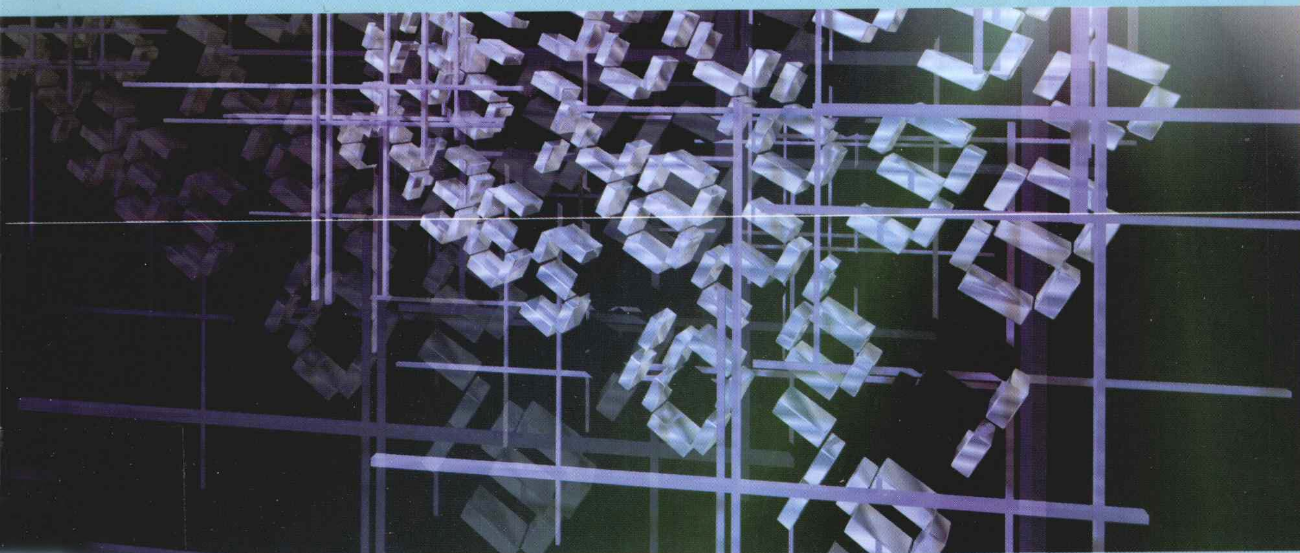
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

计算机数学基础

叶东毅　陈昭炯　朱文兴　主编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

计算机数学基础

Jisuanji Shuxue Jichu

叶东毅　陈昭炯　朱文兴　主编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

本书基于高等职业教育计算机专业的特点和培养面向计算机应用软件开发人才的目标进行定位，同时按照“够用、实用”的原则进行编写。本书主要介绍数学思想和方法在计算机科学领域中的若干应用，使学生对计算机科学和软件开发的数学基础以及这些数学思想和方法可能的应用有一个总体的了解和把握。全书共8章，主要内容包括：数学——计算机科学的基础、一元微分学初步、不定积分与定积分、矩阵与线性代数初步、概率论基础、随机变量的分布与数字特征、数理逻辑初步和图论初步。

本书可作为应用性、技能型人才培养的各类教育计算机数学课程的教学用书，也可供普通高等教育、各类培训、计算机从业人员和爱好者参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

计算机数学基础 / 叶东毅，陈昭炯，朱文兴主编.
—北京：高等教育出版社，2010.6
ISBN 978-7-04-029017-2

Ⅰ. ①计… Ⅱ. ①叶… ②陈… ③朱… Ⅲ. ①电子计算机-数学基础-高等学校-教材 Ⅳ. ①TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 054879 号

策划编辑 冯 英 **责任编辑** 董达英 **封面设计** 张志奇 **责任绘图** 黄建英
版式设计 余 杨 **责任校对** 金 辉 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http // www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http:// www.hep.com.cn
		网上订购	http:// www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http:// www.landraco.com.cn
印 刷	北京铭传印刷有限公司	畅想教育	http:// www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	版 次	2010年6月第1版
印 张	15.5	印 次	2010年6月第1次印刷
字 数	380 000	定 价	24 80元（含光盘）

物料号 29017-00

前　言

本书是为高等职业教育计算机专业学生编写的计算机数学基础课程的国家级规划教材，它是在2004年出版的职业技术教育软件人才培养模式改革项目成果教材《计算机数学基础》一书的基础上修订和扩充而成的。

微积分、线性代数、概率论和离散数学是计算机专业的必修数学课程。考虑到计算机/软件高职专业的特点和培养面向计算机应用软件开发人才的目标定位，同时基于“够用、实用”的原则并考虑到课程教学时数的限制，本书不可能、也没有必要像标准的大学数学理论教科书那样详细地介绍微积分、线性代数、概率论和离散数学的内容，只能有选择地介绍这些理论中最基本的概念和方法，为后续的专业课程学习提供必要的数学基础知识。因此，本书的编写思想在于将上述微积分、线性代数、概率论和离散数学这几门学科的内容进行简化并整合在一起做一个导引性的介绍，除了必要且简单的证明之外，一般不给出定理的数学证明。与此同时，考虑到计算机/软件高职专业的特点，有必要介绍这些数学思想和方法在计算机科学领域中的若干应用，使学生对计算机科学和软件开发的数学基础及数学思想和方法的应用有一个总体的了解和把握，达到课程学习的目的。因此，本书在微积分部分，只介绍一元微积分的基本内容，对于多元函数和多元微积分则没有描述；在线性代数部分，主要介绍矩阵的思想和方法以及求解线性方程组的基本思路；在概率论部分，着重介绍基本的概率计算方法和随机变量及其数字特征；在离散数学部分，只介绍集合论、简单数理逻辑和简单的图论方法。

本书的主要特点如下：

1. 专门设置了一章内容（第 1 章），介绍离散数学、微积分、线性代数和概率论对于计算机科学的重要性，特别是对于计算机专业学生容易忽视的连续数学理论，如微积分，用实例阐述了它们在计算机科学中的作用，使学生认识到不掌握一定的微积分知识就可能编写出错误的计算机程序。

2. 采用两种方式定义极限的概念，一种是极限的直观化定义，另一种是基于$\varepsilon-N$或$\varepsilon-\delta$语言描述的严格数学意义上的极限定义。在若干有关极限的例题中，既给出基于极限直观化定义的分析方法，也提供基于严格数学意义上的极限概念的分析和证明方法，以便于读者进行比较学习，更好地掌握极限的概念。在此基础上，用极限的概念贯穿一元微积分所涉及的主要内容，如强调导数、无穷级数以及积分均是一类特殊的极限。

3. 增加了一般高等数学教科书所没有的“递归函数与递归程序设计”、“矩阵的乘法顺序与

计算量分析”、“贝叶斯公式与智能决策”等与计算机软件开发密切相关的内容。

4. 强调所学知识与计算机科学领域中的问题的关联性。特别是在无穷级数、矩阵、随机变量、数理逻辑和图论等章节，给出了不少的应用例子，涉及函数近似计算、数据库系统、计算机网络、计算机图形和图像处理、软件可靠性评估、人工智能等计算机科学的分支领域。

本书建议授课时数为64～80学时，标有*的内容供参考，可另行安排学时。

本书由福州大学叶东毅教授、陈昭炯教授和朱文兴教授任主编。全书共有8章，其中第1章、第2章、第3章和第4章由叶东毅编写，第5章和第6章由陈昭炯编写，第7章和第8章由朱文兴编写，全书由叶东毅负责统稿。此外，福建信息职业技术学院的黄金伟和洪彩霞老师、闽江学院软件学院的郑旭东和吕岚老师、福建交通职业技术学院的张国勇老师等参加了本书编写或对本书的编写提出了许多宝贵的意见，并提供了若干有益的习题。

限于编者的水平，书中难免有错、漏及欠妥之处，诚恳希望使用本教材的教师与学生提出宝贵意见，以利进一步的修改与提高。

编 者

2010年4月

目 录

第1章

数学——计算机科学的基础

本章学习目标

学习完本章后，对数学作为计算机科学的必备基础应有一个基本的认识，特别是对微积分等连续数学方法在计算机科学领域中的应用有初步的了解。

1.1 概　　述

作为自然科学、社会科学、经济管理科学和工程技术科学的基础，数学的重要性是众所周知的。可以说，现代任何一门学科的发展都离不开数学。计算机科学更是如此，它的诞生和发展是同数学密不可分的。在计算机科学与技术的众多分支领域中，如计算机软件与理论、计算机应用技术、计算机体系结构、计算机通信和网络技术以及人工智能等领域中，数学理论的应用随处可见。这些数学理论不仅包括本书要介绍的微积分、线性代数、概率统计等常见和普遍使用的数学工具，而且还包括应用于计算机网络安全中的数论以及代数几何中的椭圆曲线理论这些相当“纯粹”的纯数学理论。另外，计算机科学中的一些基础理论本身就归属于数学学科的范畴，而不仅仅只是数学理论的应用成果，例如，布尔代数、关系代数、数理逻辑、图论、组合数学与密码学等。因此，对于计算机专业（计算机软件专业、计算机应用技术专业）的学生来说，学习和掌握好数学知识，不仅仅是像人们从一般意义上所说的能锻炼和提高人的逻辑思维能力、想象能力、推理能力和分析问题的能力，更是从事专业工作必备的一种基本素质。

1.2 离散数学与计算机科学

数据和信息在计算机中是以二进制代码的形式存储的，即计算机处理的是离散的对象。因此，研究离散对象的离散数学很自然地成为计算机科学基础理论的一个重要组成部分。离散数学的研究范围十分广泛，作为计算机科学基础的布尔代数、关系代数、数理逻辑、组合数学和图论等都属于离散数学研究的内容。掌握离散数学知识对我们学好计算机科学和技术是至关重

要的。

1.3 学习微积分的重要性

自从牛顿和莱布尼茨创立了微积分以来，微积分作为一个基本的处理连续数学的工具，不仅自身的理论得到迅猛的发展，而且被广泛地应用于自然科学、工程技术和经济管理等领域，即使是以处理离散对象为主的计算机科学，也离不开微积分这个经典的数学工具。对于这点，学习计算机专业的学生经常会有疑惑，下面来看几个问题。

问题 1 无理数计算问题。

实数是由有理数和无理数组成的，而且无理数要比有理数多得多。在计算机中是以二进制形式用有限个数位按位表示数据的。由于数位有限，故能表示的只是有理数，因此，无理数的表示只能靠近似的方法。另外，受字长和表示精度的双重限制，一般而言计算机中能表示的数值的大小的范围是有限的，换句话说，用有理数近似无理数的精度是有限的，它只能精确到小数点后面有限位。那么，如何在精度许可的范围内尽可能精确地计算一个无理数呢？或者说如何在精度许可的范围内用一个有理数来尽可能准确地表示一个无理数呢？例如，如何在计算机中表示无理数$\sqrt{2}$，圆周率 π 和自然对数的底 e 呢？这是一个需要利用微积分的方法加以解决的问题。具体地说，可以利用无穷级数展开的方法将这些无理数表示成无穷多项有理数的和。以 e 的计算为例（参见本书第 2 章关于无穷级数的介绍），有

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

可取前 n+1 项作 e 的近似值（n 的大小依赖于计算机的机器精度或者根据实际的需要确定）

$$e\approx1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

例如，如果取 n=7，即级数的前 7+1=8 项作近似计算，则和式中的每一项都是有理数，最终得

$$e\approx1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}=2.718\,26$$

问题 2 初等函数的计算问题。

计算机的一个重要作用是能够进行大规模和快速的科学计算。而科学计算中最常遇到的是初等函数的计算。例如，对于给定的实数 x，需要计算 $\sin x$、$\ln x$、$(1+x)^{\alpha}$（α 是实数）等。这些都需要利用微积分中的函数幂级数展开的方法加以解决，在本书的第 2 章中将介绍这方面的内容。

问题 3 一个求和式的编程计算问题。

在中学的信息学课程中，已经初步学习了计算机编程语言，如 Pascal 程序设计语言或 C 语言，并且应用编程语言在计算机上实现一些简单的计算。现在，假设要利用计算机计算下面和式的结果：

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

其中，n 可以是一个很大的正整数。

一个自然的编程设计思想是：对于给定的 n，先计算 $S(1)=1$，然后计算 $S(2)=S(1)+\frac{1}{2}$，依此类推，最后通过 $S(n)=S(n-1)+\frac{1}{n}$ 计算出求和的结果 $S(n)$。这种思想可称为“由前向后加法”。

用伪 Pascal 代码的形式可以将上述编程思想写成如下的程序段（在中学没有学习过计算机编程语言的同学可以结合上述的编程思想进行理解，也可以待学习计算机编程语言之后再次阅读本段程序）：

```
S: =0;
begin
for k=1 to n do
S: =S+1/k
end;
write(S)
```

从理论上来说，上述程序是正确的，它应能获得正确的答案。但是，当 n 比较大时，该程序在计算机上运行获得的结果离正确的结果会有偏差，偏差的程度甚至可能非常大。

这是为什么呢？有两个原因。首先，在计算机中，两个数的相加是按照浮点运算方法进行的，存在着“大吃小”的问题，即当两个数的绝对值相差的倍数超过一定范围时，两个数之和等于其中大的那个数，小的那个数不起作用，即相当于小的那个数被吃掉了。有关这方面的内容在计算机基础课程中会专门介绍，这里，以十进制的浮点计算做个粗略和示意性的说明。假设某台计算机能表达的数的精度达到小数点后 10 位（为了说明起见这样假设，实际精度要比这高）。现在，要计算 $a+b$，其中 $a=10\ 000\ 000$，$b=0.000\ 01$。按照浮点运算就高位的规则，因为 $a=1.0\times10^7$，故应将 b 表示为 $b=0.000\ 000\ 000\ 001\times10^7$ 后进行相加运算。由于表示精度只能达到小数点后 10 位，因此，$b=0.000\ 000\ 000\ 001\times10^7$ 中的 0.000 000 000 001 超过了精度的范围，因而被置为 0，也就相当于在进行加法运算时，b 被 a“吃掉”了，导致 $a+b=a$ 的实际计算结果。

其次，考察一下编程计算的过程。对于 $1\leqslant m\leqslant n$，$S(m)=S(m-1)+\frac{1}{m}$，这里涉及两个数的加法，一个是 $S(m-1)$，另外一个是 $\frac{1}{m}$。当 m 很大时，$\frac{1}{m}$ 是一个很小的数，如果此时 $S(m-1)$ 是个很大的数，就可能出现上述的“大吃小”的问题，致使从这个 m 开始，无论 $n(>m)$ 有多大，都有 $S(m-1)=S(m)=S(m+1)=\cdots=S(n)$，换句话说，要计算的是 $S(n)$，但最终结果却是 $S(m-1)$。如果 $S(m-1)$ 与 $S(n)$ 相差很小，则这种近似还是可以接受的，如果相差甚远，则该程序无法得到正确（或近似正确）的结果。那么，实际情况是什么样的呢？在第 2 章无穷级数一节中，将会说明，$S(n)$ 随着 n 的增大而增大，并且逐渐趋向于“无穷大”（即“级数不收敛”），即当 m 很大时，$S(m-1)$ 是个很大的数，因此，确实会出现“大吃小”的问题；而且，当 $n>m$ 且 n 比 m 大得多时，$S(m-1)$ 与 $S(n)$ 相差是很大的。因此，上述程序无法得到正确的结果。产生编程设计错误的原因是不了解计算机浮点运算的规则，同时不了解级数的收敛性。

在计算机精度范围内正确编程计算 $S(n)$ 的方法应该是采用从后往前加的办法。对于给定的

n，先计算 $F(1)=\frac{1}{n}$，然后计算 $F(2)=F(1)+\frac{1}{n-1}$，依此类推，最后计算 $F(n)=F(n-1)+1$，而 $S(n)=F(n)$，由此完成计算。读者可以分析一下为什么这种方法优于前面那种方法？

以上 3 个例子说明，无穷级数展开和级数收敛的知识对于计算机科学而言是十分重要的，甚至对于保障程序设计的正确性来说也是必不可少的。而要掌握有关无穷级数的知识，就必须学习极限、收敛性、函数的导数等知识，这些正是微积分的基本内容。况且，无穷级数本身就是微积分的一个重要研究内容。因此，学习微积分的重要性不言而喻。

1.4　学习线性代数和概率论的重要性

在大量的工程设计、经济管理以及计算机应用等领域中，常常需要求解多个未知数（简称多元）的线性方程组。研究多元线性方程组解的存在性、解的结构以及如何有效求解多元线性方程组，是线性代数的一个主要研究内容。矩阵是研究多元线性代数方程组求解的一个基本的工具，也是研究线性代数的一个基本工具。特别是矩阵的概念和描述问题的方式可以应用于诸如数据结构、计算机算法设计、图论、计算机图形学、计算机网络分析、图像处理等计算机科学的诸多分支领域。因此，掌握矩阵的方法及其应用不仅是学好线性代数的基础，也可为今后学习计算机科学理论和程序设计奠定基础。

概率论在计算机领域的应用非常广泛，学习和掌握概率论思想方法对今后学习计算机知识和从事相关工作有着重要的意义。例如，下列问题都同概率论的思想方法密切相关：如何根据机房遭受病毒攻击的记录分析病毒发作的规律，计算机系统各部件发生故障的可能性的计算，一台安装了两组密码的系统比只安装一组密码的系统安全系数大了多少，电脑公司如何分配用于不同媒体的广告费以获得更高的顾客购买率，一幅图像传输时的误码率有多大，一个软件工程师如何利用概率分析的方法进行故障诊断等。

除了基本的概率计算和分析方法外，概率论中的另一个重要概念“随机变量”及其分布模型在计算机科学领域的应用也是十分广泛的。例如，网站的点击次数用什么模型描述；服务器每分钟接到的服务请求次数服从什么分布；销售过程中售后服务人员安排多少合适；一个班级某课程的考试成绩尽管是个随机变量，但总体上都呈现出“中间高，两头低”的形式，对这种现象如何解释；当急于访问某热门站点，但又不愿意等待太长时间时，访问到的可能性有多大；对于计算机图像处理中的直方图均衡化问题该如何有效地处理等。

本书将对上述这些概率论在计算机科学中的应用问题加以描述。

1.5　本书的学习方法

前面简要地介绍了离散数学、微积分、线性代数和概率论对于计算机科学的重要性，特别是针对那些不容易引起计算机专业学生重视的连续数学理论（如微积分和概率论）阐述了它们在计算机科学中的作用。

一般来说，在本科计算机的教学计划中，微积分、线性代数、概率论和离散数学是作为独立的几门必修数学基础课程分若干个学期先后开设的。因此，每门课程都有相应的理论教科书。而本书是为计算机软件高职专业学生编写的，它旨在将微积分、线性代数、概率论和离散数学这几门课程的内容进行简化并结合在一起做引导性的介绍，使学生对计算机的数学基础有一个总体的了解和把握。因此，学生在学习本书时应着重理解本书所介绍的数学知识在计算机科学中的应用，做到学以致用。

第2章

一元微分学初步

本章学习目标

学习完本章后应掌握：

- 集合的概念、表示方法和基本运算，以及二元关系的定义。
- 函数的概念和基本表示方法，并了解函数的递归表示形式。
- 极限的概念、性质和运算规则，并能进行较为简单的极限计算。
- 函数连续性的概念和判定连续性的方法。
- 函数导数的概念、基本公式和运算法则，并掌握隐函数求导方法和对数求导方法。
- 函数微分的概念及其在近似计算中的应用，了解拉格朗日中值定理的几何意义。
- 无穷级数的概念和级数收敛的必要条件，能用比较判别法和比值判别法等判定级数的敛散性，了解函数展开成泰勒级数的方法以及幂级数在近似计算中的应用。

2.1 集　　合

2.1.1 集合的概念

集合可以说是数学中最基本的一个概念，以集合概念为基础发展起来的集合论自 19 世纪以来，不仅为整个经典数学的各个分支提供了共同的理论基础，而且，作为一个重要的抽象数据类型，在现代计算机科学中，特别是在关系代数、数据结构、算法与程序设计中被广泛地应用。

集合是一个原始的概念，但这个概念对于大家来说并不陌生。人们常用“物以类聚，人以群分”来表达具有相同属性的群体，这其实就表达了集合的概念。通俗地讲，集合是具有某种属性的事物的全体，或者是一些确定对象的汇总。例如，全体中国人，天上的星星，银行中所有的储户账号，一个图书馆中所有的藏书以及会用 C 语言编写程序的人等，这些对象的汇总事实上都是集合。

某个集合的元素是指属于该集合的任何对象。为书写统一起见，本书约定用大写的英文字

母表示集合，小写英文字母表示集合的元素，用$\in$表示“属于”，$\notin$表示“不属于”，它们反映了集合元素对集合的隶属关系。例如，元素 a 属于集合 T 可表示为 $a\in T$，元素 b 不属于集合 T 记为 $b\notin T$。

需要特别注意的是，这里讲的集合属于朴素集合论的范畴，它具有确定性的特征，即一个元素对于给定的某个集合来说，要么属于这个集合，要么不属于这个集合，二者必居其一。因此，如果说“跑步跑得比较快的人”的全体，就不是这里所说的集合的概念，因为没有确定的标准来描述构成它的对象，即没有明确什么叫跑得比较快。像这类没有确定性特征的集合可以用模糊集的概念来描述，模糊集理论在计算机科学领域有着重要的应用，由于篇幅所限，本书就不作介绍了。

2.1.2 集合的表示

给定一个集合，最常见的描述方法是列举法和特征描述法（也称谓词法）。

（1）列举法

按照任意顺序列出集合的所有元素并用花括号{}括起来。如果元素有重复，则只列一次。

例 2.1.1 由 5 个元素 a、b、c、d、e 组成的集合 A，可以表示为：$A=\{a,b,c,d,e\}$。

例 2.1.2 由二元一次方程 $x^2-1=0$ 的根组成的集合 R，可以表示为 $R=\{-1,1\}$。

例 2.1.3 小于 10 的正整数集合，可表示为 $Z=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$。

如上述例子所示，用列举法表示一个集合时，通常要逐个列出集合的元素。当集合的元素很多时，这样做就显得十分烦琐。因此，为了简洁起见，在没有歧义的情况下，可以用延伸的方法和记号来表示集合中的大部分元素。例如小于 10 的正整数集合也可以表示为 $N=\{1,2,3,\cdots,9\}$，其中的 4，5，6，7，8 这 5 个元素按照元素 1，2，3 逐一递增的规则延伸而得，直至元素 9 为止。

需要注意的是，采用延伸的方法时，列举元素的顺序要有规律可循，否则会造成歧义。例如，如果记 $N=\{1,9,2,\cdots,3\}$，则无法确定该集合包含哪些元素。

列举法一般用于表示集合元素为有限多个的情形。对于含有无穷多个元素的集合，在没有歧义的情况下，仍然可以用列举法并结合上述延伸的方法来表示含有无穷多个元素的集合。例如，全体正整数的集合 $I=\{1,2,3,\cdots\}$，某个实数 a 的非负整数次方构成的集合 $S=\{a,a^2,a^3,\cdots\}$。同样，为了避免二义性，列举元素要按照一定的顺序，以便确定延伸的规律。

列举法的优点是简明清楚，一般适合于表达仅包含有限个元素的有限集或在没有歧义的情况下含无限个可排列的元素的集合，但它有局限性。有一些集合是无法用列举法进行表示的，例如，由 0～1 之间的全体实数组成的集合，由于元素“太多”了，无法用延伸的办法按照一定的顺序列举出来。有的集合，即便是有限集也难以用列举法表示出来。例如，六元一次方程 $x^6+2x^5-7x^4+x^3-3x+1=0$ 的根构成的集合有 6 个根，但是，由于无法像二元一次方程那样用求根公式表示出根来，因此，该集合难以用列举法表示出来。此时，可以采用直接描述特征的方法刻画一个集合。这就是下面要介绍的描述特征法。

（2）描述特征法

用元素的特征来直接描述集合，并形式上表示为 $A=\{a|P(a)\}$，其中 a 为集合的任意一个元

素，$P(a)$为某个与 a 有关的规则或条件，更准确地说，$P(a)$是一个谓词，可以用谓词来概括元素的特征属性。在本书的第7章中，会专门进行讨论。描述特征法也叫做谓词法。

利用描述特征法，由 0～1 之间的全体实数组成的集合就可以直接记为 $R=\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$，而 $x^6+2x^5-7x^4+x^3-3x+1=0$ 的根构成的集合就可以表示为

$$R=\{x|x^6+2x^5-7x^4+x^3-3x+1=0\}$$

为表示方便起见，以后用符号“∧”表示“与”或“且”的含义，用“∨”表示“或”的含义。在第7章中，还会进一步介绍这方面的内容。

需要注意的是，集合仅由它们所含有的不同的元素所决定，与元素出现的顺序或次数无关，例如

$$\{a,b,c,d,e\}$$

$$\{b,c,a,e,d\}$$

$$\{a,a,b,b,b,c,d,d,e\}$$

就是同样的集合。

但是，在实际应用中有时会用到元素可以多次出现的集合，这种集合称作多重集。在多重集中某元素出现的次数叫做该元素的重复数。在表示一个多重集时，应表明元素的重复数，例如把

$$\{a,a,b,b,b,c,d,d,e\}$$

看作多重集，则可以记做

$$\{2\cdot a,3\cdot b,1\cdot c,2\cdot d,1\cdot e\}$$

其中，2、3、1、2和1分别是 a、b、c、d 和 e 的重复数。

给定多重集

$$S=\{\lambda_1\cdot x_1, \lambda_2\cdot x_2,\cdots, \lambda_n\cdot x_n\}$$

对于元素 x_i，重复数的值可以是某个正整数，也可以是0或∞，如果$\lambda_i=0$，则认为元素 $x_i\notin S$；如果$\lambda_i=\infty$，则认为 S 中有无穷多个 x_i。容易看出，一般集合就是 x_i 只能取0或1的多重集。在本书中如果没有特别说明，所指集合均为一般集合，不是多重集。在本书的第8章中，将用到多重集的概念。

2.1.3 集合的包含与相等关系

一个集合可以有不同的表示方法，因此，形式上不一样的两个集合有可能是同一个集合。那么，如何判断两个集合是否相等，以及集合之间能否像实数那样区分出大小呢？为此，需要引入集合的包含和相等的概念。

定义 2.1.1 设 A, B 是两个集合，如果 A 的每一个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记为 $A\subseteq B$，也可称 B 包含 A，记为 $B\supseteq A$。

定义 2.1.2 设 A, B 是两个集合，如果 $A\subseteq B$，而且，至少存在一个元素 $x\in B$，但 $x\notin A$，则称 A 是 B 的真子集，记为 $A\subsetneqq B$。

定义 2.1.3 设 A, B 是两个集合，如果它们相互包含，即 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记做 $A=B$。如果 A 与 B 不相等，则记做 $A\neq B$。

定义 2.1.3 实际上提供了一种判断两个集合相等的方法。即要说明两个集合相等，只要说明它们互相包含。

例 2.1.4　给定集合 $A=\{x|x\leqslant 10\wedge x$ 是素数$\}$，$B=\{2,3,5\}$，试判断它们之间是否存在包含或相等的关系。

解　集合 A 是用特征描述法表示，而集合 B 则是用列举法表示。根据特征描述法可知，$A=\{2,3,5,7\}$。因为列举法比较直观，因此，先判断 B 中的元素是否属于 A。因为 2、3 和 5 这 3 个数都是小于 10 的素数，即对 B 中的任何一个元素 x，都有 $x\in A$，故 $B\subseteq A$，即 B 是 A 的子集。另一方面，因为 A 中有一个元素 7 不属于 B，因此，B 是 A 的真子集，即 $B\subsetneqq A$。

例 2.1.5　考虑如下两个集合

$$A=\{x|x\leqslant 10\wedge x\text{ 是素数}\},\ B=\{x|x^4-17x^3+101x^2-247x+210=0\}$$

试判断它们之间是否存在包含或相等的关系。

解　两个集合采用的都是用特征描述法表示的。本例的集合 A 就是例 2.14 中的集合 A，有 $A=\{2,3,5,7\}$，容易验证，A 中的 4 个元素都满足方程 $x^4-17x^3+101x^2-247x+210=0$，因此 $A\subseteq B$；另一方面，因为一元 4 次多项式方程有且仅有 4 个根，即 2、3、5 和 7 分别是该方程的根，故也有 $B\subseteq A$，由定义 2.1.3，$A=B$。

下面介绍一个特殊的集合。

定义 2.1.4　如果一个集合不包含任何元素，则称该集合为空集，记做$\varnothing$。

例如，集合 $A=\{x|x$ 是实数$\wedge x^2+1=0\}$就是空集。因为方程 $x^2+1=0$ 没有实数解，因此，该集合不含任何元素。再如，集合 $A=\{x|x<0$ 且 $x>1\}$也是一个空集。

性质 2.1.1　空集是一切集合的子集。换句话说，空集包含于任何集合。

定义 2.1.5　在一个具体问题中，如果所涉及的集合都是某个集合的子集，则称这个集合为全集，记做 U。

全集是一个相对的概念，它依赖于所研究的问题。问题不同，对应的全集也不同。例如，在实数集合中，如果关心的只是有理数，则全集可以是有理数集合；如果只研究整数，则全集就可以取整数集合，当然，也可以把有理数当作全集。

2.1.4　集合的运算

实数之间有加、减、乘、除和幂等基本运算，并且满足一定的运算规律。类似地，集合与集合之间也可以定义一些基本运算（如并、交、补和幂等）并且满足相应的一些运算规律，如交换律、分配律等。给定若干集合，可以利用集合的并、交、补和幂等运算来产生一系列新的集合。

定义 2.1.6　设 A, B 是两个集合，则它们的并集 $A\cup B$、交 集 $A\cap B$、相对补集 $A\backslash B$ 分别为

$$A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$$

$$A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$$

$$A\backslash B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$$

换句话说，$A\cup B$ 由 A 和 B 中的元素构成，$A\cap B$ 由 A 和 B 中的公共元素构成，$A\backslash B$ 由属于 A 但不属于 B 的元素构成。例如

$$A=\{a,b,c,d\},B=\{a,c,e,f\}$$