的两种方法是不同的方法,即不重复.

知识点2:"分步"的理解

"做一件事,完成它需要分成 n 个步骤"这是说完成这件事的任何一种方法都要分成 n 个步骤.分步时,首先要根据问题的特点,确定一个分步标准;其次,步骤的设置要满足完成这件事,必须且只需连续完成这 n 个步骤后,这件事才算最终完成.

知识点3:分类和分步的联系

分类和分步是思考问题的两种基本模式,没有严格的界限.有些问题,先分类,每一类方法又要分步来思考;而有些问题需要先分步,再在每一步中又分类.

学法指导

1. 利用加法原理合理选用分类标准

【例1】 在1~20共20个整数中取2个数相加,使其和大于20的不同取法共有多少种?

【解析】 分类标准一:固定小加数,小加数为1时,大加数只有20这1种取法;小加数为2时,大加数有19或20共2种取法;小加数为3时,大加数为18,19或20共3种取法;……;小加数为10时,大加数为11,12,…,20共10种取法;小加数为11时,大加数有9种取法;……;小加数取19时,大加数有1种取法.由分类计数原理,得不同取法共有 $1+2+\cdots+9+10+9+\cdots+2+1=100$ 种.

分类标准二:固定和的值.有和为21,22,…,39这几类,依次有取法10,9,9,8,8,…,2,2,1,1种.由分类计数原理得不同取法共有 $10+9+9+\cdots+2+2+1+1=100$ 种.

【点评】 对数字比较小的问题一般采用分类列举的方法,亦为穷举法,注意合理选择分类标准,不重复遗漏.

变式训练: 甲、乙、丙三人传球,从甲开始传出,并记为第1次传球,经过5次传球,球恰好回到甲手中,则传球种数为 ( )

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 15

2. 灵活运用间接法解题

【例2】 已知100到999的三位数,求其中含有0的三位数有多少个?

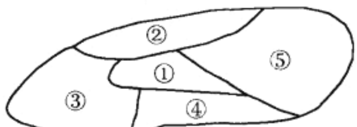
【解析】 从100到999的所有确定的三位数共有 $(999-100)+1=900$(个),不含0的三位数由分步乘法计数原理知有 $9\times9\times9=729$(个),因此含有数字0的三位数有 $900-729=171$(个).

【点评】 本题若用含0的不同情况去分类解决较为麻烦,因此可考虑间接求解.从问题的反面入手,先求不符合条件的种数,然后从整体中减去这些不符合条件的种数,剩下的就是符合条件的种数,这种思考问题的方法就是间接法(或排除法).当正面分类情况较多时,间接法就会突显出其优越性.

变式训练: 用0,1,2,3,4,5这6个数字,可以组成多少个无重复数字且是5的倍数的三位数?

3. 一类涂色问题的求解

【例 3】如图，一个地区分为 5 个行政区域，现给地图着色，要求相邻区域不得使用同一颜色，现有 4 种颜色可供选择，则不同的着色方法共有________种.



【解析】我们顺着先前的解法，按分步原理求解，顺次给①，②，③，④，⑤着色. 第 1 步，给①着色有 4 种，第 2 步给②着色有 3 种，第 3 步给③着色有 2 种，第 4 步给④着色有 2 种，但第 5 步给⑤着色时，它因为②与④的着色相同还是不同有所变化，故对②与④的着色是否相同分两类加以讨论求解.

还是顺次给①，②，③，④，⑤着色，

第 1 类：若②与④色同，给②着色即已经给④着色，由乘法原理，方法为 $4\times3\times2\times1\times2=48$ 种；

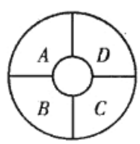
第 2 类：若②与④色不同，

此时方法为 $4\times3\times2\times1\times1=24$ 种.

故所有方法种数为 72 种.

【点评】对较复杂的着色问题，依乘法原理，拟好着色步骤，顺次着色，当对某一区域涂不下去时，也就是要讨论的时候了.

变式训练：如图所示，一环形花坛分成 A,B,C,D 共 4 块，现有 4 种不同的花供选种，要求在每块花坛里种 1 种花，且相邻的 2 块种不同的花，则不同的种法总数为（　　）



A. 96　　　　B. 84

C. 60　　　　D. 48

4. 分步乘法原理求正整数的正约数个数

【例 4】75 600 有多少个正约数？其中有多少个奇约数？

【解析】75 600 的约数就是能整除 75 600 的整数，所以本题就是分别求能整除 75 600 的正整数和其中奇数的个数.

由于 $75\ 600=2^4\times3^3\times5^2\times7$，

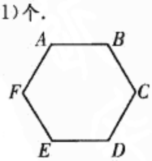
(1)75 600 的每个正约数都可以写成 $2^i\cdot3^j\cdot5^k\cdot7^l$ 的形式，其中 $0\leqslant i\leqslant4,0\leqslant j\leqslant3,0\leqslant k\leqslant2,0\leqslant l\leqslant1$.

于是，要确定 75 600 的一个正约数，可分四步完成，即 i,j,k,l 分别在各自的范围内任取一个值，这样 i 有 5 种取法，j 有 4 种取法，k 有 3 种取法，l 有 2 种取法，根据分步计数原理得，正约数的个数为 $5\times4\times3\times2=120$ 个.

(2)奇约数中因不含有 2 的因数，因此 75 600 的每个正奇约数都可以写成 $3^j\cdot5^k\cdot7^l$ 的形式，同上正奇约数的个数为 $4\times3\times2=24$ 个.

【点评】设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$（$p_1,p_2,\cdots,p_k$ 为质数），则正整数 n 的正约数有 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$ 个.

变式训练：如图所示，设六边形 $ABCDEF$ 为正六边形，一只青蛙开始在顶点 A 处，它每次可随意地跳到相邻两顶点之一，若在 5 次之内跳到点 D，则停止跳动；若 5 次之内不能跳到点 D，则跳完 5 次也停止跳动，那么这只青蛙从开始跳到停止，可能出现的不同跳法共有________种.



自主成长

夯实基础

1. 某班进行班干部选举，从甲、乙、丙、丁 4 人中选出 3 人分别担任班长、副班长、团支书，规定上届任职的甲、乙、丙 3 人不能连任原职，则不同的任职方案种数为（　　）

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13

2. 直线方程 $Ax+By=0$，若从 0，1，2，3，5，7 这 6 个数字中每次取 2 个不同的数字作为 A,B 的值，则表示不同直线的条数是（　　）

A. 2　　B. 12　　C. 22　　D. 25

3. 一种号码锁有 4 个拨号盘，每个拨号盘上有从 0 到 9 共 10 个数字，这 4 个拨号盘可以组成的四位数字号码个数为（　　）

A. 10^5　　B. 4^{10}

C. $10\times9\times8\times7$　　D. $10\times10\times9\times8$

4. 用 0，1，2，3，4 组成的没有重复数字的全部五位数中，若按从小到大的顺序排列，则数字 12 340 应是第几个数（　　）

A. 6　　B. 9　　C. 10　　D. 8

5. 一块并排 10 垄的田地中，选择 2 垄分别种植 A,B 两种作物，每种作物种植一垄. 为有利于作物生长，要求 A,B 两种作物的间隔不小于 6 垄，则不同的选垄方法共有________.

6. 椭圆 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ 的焦点在 y 轴上，$m\in\{1,2,3,4,5\}$，$n\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$，则这样的椭圆的个数为________.

7. 甲、乙两个自然数的最大公约数为 60，则甲、乙两个数的公约数共有________个.

能力提升

8. 有 4 位同学参加 3 项不同的竞赛.

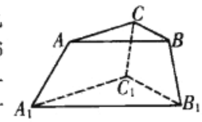
(1)每位同学必须参加 1 项竞赛，有多少种不同的结果？

(2)每项竞赛只许 1 位学生参加，有多少种不同的结果？

9. 安排7位工作人员在5月1日到5月7日值班，每人值班一天，其中甲、乙2人都不能安排在5月1日和2日，不同的安排方法共有多少种？

挑战自我

10. 某人有3种颜色的灯泡（每种颜色的灯泡足够多），要在如图所示的6个点 A,B,C,A_1,B_1,C_1 上各装一个灯泡，要求同一条线段两端的灯泡不同色，不同的安装方法共有________种.



第3课时 排列(1)

发现问题

情景导思

由数字1,2,3,4能组成多少个无重复数字的四位数?又能组成多少个四位数?

事实上,前者四位数个数为$4\times3\times2\times1=24$(个);后者四位数个数为$4\times4\times4\times4=256$(个),因为后者允许数字重复使用,每个数位上均有四种取法,我们把前者与顺序有关且元素不能重复使用的计数问题称之为排列.

互动课堂

知识清单

知识点1:排列的概念

一般地,从n个不同元素中取出$m(m\leqslant n)$个元素,按照一定的顺序排成一列,叫做从n个不同元素中取出m个元素的一个排列.

知识点2:排列数的定义

从n个不同元素中取出$m(m\leqslant n)$个元素的所有不同排列的个数叫做从n个不同元素中取出m个元素的排列数,用符号A_n^m表示.

知识点3:排列数公式

$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)(m,n\in\mathbf{N}^*,m\leqslant n)$.

学法指导

1. 排列的概念

【例1】判断下列问题是否为排列问题:

(1)从1到10的10个自然数中任取2个数组成点的坐标,可得多少个不同的点的坐标?

(2)从学号为1到10的10名同学中任取2名同学去参加学校座谈会,有多少种不同的抽取方式?

(3)从1,2,3,5这4个数中任取2个不同的数作商,可得到多少个不同的结果?

(4)平面上有5个点,其中任意3点不共线,最多可以确定多少条直线?

【解析】(1)(3)(4)因为与顺序有关,所以是排列问题;(2)因抽出的2名同学与顺序无关,故不是排列问题.

【点评】1.排列的定义包括两个方面:(1)取出元素;(2)按一定的顺序排列.

2.两个排列相同的条件:(1)元素完全相同;(2)元素的排列顺序也相同.

变式训练:从n个人中选出2个,分别从事两项不同的工作,若选派方案的种数为72,则n的值为 ( )

A. 6 B. 8 C. 9 D. 12

2. 排列数公式的简单计算

【例2】计算:$3A_9^3-2A_7^2$.

【解析】$3A_9^3-2A_7^2=3\times9\times8\times7-2\times7\times6=1\,428$.

变式训练:乘积$m(m+1)(m+2)\cdots(m+20)$可表示为 ( )

A. A_m^{20} B. A_m^{21} C. A_{m+20}^{20} D. A_{m+20}^{21}

3. 直接用排列数的含义解计数问题

【例3】(1)从2,3,5,7,11这5个数字中,任取2个数字组成分数,不同值的分数共有多少个?

(2)5人站成一排照相,共有多少种不同的站法?

(3)某年全国足球甲级(A组)联赛共有14队参加,每队都要与其余各队在主、客场分别比赛1次,共进行多少场比赛?

【解析】(1)$A_5^2=5\times4=20$;

(2)$A_5^5=5\times4\times3\times2\times1=120$;

(3)$A_{14}^2=14\times13=182$.

【点评】排列数公式是一计数重要模型,运用它时需注意两个特征,一是计数考虑顺序;二是所给元素不重复使用.

变式训练:一部电影,要去5个不同的单位轮映,问有多少种不同的轮映次序?

自主成长

夯实基础

1. 四支足球队争夺冠、亚军，不同的结果有（　　）

A. 8种　　B. 10种　　C. 12种　　D. 16种

2. 信号兵用3种不同颜色的旗子各1面，每次打出3面，最多能打出不同的信号有（　　）

A. 3种　　B. 6种　　C. 1种　　D. 27种

3. 已知$k\in \mathbf{N}^*$，且$k\leqslant 40$，则$(50-k)(51-k)(52-k)\cdots(79-k)$用排列数符号表示为（　　）

A. A_{79-k}^{50-k}　　B. A_{79-k}^{29}

C. A_{79-k}^{30}　　D. A_{50-k}^{30}

4. 5人站成一排照相，甲不站在排头的排法有（　　）

A. 24种　　B. 72种　　C. 96种　　D. 120种

5. 给出下列问题：

①有10个车站，共需要准备多少种车票？

②有10个车站，共有多少种不同的票价？

③平面内有10个点，共可作出多少条不同的有向线段？

④有10个同学，假期约定每2人通电话一次，共需通话多少次？

⑤从10名同学中选出2名分别参加数学和物理竞赛，有多少种选派方法？

以上问题中，属于排列问题的是________（填编号）．

6. 若$x\in\{x\mid x\in\mathbf{Z},|x|<4\}$，$y\in\{y\mid y\in\mathbf{Z},|y|<5\}$，则以$(x,y)$为坐标的点共有________个．

7. 从参加乒乓球团体比赛的5名运动员中选出3名进行某场比赛，并排定他们的出场顺序，则所有不同的方法种数为________．

能力提升

8. 计算：(1)$6A_6^3+5A_5^2$；

(2)$A_5^1+A_5^2+A_5^3+A_5^4+A_5^5$．

挑战自我

9*. 一条铁路原有n个车站，为适应客运需要，新增加了m个车站($m>1$)，客车车票增加了62种，那么原有多少个车站？现有多少个车站？

注释：书中加“*”的题为选做题．

第4课时 排列(2)

发现问题

情景导思

因为 $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)(n-m)\cdots2\cdot1}{(n-m)\cdots2\cdot1}$$

$$=\frac{n!}{(n-m)!}$$

所以 $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$. ①

公式①称为排列数公式的阶乘形式. 它有两个主要作用:一是当 n,m 较大时,可使用科学计算器算出结果;二是对含有字母的排列数式子进行变形和论证时,常用此式.

互动课堂

知识清单

知识点1:阶乘的概念

n 个不同元素全部取出的一个排列,叫做 n 个不同元素的一个全排列,这时 $A_n^n=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$;把正整数1到 n 的连乘积,叫做 n 的阶乘,表示为 $n!$,即 $A_n^n=n!$,且规定 $0!=1$.

知识点2:排列数的另一个计算公式

$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$.

知识点3:两个常用结论

(1) $1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$;

(2) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$.

注:(1)的证明用到 $k\cdot k!=(k+1)!-k!$;(2)的证明用到 $\frac{k-1}{k!}=\frac{k}{k!}-\frac{1}{k!}=\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}$,两者均体现了裂项相消求和法.

学法指导

1. 解与排列数有关的方程

【例1】 解方程:$3A_x^3=2A_{x+1}^2+6A_x^2$.

【解析】 由排列数公式得

$3x(x-1)(x-2)=2(x+1)x+6x(x-1)$,

$\because x\geqslant3$,

$\therefore 3(x-1)(x-2)=2(x+1)+6(x-1)$,

即 $3x^2-17x+10=0$,解得 $x=5$ 或 $x=\frac{2}{3}$.

$\because x\geqslant3$,且 $x\in\mathbf{N}^*$,

$\therefore$ 原方程的解为 $x=5$.

【点评】 此类问题就是利用排列数公式消掉符号 A_n^m,化归为 x(或 n)的代数式来解;同时要注意在排列数 A_n^m 中 n,m 所满足的条件:$m,n\in\mathbf{N}^*$ 且 $m\leqslant n$,这些都是隐含的限制条件,要用它对得到的解进行验证.

变式训练: 解方程:$A_{2x+1}^4=140A_x^3$.

2. 解与排列数有关的不等式

【例2】 解不等式:$A_9^x>6A_9^{x-2}$.

【解析】 原不等式可化为 $\frac{9!}{(9-x)!}>\frac{6\cdot9!}{(9-x+2)!}$,其中 $2\leqslant x\leqslant9$,$x\in\mathbf{N}^*$,

$\therefore (11-x)(10-x)>6$,即 $x^2-21x+104>0$.

$\therefore (x-8)(x-13)>0$,

$\therefore x<8$ 或 $x>13$.

但 $2\leqslant x\leqslant9$,$x\in\mathbf{N}^*$,

$\therefore 2\leqslant x<8$,$x\in\mathbf{N}^*$.

故 $x=2,3,4,5,6,7$.

【点评】 此类问题首先要将给定的不等式转化为不含排列数的不等式,但仍然要注意在排列数 A_n^m 中 n,m 所满足的条件;利用阶乘式时,一定要注意两式相约后所剩余的是哪些项.

变式训练: 计算:$\frac{A_{n-1}^{m-1}\cdot A_{n-m}^{n-m}}{A_{n-1}^{n-1}}$.

3. 证明与排列数或阶乘有关的等式

【例 3】 求证：(1) $A_n^n=A_n^m\cdot A_{n-m}^{n-m}$；

(2) $\dfrac{(2n)!}{2^n\times n!}=1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)$.

【解析】 (1) $A_n^m\cdot A_{n-m}^{n-m}=\dfrac{n!}{(n-m)!}\cdot(n-m)!=n!=A_n^n$，

∴原式成立.

(2) $\dfrac{(2n)!}{2^n\cdot n!}=\dfrac{2n\times(2n-1)\times(2n-2)\times\cdots\times4\times3\times2\times1}{2^n\cdot n!}$

$=\dfrac{2^n n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1\times(2n-1)\times(2n-3)\times\cdots3\times1}{2^n\cdot n!}$

$=\dfrac{n!\times1\times3\times\cdots\times(2n-3)\times(2n-1)}{n!}$

$=1\times3\times5\cdots\times(2n-1)=$右边.

∴原式成立.

【点评】 1. 解含排列数的方程和不等式时要注意排列数 A_n^m 中，$m,n\in\mathbf{N}^*$ 且 $m\leqslant n$ 这些限制条件，要注意含排列数的方程和不等式中未知数的取值范围.

2. 公式 $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ 常用来求值，特别是 m,n 均为已知时，公式 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$ 常用来证明或化简.

变式训练： $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots+\dfrac{n-1}{n!}<1$.

自主成长

夯实基础

1. 若 $x=\dfrac{n!}{3!}$，则 x 等于 ( )

A. A_n^3　　B. A_n^{n-3}　　C. A_3^n　　D. A_{n-3}^3

2. 下列与 $A_{10}^3\cdot A_7^7$ 不相等的是 ( )

A. A_{10}^9　　B. $81A_8^8$　　C. $10A_9^9$　　D. A_{10}^{10}

3. 若 $A_m^5=2A_m^3$，则 m 的值为 ( )

A. 5　　B. 3　　C. 6　　D. 7

4. 计算：$\dfrac{2A_9^5+3A_9^6}{9!-A_{10}^6}=$________.

5. 若 $2<\dfrac{(m+1)!}{A_{m-1}^{m-1}}\leqslant42$，则 m 的解集是________.

6. (1) 已知 $A_{10}^m=10\times9\times\cdots\times5$，那么 $m=$________；

(2) 已知 $9!=362\ 880$，那么 $A_9^7=$________；

(3) 已知 $A_n^2=56$，那么 $n=$________；

(4) 已知 $A_n^2=7A_{n-4}^2$，那么 $n=$________.

能力提升

7. (1) 4 个人从 9 本不同的书里每人借 1 本，共有多少种不同的借法？

(2) 有 4 本不同的书 9 个人去借，限定每人最多借 1 本书，并且书被完全借出，一共有多少种不同的借法？

8. 解关于 n 的方程：$3A_n^3=2A_{n+1}^2+6A_n^2$.

挑战自我

9*. 有 4 种不同花色的花可供选择，要栽种如图所示的 6 个区域，要求相邻的区域花色不同，共有多少种不同的栽种方式？