高等学校规划教材·电子、通信与自动控制技术

PROGRAMMING TEXTBOOKS FOR HIGHER EDUCATION

# 信号检测与估值

梁红　张效民　编

西北工業大學出版社

高等学校规划教材·电子、通信与自动控制技术

# 信号检测与估值

梁　红　张效民　编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本教材是作者根据教学大纲要求，在总结多年教学经验，吸取多年从事水声信号处理的科研成果，以及参考国内外文献资料的基础上编写的。全书共6章，主要介绍信号检测和信号参量估计的基本理论和应用，可为今后从事通信、雷达、声呐、鱼水雷等信号处理专业的学生打下扎实的理论基础；同时，信号检测和估计理论的基本概念、基本理论和分析问题的基本方法也可为解决实际信号处理系统设计等问题打下良好的基础。

本书可供信号与信息处理、通信与信息系统等电子类学科的高年级本科生和研究生作为教材使用，也可供雷达、声呐、通信等相关专业的科研、工程技术人员参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

信号检测与估值/梁红，张效民编．—西安：西北工业大学出版社，2011.2
ISBN 978-7-5612-3005-3

Ⅰ.①信… Ⅱ.①梁… ②张… Ⅲ.①信号检测②电信号特性测量 Ⅳ.①TN911

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 018503 号

**出版发行**：西北工业大学出版社
**通信地址**：西安市友谊西路 127 号 **邮编**：710072
**电　　话**：(029)88493844 88491757
**网　　址**：www.nwpup.com
**印 刷 者**：陕西宝石兰印务有限责任公司
**开　　本**：787 mm×1 092 mm 1/16
**印　　张**：13
**字　　数**：310 千字
**版　　次**：2011 年 2 月第 1 版 2011 年 2 月第 1 次印刷
**定　　价**：28.00 元

# 前　　言

本教材是作者在为西北工业大学电子与通信工程专业高年级本科生讲授“信号检测与估计”课程以及为航海学院研究生讲授“现代信号检测技术”课程所选用教材的基础上，同时，根据教学大纲要求，总结多年教学经验，吸取多年从事水声信号处理的科研成果，以及参考国内外文献资料的基础上编写的。

本书共6章。第一章概述了信号检测与估计的基本概念，给出了本书的内容安排。第二章简要介绍了随机过程及其统计描述和主要统计特性，几种常用的概率密度函数和白噪声及有色噪声的概念。第三章论述了信号统计检测的基本概念和判决准则。第四章在研究了匹配滤波器理论和性质的预备知识后，详细讨论了确知信号和参量信号情形下接收机的结构和性能，并讨论了高斯白噪声中随机信号检测原理。第五章重点讨论了信号参量的统计估计理论，包括估计量的性质及常用估计方法，简要讨论了多参量的同时估计问题。第六章是信号波形的估计问题，重点讨论了连续、离散维纳滤波器的设计，离散卡尔曼滤波的信号模型、递推计算方法和性质。

本书在阐述方式上注重基本概念和基本方法，附有大量例题和习题，以便加深学生对基本理论的理解，掌握实际应用的方法。在学习本课程之前，学生应具有概率论与数理统计、线性代数、信号与系统、数字信号处理等方面的知识。

本书第二章和第三章由张效民编写，其余各章由梁红编写。全书由梁红统稿。

本书在编写过程中，得到了西北工业大学航海学院同事的大力支持，在此表示衷心的感谢，并向所有参考文献的作者表示诚挚的谢意！

由于水平有限，书中难免存在缺点和不足之处，欢迎读者批评指正。

编　者

2010年9月

# 目　录

# 第一章 引 言

## 1.1 信号检测与估计理论的研究对象和处理方法

信号检测与估计理论是现代信息理论的一个重要分支，是以概率论与数理统计为工具，综合系统理论与通信工程的一门学科。它为通信、雷达、声呐、自动控制等技术领域提供理论基础。此外，它在模式识别、射电天文学、雷达天文学、地震学、生物物理学以及生物医学等领域里，也获得了广泛的应用。

众所周知，通信、雷达、自动控制系统等都是当代重要的信息传输和处理系统。在这些信息系统中，信息通常是以某种信号形式表示的，代表一种信息的信号在发射系统中产生后，一般要通过发射设备处理，再经信道进行传输；在接收系统中，对接收到的信号进行必要的处理，最终提供便于应用的接收信息。对信息系统的性能要求有两个方面，一是要求系统能高效率地传输信息，即单位时间内传输尽可能多的信息，其主要取决于信号的波形设计和频率选择，这就是系统的有效性；二是要求系统能可靠地传输信息，减小信号波形的失真度，这就是系统的可靠性或抗干扰性。

使系统信息可靠性降低的主要原因有：信号本身的不理想、不可避免的外部干扰和内部噪声的影响以及传输过程中携带信息的有用信号的畸变。例如，根据电子信息系统的要求，设计的信号与系统实际所形成的信号之间会有一定的误差，如信号频谱的纯度、相位噪声的大小、脉冲信号的宽度、顶部平坦度、前后沿时间及它们的稳定性、线性调频信号的线性度等方面的误差。相对于理想信号，这种误差可以看做是对信号的一种干扰分量。信号在信道传输过程中，会产生随机衰落，例如电磁波在经过大气层或电离层时，由于吸收系数或反射系数的随机性，必然会对信号的幅度、频率和相位等产生随机的影响，使信号发生畸变（失真）。大气层、电离层、宇宙空间等各种自然界的电磁过程，加上各种电气设备、无线电台、电视台、通信系统产生的电磁波，地面物体等固定杂波、气象等运动杂波和人为干扰等诸多因素，它们的频谱可能比较复杂，有的还可能较宽，这样，其中部分分量就有可能进入系统，形成对信号的外界干扰；电子信息系统本身的电源、各种电子元器件产生的热噪声、系统特性误差、正交双通道信号处理中正交变换时的幅度不一致性和相位不正交性、多通道之间的不平衡性、A/D 转换器的量化噪声、运算中的有限字长效应等，形成对信号的内部干扰。

电子信息系统中信号所受到的各种干扰均具有随机特性，以后一般将其统称为噪声，用 $n(t)$ 表示，它是一随机过程。噪声 $n(t)$ 大致上可以分为两类：一类属于加性噪声，它们与信号混叠，对信号产生“污染”；另一类属于乘性噪声，它们对信号进行调制。因为在实际系统中，加性噪声是最常遇到的，也是一种最基本的干扰模型，所以在本书中将考虑加性噪声的情况。

在电子信息系统中，信号一般可分为两类：确知信号和随机参量信号。所谓确知信号，是指可以用一个确定的时间函数来表示的信号，用 $s(t)(0 \leqslant t \leqslant T)$ 表示；而随机参量信号虽然

一般地也可以表示为时间的函数，但信号中含有一个或一个以上的参量是随机的，用 $s(t;\boldsymbol{\theta})$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ 表示，其中 $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_M)^{\mathrm{T}}$，表示信号中含有 $M$ 个随机参量。因为噪声 $n(t)$ 是具有随机特性的随机过程，所以即使信号是确知信号 $s(t)(0 \leqslant t \leqslant T)$，待处理的信号 $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ 也是具有随机特性的随机信号，何况实际上信号往往是含有随机参量的信号 $s(t;\boldsymbol{\theta})(0 \leqslant t \leqslant T)$。这就是说，要处理的信号 $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ 是随机信号，而且在实际中还是信噪比较低的信号。有时也把 $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ 称为接收信号或观测信号。

因为待处理的信号 $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ 是随机信号，具有统计特性，所以对信号进行的各种处理，应从信号和噪声的统计特性出发，于是统计学便成为信号处理学科的有力数学工具。将统计学的理论和方法应用于随机信号的处理，主要体现在以下三个方面。

(1) 对信号的随机特性进行统计描述，即用概率密度函数(PDF，Probability Density Function)、各阶矩、相关函数、协方差函数、功率谱密度(PSD，Power Spectrum Density) 等来描述随机信号的统计特性。

(2) 基于随机信号统计特性所进行的各种处理和选择的相应准则均是在统计意义上进行的，并且是最佳的，如信号状态的统计判决、信号参量的最佳估计、均方误差最小准则下信号的线性滤波等。

(3) 处理结果的评价，即性能用相应的统计平均量来度量，如判决概率、平均代价、平均错误概率、均值、方差、均方误差等。

信号检测与估计理论是人们在长期实践过程中逐步形成和发展起来的。它的基本任务是研究如何在干扰和噪声的影响下最有效地辨认出有用信号的存在与否，以及估计出未知的信号参量或信号波形本身。它实质上是有意识地利用信号与噪声的统计特性的不同，来尽可能地抑制噪声，从而最有效地提取有用信号的信息。

统计信号处理的理论研究日渐深入，应用领域不断扩大。在用统计方法进行信号处理时，其基本原理和方法是相同的，所共同需要的主要理论基础是信号的统计检测理论、统计估计理论和滤波理论。信号检测与估计理论又称为信号检测的统计理论，其数学基础是统计学中的判决理论和估计理论。从统计学的观点看，可以把从噪声干扰中提取有用信号的过程看做是一个统计推断过程，即用统计推断方法，根据接收到的信号加噪声的混合波形来作出信号存在与否的判断，以及关于信号参量或信号波形的估计。检测信号是否存在用的是统计判决理论，也叫假设检验理论。二元假设检验是对原假设 $H_0$(代表信号不存在) 和备选假设 $H_1$(代表信号存在) 所进行的二择一检验，检验要依据一定的最佳准则来进行。估计信号的未知参量用的是统计估计理论，即根据接收混合波形的一组观测样本，构造待估计参数的最佳估计量。由于观测样本是多维随机变量，由它们构成的估计量本身也是一个随机变量，其好坏要用其取值在参量真值附近的密集程度来衡量。因此参量估计问题可以通俗地说成是：如何利用观测样本来得到具有最大密集的估计。此外，估计信号波形则属于滤波理论，即维纳和卡尔曼的线性滤波理论以及后来发展的非线性滤波理论。这样，信号检测与估计理论按其基本内容来看，包括三个方面：信号的检测、参量的估计和波形的估计(或称复现、提取、过滤)。信号的检测指的是检验信号存在与否的一种狭义的检测；参量估计指的是对信号所包含的连续消息(在观测期间是恒定值) 进行的估计(或测量)，所关心的不是信号本身，而是信号所载的消息；波形估计是指在最小均方误差意义下，对信号或者解调后的消息波形(在观测期间是时间函数 $x(t)$) 进行的估计，所关心的是整个信号或消息波形本身。

上面提到的三方面内容，相互之间有着密切的联系，不可截然分开。信号的检测与参量的估计有时是同时进行的。例如$M$元假设检验问题，是对原假设$H_0$（代表信号不存在）和$M-1$个互不相容的备选假设$H_1, H_2, \cdots, H_{M-1}$（代表信号参量的$M-1$个可能取值）所进行的$M$择一检验，此时，信号参量的估计就看成了$M$元信号的检测问题。信号参量的估计又可看做是波形估计的特例。如果信号的参量是随时间变化的，则在信号参量估计概念和方法的基础上，结合信号的运动规律和噪声的动态统计特性，可以实现信号的波形估计或信号的动态状态估计。

随着通信、雷达、自动控制等技术领域的蓬勃发展，利用信号检测与估计理论对信号检测系统进行统计分析与综合已取得长足的发展，信号检测与估计理论已成为分析和综合最佳检测系统的理论基础。具体说来，它包括以下几个研究课题：

(1) 确定和论证适用于信号检测系统的最佳准则，既要反映给定的实际条件，提出理想化模型，又要便于简化最佳检测系统的结构和性能分析。

(2) 从理论上求解符合所选用的最佳准则的最佳检测系统的结构，分析其性能，研究性能随某些因素的变化情况。

(3) 将实际使用的检测系统与理论上最佳系统进行比较，找出二者的性能差距，从而明确实际系统尚待挖掘的潜力，指出提高性能的方向，寻求易于实现的准最佳信号检测系统。

(4) 比较在不同的信号与噪声统计特性下各种最佳检测器的结构和性能，明确信号与噪声统计特性对最佳检测系统结构和性能的影响。

信号检测与估计理论是现代信息理论的一个分支，研究的对象是信息传输系统中信号的接收部分。现代信息理论的其他分支还有仙农信息论、编码理论、信号理论、噪声理论、调制理论、保密学等。

## 1.2 信号的检测与估计理论概述

现代检测和估计理论是用于判决和信息提取的电子信号处理系统设计的基础。这些系统包括：雷达、通信、语音、声呐、图像处理、生物医学、控制、地震学等。它们都有一个相同的目标，就是要能够确定感兴趣的事件在什么时候发生，然后就是要估计一组参数的值，即检测和估计理论。为了说明检测和估计理论在信号处理中的应用，下面简单描述一下雷达和声呐系统。

雷达系统中，感兴趣的是确定是否有飞机正在靠近。为了完成这一任务，发射一个电磁脉冲，如果这个脉冲被大的运动目标反射，那么就显示有飞机出现。如果有一架飞机出现，那么接收波形将由反射的脉冲（在某个时间之后）和周围的辐射以及接收机内的电子噪声组成。如果飞机没有出现，那么就只有噪声。信号处理器的功能就是要确定接收到的波形中只有噪声（没有飞机）还是噪声中含有回波（飞机出现）。图 1.2.1(a) 描绘了一个雷达，图 1.2.1(b) 和图 1.2.1(c) 画出了两种可能情形的接收波形。当回波出现的时候，接收到的波形与发射波形有些不同，但差别不是很大。这是因为接收到的回波由于传播损耗而被衰减，以及由于多次反射的相互作用而产生了失真。当然，如果检测到飞机，那么感兴趣的是要确定飞机的方位、距离、速度等。因此检测是信号处理系统的第一个任务，而第二个任务就是信息的提取。在此感兴趣的是确定飞机的位置。为了确定距离$R$，考虑到电磁脉冲在遇到飞机时会产生反射，继

而由天线接收的回波将会引起$\tau_0$的延迟，如图1.2.1(c)所示。这样距离可由方程$\tau_0=2R/c$确定，其中$c$是电磁传播速度。由于传播损耗，接收回波在幅度上有一定衰减，因而有可能受到环境噪声的影响而变得模糊不清，回波到达时间也可能受到接收机电子器件引入的时延的干扰。

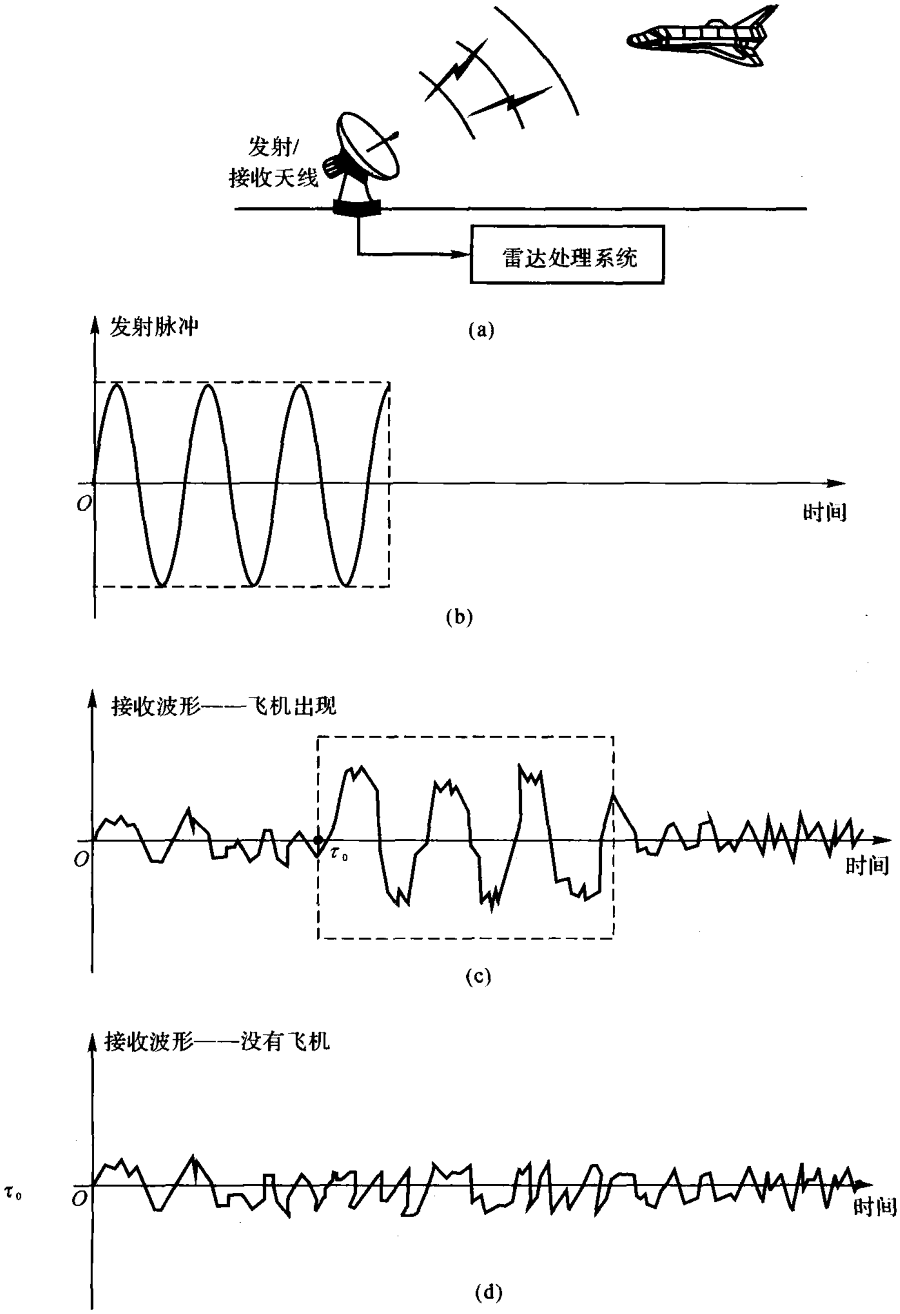
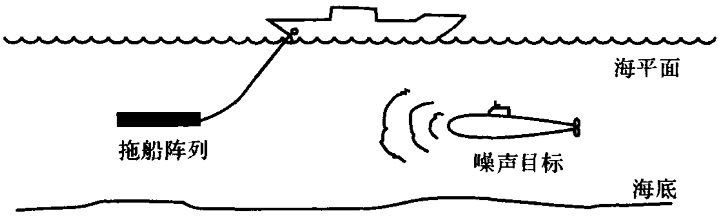


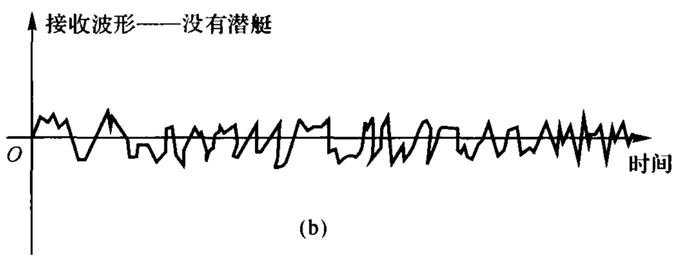

图 1.2.1　雷达系统

(a) 雷达；(b) 发射脉冲；(c) 有目标时的回波；(d) 无目标时的回波

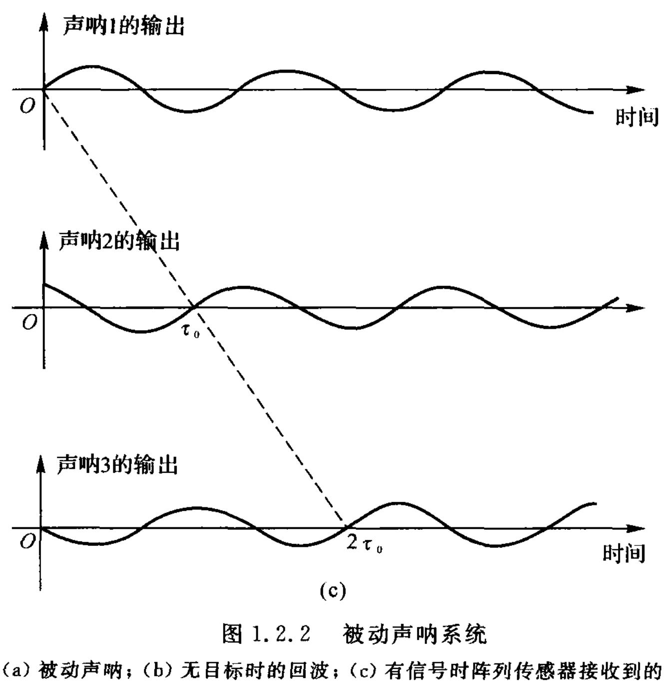
另一种常见的应用是声呐，感兴趣的也是目标是否出现及确定目标的位置，例如确定潜艇的方位。图 1.2.2(a) 显示了一个典型的被动声呐，由于目标船上的机器和螺旋桨的转动等原因，该目标将辐射出噪声，这种噪声实际上就是所关注的信号。该信号在水中传播，并由传感器阵接收，然后这些传感器的输出将发射到一个拖船上输入到计算机。接收到的信号有两种可能情形的接收波形，如图 1.2.2(b) 和图 1.2.2(c) 所示。对于有目标的情形，传感器之间获得信号的时延与目标信号的到达角有关，通过测量两个传感器之间的时延 $\tau_0$，由表达式 $\beta = \arccos(c\tau_0/d)$ 可以确定方位角 $\beta$，其中 $c$ 是水中的声速，$d$ 是传感器之间的距离。然而，由于接收到的波形淹没在噪声中，因此接收到的波形并没有图 1.2.2(c) 清晰，$\tau_0$ 的确定将很困难，$\beta$ 值仅仅是一个估值。




(a)




(b)




(c)

图 1.2.2 被动声呐系统

(a) 被动声呐；(b) 无目标时的回波；(c) 有信号时阵列传感器接收到的信号

在这些系统中，涉及根据连续波形做出判决和提取参数值的问题。现代信号处理系统使用数字计算机对一个连续的波形进行采样，并存储采样值。这样检测问题就等效成一个根据离散时间波形或数据集做出判决的问题。从数学上讲，有 $N$ 点可用的数据集$\{x[1],x[2],\cdots,x[N]\}$，首先形成一个数据函数 $T(x[1],x[2],\cdots,x[N])$ 的值来做出判决。确定函数 $T$，把它映射成一个判决是统计检测理论的中心问题，进而再将离散数据的判决问题扩展到连续情况，这将在本书第三、四章中讨论。而参量估计问题等价于根据离散时间波形或数据提取参数的问题，因为数据集与未知参数 $\theta$ 有关，可以根据数据集来确定 $\theta$ 或定义估计量 $\hat{\theta}=g(x[1],x[2],\cdots,x[N])$，其中 $g$ 是某个函数，它根据所采用的最佳准则确定，这是本书第五章中将要讨论的参量估计问题。

## 1.3 内容编排

随机信号处理应采用统计信号处理的概念、理论和方法，其理论基础是信号的统计检测、参量的统计估计和信号波形的滤波，主要内容包括最佳处理的概念和理论，最佳处理的实现和性能分析与评估。为了便于学习、理解和掌握这些基础理论，本书除第一章概论外，由 3 部分组成。

第一部分(第二章）重点讨论了随机过程的统计描述和时域、频域的主要统计特性，属于对随机过程内容的扼要复习，简要介绍了几种常见的概率密度函数。这部分的内容为后面各章节打下了数学基础。

第二部分(第三、四章）重点讨论了信号的统计检测理论和技术，包括各种最佳判决准则、检测系统的结构、检测性能的分析等内容。

第三部分(第五、六章）主要讨论了信号的最佳估计理论和算法，包括最佳估计准则，估计量的构造和主要性质，信号波形估计的概念、准则，维纳(Wiener) 滤波和卡尔曼(Kalman) 滤波算法等内容。

# 第二章　信号检测与估计理论的基础知识

在第一章中已经指出，待处理的信号是一个随机信号。随机信号的基本特点是：虽然随机信号是以不可预见的方式实时产生的，但它的统计特性通常却显得很有规律。这就提供了用其统计特性而不是一些确定性的方程来描述随机信号的依据。当处理这些随机信号时，主要的目标是建立它们的信号模型，对其进行统计描述，研究其统计平均量之间的关系，以及这些统计特性在理论研究和实际应用中的作用。

既然随机信号的统计特性是有规律的，那么这些特性就能够用数学的方法加以描述。这样就把随机过程作为随机信号的数学模型，而随机信号可以用概率论与数理统计和随机过程等数学工具进行统计描述，然后用统计学的方法来处理随机信号。这样做，至少在原理上可以研究和发展理论上的最佳信号处理方法，并将其用于评价这些处理方法的性能，进而研究最佳随机信号处理方法的实际应用。

本章将重点讨论作为信号检测与估计理论基础知识的随机过程的主要统计特性和几种重要的概率密度函数，这些内容对于后面章节的讨论是非常有用的。

## 2.1　条件概率与贝叶斯公式

随机变量是指这样的量，它在每次试验中预先不知取什么值，但知道以怎样的概率取值。对于某一次试验结果，随机变量取样本空间中一个确定的值。

为了研究离散随机变量 $X$ 的统计特性，必须知道 $X$ 所有可能取的值，以及取每个可能值的概率。概率表示随机变量 $X$ 取某个值（如 $x$）可能性的大小，用 $P(x)$ 表示。

$$P(x)=P(X=x) \tag{2.1.1}$$

若用 $F(x)$ 表示随机变量 $X$ 取值不超过 $x$ 的概率，则称 $F(x)$ 为 $X$ 的概率分布函数。

$$F(x)=P(X\leqslant x) \tag{2.1.2}$$

由于连续随机变量可能取的值不能一一列出，其分布函数表示取值落在某一区间的概率，常用概率密度函数 $p(x)$ 描述其统计特性。概率密度函数和概率分布函数的关系为

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}p(x)\mathrm{d}x \tag{2.1.3}$$

$$p(x)=\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \tag{2.1.4}$$

两个随机变量 $X$ 和 $Y$ 可以是独立的（彼此毫无影响），也可以是不独立的。两个随机变量相互依赖的程度用条件概率密度函数来表示，若用 $p(x,y)$ 表示 $X$ 和 $Y$ 的联合概率密度函数，则由贝叶斯公式得

$$p(x,y)=p(x\,|\,y)p(y)=p(y\,|\,x)p(x) \tag{2.1.5}$$

如果 $X$ 和 $Y$ 彼此没有影响，则

$$p(x \mid y) = p(x) \tag{2.1.6}$$

$$p(y \mid x) = p(y) \tag{2.1.7}$$

其联合概率密度函数等于边缘（单独）概率密度函数的乘积，即

$$p(x,y) = p(x)p(y) \tag{2.1.8}$$

则称 $X$ 和 $Y$ 彼此独立。

贝叶斯公式也称为逆概率公式，常用于已知先验概率密度函数求后验概率密度函数。

例如，在某一时间内，测得观测值是信号与噪声之和，即

$$x = s + n$$

$s$ 和 $n$ 相互独立，且 $s$ 和 $n$ 的先验概率密度函数是已知的，即给定了 $p(s)$ 和 $p(n)$，要求出当观测值 $x$ 给定时 $s$ 的条件概率密度函数 $p(s \mid x)$。

由式(2.1.5)可得

$$p(s \mid x) = \frac{p(x \mid s)p(s)}{p(x)} = \frac{p(x \mid s)p(s)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x \mid s)p(s)\mathrm{d}s} \tag{2.1.9}$$

其中，$p(x \mid s)$ 是 $s$ 给定时 $x$ 的条件概率密度函数。信号给定时，观测值 $x$ 的随机特性是由噪声的分布规律 $p(n)$ 来决定的。

## 2.2 随机过程及其统计描述

随机信号的数学模型是随机过程。为了研究随机信号的处理，有必要对随机过程的基本概念、统计描述、统计特性等进行讨论，以便为后面各章节的论述打下基础。

应当指出，这里仅限于讨论连续随机过程，并且主要是实随机过程。

### 2.2.1 随机过程的基本概念

如果所研究的对象具有随时间演变的随机现象，对其全过程进行一次观测得到的结果是时间 $t$ 的函数，但对其变化过程独立地重复进行多次观测，则所得到的结果仍是时间 $t$ 的函数，而且每次观测之前不能预知所得结果，这样的过程就是一个随机过程。

类似于随机变量的定义，可给出随机过程的定义：设 $E$ 是随机试验，它的样本空间 $S = \{\zeta\}$，若对于每个 $\zeta \in S$，总有一个确知的时间函数 $x(t,\zeta)$，$t \in T$ 与它相对应，这样对于所有的 $\zeta \in S$，就可得到一族时间 $t$ 的函数，称为随机过程。通常为了简便，书写时省去符号 $\zeta$，而将随机过程记为 $X(t)$。族中的每一个函数称为这个随机过程的样本函数。

对于一个特定的试验结果 $\zeta_i$，则 $x(t,\zeta_i)$ 是一个确知的时间函数，记为 $x_1(t)$，$x_2(t)$，…，称为样本空间中的一族样本函数。对于一个特定的时间 $t$，$x(t_i,\zeta)$ 取决于 $\zeta$，是个随机变量，记为 $X(t_1)$，$X(t_2)$，…。根据随机过程的定义，可以用如图 2.2.1 所示的图形来描述一个连续的随机过程。

研究一族随机变量 $X(t_1)$，$X(t_2)$，… 的统计平均特性称为集平均，而研究某一样本函数的统计平均特性称为时间平均。

### 2.2.2 随机过程的统计描述

为了便于分析和处理，需要获得关于随机过程数学上的统计描述，通常用有限维概率密度

函数来描述随机过程。

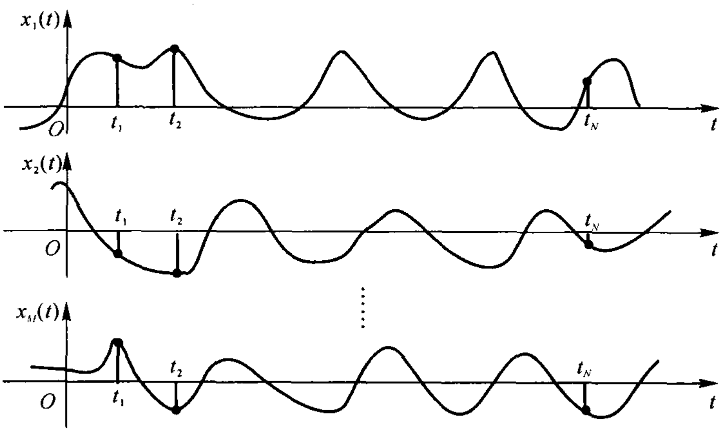



图 2.2.1　连续随机过程的 $M$ 个样本函数图形

设随机过程为 $X(t)$，在 $t_1$ 时刻观测可得到一组随机变量，用 $X(t_1)$ 表示，$X(t_1)$ 的幅度落在小于或等于某一幅值 $x_1$ 范围内的概率

$$F(x_1;t_1)=P\{X(t_1)\leqslant x_1\} \tag{2.2.1}$$

式(2.2.1)称为 $X(t)$ 的一维累积分布函数。如果 $F(x_1,t_1)$ 对 $x_1$ 的一阶导数存在，则有

$$p(x_1;t_1)=\frac{\mathrm{d}F(x_1;t_1)}{\mathrm{d}x_1} \tag{2.2.2}$$

$p(x_1;t_1)$ 称为随机过程 $X(t)$ 的一维概率密度函数。

为了反映不同时刻 $X(t)$ 的幅度分布，可以在 $t_1,t_2$ 两个时刻得到两组随机变量 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$，其二维累积分布函数定义为

$$F(x_1,x_2;t_1,t_2)=P\{X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2\} \tag{2.2.3}$$

如果 $F(x_1,x_2;t_1,t_2)$ 对 $x_1,x_2$ 的二阶混合偏导存在，则有

$$p(x_1,x_2;t_1,t_2)=\frac{\partial^2 F(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_1\partial x_2} \tag{2.2.4}$$

式(2.2.4)称为随机过程的二维联合概率密度函数。

要完整地反映随机过程 $X(t)$ 的统计特性，应按式(2.2.4)方法继续取下去，就可以得到 $X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_N)$ 的 $N$ 维累积分布函数和 $N$ 维联合概率密度函数。

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_N;t_1,t_2,\cdots,t_N)=P\{X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2,\cdots,X(t_N)\leqslant x_N\} \tag{2.2.5}$$

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_N;t_1,t_2,\cdots,t_N)=\frac{\partial^N F(x_1,x_2,\cdots,x_N;t_1,t_2,\cdots,t_N)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_N} \tag{2.2.6}$$

式(2.2.6)称为随机过程的 $N$ 维联合概率密度函数。

一个随机过程 $X(t)$，如果对于任意的 $N\geqslant 1$ 和所有时刻 $t_k(k=1,2,\cdots,N)$ 都已知其 $N$ 维联合概率密度函数 $p(x_1,x_2,\cdots,x_N;t_1,t_2,\cdots,t_N)$，那么这一随机过程就在统计意义上得到了完整的数学描述。实际应用中，$N$ 总是有限的。对于有限的 $N$，有如下结论：把随机过程 $X(t)$ 的一维，二维，…，$N$ 维累积分布函数的全体称为随机过程的有限维累积分布函数族。由于随机过程的有限维累积分布函数族具有对称性和相容性，所以它是随机过程统计特性的完整描述，从而与其对应的有限维联合概率密度函数族能够从数学上完整地描述随机过程的统计