各版本适用

立足高考大纲　探究知识内涵
解读奥赛真题　揭示思维规律
点击高考难题　登上名校殿堂

第6版

高考·奥赛对接辅导

高中数学 1

主编　蔡　晔

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高考·奥赛对接辅导

高中数学 1

第 6 版

主　编　蔡　晔

副主编　王青仁

编　者　刘　林　杨传彬　赵振红　王海奇

刘宗宝　薛志虎　李学镇　卢建涛

刘跃先　解玉红　牛本富　李成国

宋　曼　李国丽　汪　莉　李丽丽

机械工业出版社

本系列书以新课标人教版教材知识体系为主线，兼顾其他版本教材的知识体系，将整个高中阶段的内容按知识模块进行编排。每一章节中，既有对高中阶段所应掌握的重点知识的讲解归纳，又有对与内容相关的近几年各地具有代表性的高考真题、竞赛题的归类整理和解析；同时还针对以后高考的趋势和方向，设计用于学生自练自评的练习题。本书既可用于学生同步巩固复习与训练，也适用于高考的第一轮复习。

图书在版编目（CIP）数据

高考·奥赛对接辅导．高中数学 1/蔡晔主编．—6 版．—北京：机械工业出版社，2011.3

ISBN 978－7－111－33280－0

Ⅰ．①高… Ⅱ．①蔡… Ⅲ．①数学课－高中－升学参考资料 Ⅳ．①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 017053 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

策划编辑：马文涛　马小涵　胡　明　责任编辑：马文涛　刘　静

责任印制：李　妍

北京振兴源印务有限公司印刷

2011 年 4 月第 6 版·第 1 次印刷

148mm×210mm·11.625 印张·368 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-33280-0

定价：19.50 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：（010）88361066
销售一部：（010）68326294
销售二部：（010）88379649
读者购书热线：（010）88379203

网络服务
门户网：http：//www.cmpbook.com
教材网：http：//www.cmpedu.com

前　言

编写定位

编者精心编写的“高考·奥赛对接辅导”系列书立足教材、着眼高考、面向竞赛，融高考和竞赛于一体，期望为同学们提供最全面、最实用、最完备的高考常考知识点和竞赛解题方法。

本系列书内容的难度定位在中等偏上，以新课标、高考大纲中的重、难点及竞赛中的常考知识拓展点为基础，结合近年来经典的高考难题和典型的竞赛题，介绍解较难题目的方法，培养解决问题的能力，并通过练习题及时巩固，引导创新。

编写特点

1. 导向性　本书全面反映了近几年高考和竞赛的题型，详细介绍了的所有知识点以及解题技巧，体现出学科内不同知识板块间的综合联系，侧重考查学生的能力、素质，从而将未来高考和竞赛的趋势全面展现出来。

2. 新颖性　本书所选的例题是精心筛选的近几年的高考题和国际、国内竞赛题，内容新、题型新。大多数例题虽具一定难度，但难而不偏，具有代表性，且解题方法灵活。

本系列书自面世以来，得到了读者朋友的一致认可。本着与时俱进的原则和精益求精的态度，同时也为了答谢读者的厚爱，我们组织了一批有经验的专家和勇于创新的一线优秀青年教师，分析研究近年来全国各地、各类竞赛和高考的新变化，对原书内容进行了必要的修订和优化，期望能为同学们迎接升学考试和竞赛复习助一臂之力。

由于编写时间较紧，可能存在一些缺漏，敬请广大读者批评指正。

编　者

目　　录

必修 4

必修1

第1章 集合与函数概念

1.1 集合

考点对接

1. 常用数集

N 表示非负整数集(或自然数集);$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ 表示正整数集;**Z** 表示整数集;**Q** 表示有理数集;**R** 表示实数集.

以上几种常用数集关系如下:$\mathbf{N}^* \subsetneqq \mathbf{N} \subsetneqq \mathbf{Z} \subsetneqq \mathbf{Q} \subsetneqq \mathbf{R}$.

2. 集合的表示方法

集合常用的表示方法有三种:列举法,描述法,图示法.

列举法:把集合中的元素一一列举出来.

描述法:用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合. 例如,$\{x \in A \mid p(x)\}$表示在集合 A 中满足条件 $p(x)$的所有 x 组成的集合.

图示法:用一条封闭曲线的内部表示集合. 该图示又称作 Venn 图.

3. 集合中元素的特征

(1)确定性;(2)互异性;(3)无序性.

4. 集合间的关系

(1)子集:如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 叫做集合 B 的子集,记作 $A \subseteq B$(或 $B \supseteq A$),读作 A 包含于 B(或 B 包含 A);若 $A \subseteq B$,则有两种情形,$A \subsetneqq B$ 或 $A=B$.

(2)真子集:如果集合 A 是集合 B 的子集,且 B 中至少有一个元素不属于A,那么集合 A 叫做集合 B 的真子集,记作 $A \subsetneqq B$(或 $B \supsetneqq A$),读作 A 真包含于 B(或 B 真包含 A).

(3)集合相等:对于两个集合 A 与 B,若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,我们就说这两个集合相等,记作 $A=B$.

(4)性质:

①$A\subseteq A$;②$\varnothing\subseteq A$;$\varnothing\subsetneqq A(A\neq\varnothing)$;

③若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$;若 $A\subsetneqq B$ 且 $B\subsetneqq C$,则 $A\subsetneqq C$;

④若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则 $A=B$;⑤若 $A\subseteq B$,则 $A\cap B=A$,$A\cup B=B$.

(5)任意两个集合间的关系:$\begin{cases}A\nsubseteq B\\ A\subseteq B\begin{cases}A\subsetneqq B\\ A=B\end{cases}\end{cases}$.

5. 集合间的运算

(1)补集:设全集是 U,A 是 U 的一个子集,由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合叫做 U 中子集 A 的补集(或余集),记作$\complement_U A$,

即$\complement_U A=\{x|x\in U$ 且 $x\notin A\}$.

性质:$A\cup\complement_U A=U$;$A\cap\complement_U A=\varnothing$;$\complement_U(\complement_U A)=A$.

(2)交集:由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$,即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.

(3)并集:由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

(4)交集、并集常用性质:

①$A\cap A=A$,$A\cap\varnothing=\varnothing$,$A\cap B=B\cap A$;

②$A\cup A=A$,$A\cup\varnothing=A$,$A\cup B=B\cup A$;

③$A\cap\complement_U A=\varnothing$,$A\cup\complement_U A=U$,$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$;

④$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$,$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$;

⑤$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B$.

特别提示:集合的运算有交、并、差、补,由这些运算派生出的 11 条运算律(即运算的性质),即交换律、结合律、分配律、同一律、排中律、矛盾律、双重否定律、幂等律、零一律、吸收律、摩根律,更应该很好地掌握.

集合的运算有三个方面的问题:一是进行集合的运算,二是集合运算式的化简,三是集合恒等式的推理证明.

6. 有限集子集的数目

集合$\{a\}$的子集有 2 个:$\varnothing$,$\{a\}$;

集合$\{a_1,a_2\}$的子集有 2^2 个:$\varnothing$,$\{a_1\}$,$\{a_2\}$,$\{a_1,a_2\}$;

集合$\{a_1,a_2,a_3\}$的子集有 2^3 个:$\varnothing$,$\{a_1\}$,$\{a_2\}$,$\{a_3\}$,$\{a_1,a_2\}$,$\{a_2,a_3\}$,

$\{a_1,a_3\}$,$\{a_1,a_2,a_3\}$.

推广至一般,若一个集合有 n 个元素,其子集有 2^n 个,真子集有(2^n-1)个,非空子集有(2^n-1)个,非空真子集有(2^n-2)个.

7. 有限集元素的数目

若集合 A 是有限集,通常用“$|A|$”表示集合 A 中的元素个数.

8. 容斥原理

定理1 设 A、B 都是有限集,则 $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

定理2 设 A、B、C 都是有限集,则

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|.$$

推广至一般情形:

定理3 设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 都是有限集,则

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k|=\sum_{1\leqslant i\leqslant k}|A_i|-\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<t\leqslant k}|A_i\cap A_j\cap A_t|+\cdots+(-1)^{k-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k|.$$

定理4 设 A、B 都是 S 的子集,则 $|\complement_S A\cap\complement_S B|=|S|-|A|-|B|+|A\cap B|$.

定理5 设 A、B、C 都是 S 的子集,则 $|\complement_S A\cap\complement_S B\cap\complement_S C|=|S|-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|B\cap C|+|A\cap C|-|A\cap B\cap C|$.

推广至一般情形:

定理6 设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是集合 S 的 k 个子集,则

$$|\complement_S A_1\cap\complement_S A_2\cap\cdots\cap\complement_S A_k|=|S|-\sum_{1\leqslant i\leqslant k}|A_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\leqslant i<j<t\leqslant k}|A_i\cap A_j\cap A_t|+\cdots+(-1)^k|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k|.$$

思维对接

考点1 集合的概念

例1 (2008·江西)定义集合运算:$A*B=\{z\mid z=xy,x\in A,y\in B\}$.设 $A=\{1,2\}$,$B=\{0,2\}$,则集合 $A*B$ 的所有元素之和为 ( )

A. 0　　B. 2　　C. 3　　D. 6

【分析】 本题考查自定义的集合运算,关键是求出集合 $A*B$.

由题意知 $A*B=\{0,2,4\}$,故元素之和为 $0+2+4=6$.

【答案】 D

考点 2 集合与集合的关系

例 2 (2010·浙江)设 $P=\{x \mid x<4\}$,$Q=\{x \mid x^2<4\}$,则 ( )

A. $P\subseteq Q$　　B. $Q\subseteq P$　　C. $P\subseteq \complement_R Q$　　D. $Q\subseteq \complement_R P$

【分析】 $Q=\{x \mid -2<x<2\}$,可知 B 正确,本题主要考查了集合间的关系及集合的基本运算.

【答案】 B

考点 3 集合的运算

例 3 (2009·安徽)若集合 $A=\{x \mid |(2x-1)|<3\}$,$B=\left\{x \mid \frac{2x+1}{3-x}<0\right\}$,则 $A\cap B$ 是 ( )

A. $\left\{x \mid -1<x<-\frac{1}{2}\text{或 }2<x<3\right\}$　　B. $\{x \mid 2<x<3\}$

C. $\left\{x \mid -\frac{1}{2}<x<2\right\}$　　D. $\left\{x \mid -1<x<-\frac{1}{2}\right\}$

【分析】 集合 $A=\{x \mid -1<x<2\}$,$B=\left\{x \mid x<-\frac{1}{2}\text{或 }x>3\right\}$,

$\therefore A\cap B=\left\{x \mid -1<x<-\frac{1}{2}\right\}$,选 D.

【答案】 D

例 4 (2009·宁夏、海南)已知集合 $A=\{1,3,5,7,9\}$,$B=\{0,3,6,9,12\}$,则 $A\cap \complement_{\mathbf{N}} B=$ ( )

A. $\{1,5,7\}$　　B. $\{3,5,7\}$

C. $\{1,3,9\}$　　D. $\{1,2,3\}$

【分析】 由题意知 $\complement_{\mathbf{N}} B=\{1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,15,\cdots\}$,所以 $A\cap \complement_{\mathbf{N}} B=\{1,5,7\}$,故选 A.

【答案】 A

例 5 (2010·辽宁)已知 A,B 均为集合 $U=\{1,3,5,7,9\}$ 的子集,且 $A\cap B=\{3\}$,$(\complement_U B)\cap A=\{9\}$,则 $A=$ ( )

A. $\{1,3\}$　　B. $\{3,7,9\}$　　C. $\{3,5,9\}$　　D. $\{3,9\}$

【分析】 本题可根据交集和补集的定义求解,也可以通过 Venn 图数形

结合求解.

因为 $A\cap B=\{3\}$,所以 $3\in A$,又因为 $(\complement_U B)\cap A=\{9\}$,所以 $9\in A$,故选 D.

【答案】 D

考点 4　根据集合间的关系和集合的运算求参数

例 6 (2009 · 山东)集合 $A=\{0,2,a\}$,$B=\{1,a^2\}$. 若 $A\cup B=\{0,1,2,4,16\}$,则 a 的值为　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

【分析】 $A=\{0,2,a\}$,$B=\{1,a^2\}$,$\because A\cup B=\{0,1,2,4,16\}$,$\therefore \begin{cases}a^2=16\\a=4\end{cases}$,$\therefore a=4$,故选 D.

【答案】 D

例 7 (2007 · 北京)已知集合 $A=\{x\,|\,|x-a|\leqslant 1\}$,$B=\{x\,|\,x^2-5x+4\geqslant 0\}$. 若 $A\cap B=\varnothing$,则实数 a 的取值范围是________.

【分析】 先求解集合 A、B 中的不等式,然后在数轴上表示出集合 A、B,即可观察得解.

$|x-a|\leqslant 1\Rightarrow a-1\leqslant x\leqslant a+1$,$x^2-5x+4\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant 4$ 或 $x\leqslant 1$. 由图 1-1-1 可知 $\begin{cases}a-1>1\\a+1<4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>2\\a<3\end{cases}$,所以 $2<a<3$.

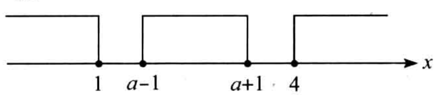

图 1-1-1

【答案】 (2,3)

方法总结

此类问题用"数形结合"法求解,直观简捷,但务必注意边界值的取舍.

例 8 (2007 · 全国 Ⅰ)设 $a,b\in\mathbf{R}$,集合 $\{1,a+b,a\}=\{0,\frac{b}{a},b\}$,则 $b-a=$　(　　)

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

【分析】 抓住特殊元素 0 和 1,问题将迎刃而解.

由 $\{1,a+b,a\}=\{0,\frac{b}{a},b\}$ 可知 $a\neq 0$,所以有 $a+b=0$.

即有以下对应关系：① $\begin{cases}a+b=0\\ \dfrac{b}{a}=a\\ b=1\end{cases}$ 或② $\begin{cases}a+b=0\\ b=a\\ \dfrac{b}{a}=1\end{cases}$，

解①得 $\begin{cases}a=-1\\ b=1\end{cases}$，符合题意；②无解. 所以 $b-a=2$，故选 C.

【答案】 C

例 9 已知 $A=\{x|10+3x-x^2\geqslant 0\}$，$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$.

(1) 求当 $A\cap B=\varnothing$ 时，m 的范围；

(2) 求当 $B\subseteq A$ 时，m 的范围.

【解】 由已知得 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$.

(1) 当 $B=\varnothing$ 时，$m+1>2m-1$，得 $m<2$；

当 $B\neq\varnothing$ 时，$\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1\\ m+1>5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1\\ 2m-1<-2\end{cases}$，得 $m>4$ 或 $m\in\varnothing$.

综上，m 的范围为 $(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$.

(2) 当 $B=\varnothing$ 时，得 $m<2$；

当 $B\neq\varnothing$ 时，$\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1\\ m+1\geqslant -2\\ 2m-1\leqslant 5\end{cases}$，得 $2\leqslant m\leqslant 3$.

综上，$m\in(-\infty,3]$.

考点 5 有限集元素的数目及有限集的子集

例 10 设 P,Q 为两个非空数集，定义集合 $P+Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$. 若 $P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，则 $P+Q$ 中元素的个数是 （　　）

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

【分析】 从 $P+Q$ 的元素形式入手，可以找到解题的突破口.

由题意知 a 的取值有 3 个，b 的取值有 3 个，所以 $a+b$ 有 9 种组合，其值分别为 1，2，6，3，4，8，6，7，11，根据集合中元素的互异性可得集合 $P+Q$ 中元素有 8 个，故选 B.

【答案】 B

方法总结

在元素数目不很多的情况下，列举法不失为一种好的选择.

例11 (2007·陕西)设集合 $S=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$，在 S 上定义运算 $\oplus$ 为：$A_i\oplus A_j=A_k$，其中 k 为 $i+j$ 被 4 除的余数，$i,j=0,1,2,3$. 则满足关系式 $(x\oplus x)\oplus A_2=A_0$ 的 $x(x\in S)$ 的个数为 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【分析】 因为 $(x\oplus x)\oplus A_2=A_0$，设 $x\oplus x=A_k$，所以 $A_k\oplus A_2=A_0$，$k=2$. 即 $x\oplus x=A_2$，故 $x=A_1$ 或 A_3，故选 B.

【答案】 B

奥赛对接

例1 已知集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R}\}$ 至多只有一个真子集，求 a 的取值范围.

【分析】 至多只有一个真子集的集合有两种情况，一是无真子集，二是有一个真子集，因此要注意分类讨论.

【解】 ∵集合至多只有一个真子集，则集合 A 可能无真子集，可能有一个真子集，故分两种情况.

(1)当 A 无真子集时 $A=\varnothing$，故关于 x 的方程 $ax^2+2x+1=0$ 无实根.

$\therefore a\neq0$，且 $\Delta=4-4a<0$，$\therefore a>1$.

(2)当 A 只有一个真子集时，A 为单元素集，这时有两种情况：

①$a\neq0$ 时，$\Delta=4-4a=0$，$\therefore a=1$；

②$a=0$ 时，原方程化为一次方程 $2x+1=0$，$\therefore x=-\dfrac{1}{2}$.

所以当 $a=0$ 或 $a=1$ 时，A 为单元素集.

综合(1)(2)可得，当 A 至多只有一个真子集时，a 的取值范围是

$a\geqslant1$ 或 $a=0$.

方法总结

正确理解真子集概念，考虑 $\Delta\leqslant0$ 后，还必须考虑二次项系数为 0 的情况. 参数的求值问题根据不同的题目可能需要分类讨论，分类时需特别注意考虑问题要全面，尽量避免疏漏.

例2 (2010·北京)已知集合 $S_n=|X|X=(x_1,x_2,\cdots,x_i),x_i\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,n(n\geqslant2)$. 对于 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n),B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in S_n$，定义 A 与 B 有差

为 $A-B=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|)$，$A$ 与 B 之间的距离为 $d(A,B)=\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|$.

(1)证明：$\forall A,B,C\in S_n$，有 $A-B\in S_n$，且 $d(A-C,B-C)=d(A,B)$；

(2)证明：$\forall A,B,C\in S_n$，$d(A,B)$，$d(A,C)$，$d(B,C)$ 三个数中至少有一个是偶数；

(3)设 $P\subseteq S_n$，P 中有 $m(m\geqslant 2)$ 个元素，记 P 中所有两元素间距离的平均值为 $\overline{d}(P)$.

证明：$\overline{d}(P)\leqslant\dfrac{mn}{2(m-1)}$.

【证明】 (1)设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in S_n$.

因为 $a_1,b_1\in\{0,1\}$，所以 $|a_1-b_1|\in\{0,1\}(i=1,2,\cdots,n)$.

从而 $A-B=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|)\in S_n$.

又因为 $d(A-C,B-C)=\sum_{i=1}^{n}||a_i-c_i|-|b_i-c_i||$.

由题意知 $a_i,b_i,c_i\in\{0,1\}(i=1,2,\cdots,n)$.

当 $c_i=0$ 时，$||a_i-c_i|-|b_i-c_i||=|a_i-b_i|$；

当 $c_i=1$ 时，$||a_i-c_i|-|b_i-c_i||=|(1-a_i)-(1-b_i)|=|a_i-b_i|$.

所以 $d(A-C,B-C)=\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|=d(A,B)$.

(2)设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in S_n$，

$d(A,B)=k$，$d(A,C)=l$，$d(B,C)=h$.

记 $O=(0,0,\cdots,0)\in S_n$，由(1)可知

$d(A,B)=d(A-A,B-A)=d(O,B-A)=k$，

$d(A,C)=d(A-A,C-A)=d(O,C-A)=l$，

$d(B,C)=d(B-A,C-A)=h$.

所以 $|b_i-a_i|(i=1,2,\cdots,n)$ 中 1 的个数为 k，$|c_i-a_i|(i=1,2,\cdots,n)$ 中 1 的个数为 l.

设 t 是使 $|b_i-a_i|=|c_i-a_i|$ 成立的 i 的个数，则 $h=l+k-2i$.

由此可知，k,l,h 三个数不可能都是奇数，

即 $d(A,B)$，$d(A,C)$，$d(B,C)$ 三个数中至少有一个是偶数.

(3)$d(P)=\dfrac{1}{C_m^2}\sum\limits_{A,B\in P}d(A,B)$，其中 $\sum\limits_{A,B\in P}d(A,B)$ 表示 P 中所有两个元素间

距离的总和.

设 P 中所有元素的第 i 个位置的数字中共有 t_i 个 1，$m-t_i$ 个 0，

则 $\sum\limits_{A、B\in P}d(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{n}t_i(m-t_i)$.

由于 $t_i(m-t_i)\leqslant\dfrac{m^2}{4}(i=1,2,\cdots,n)$，

所以 $\sum\limits_{A、B\in P}d(A,B)\leqslant\dfrac{nm^2}{4}$.

从而 $\overline{d}(P)=\dfrac{1}{C_m^2}\sum\limits_{A、B\in P}d(A,B)\leqslant\dfrac{nm^2}{4C_m^2}=\dfrac{mn}{2(m-1)}$.

例3（2007·浙江）方程 $16\sin\pi x\cos\pi x=16x+\dfrac{1}{x}$ 的解的集合为________.

【分析】 这是一个超越方程，中学阶段无法正常解，可从等式两端的最值上取得突破.

当 $x>0$ 时，$16x+\dfrac{1}{x}\geqslant8\left(x=\dfrac{1}{4}\text{取到等号}\right)$. 而 $16\sin\pi x\cos\pi x=8\sin2\pi x\leqslant8\left(x=\dfrac{1}{4}+k,k\in\mathbf{Z}\text{取到等号}\right)$. 于是有当 $x>0$ 时，方程只有一个解 $x=\dfrac{1}{4}$. 由奇函数的性质，可知 $x=-\dfrac{1}{4}$ 是方程的另一解.

故方程的解的集合为 $\left\{\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{4}\right\}$.

【答案】 $\left\{\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{4}\right\}$

例4（西班牙高中数学竞赛）称子集 $A\subseteq M=\{1,2,3,\cdots,11\}$ 是好的如果它有下述性质：如果 $2k\in A$，则 $2k\pm1\in A$，并且空集和 M 都是好的. 问 M 有多少个好子集？

【解】 设 $n(A)$ 为属于 A 的偶数的个数.

情形一：$n=0$. 我们只需确定 A 中的奇数. 在 M 中有 6 个奇数，对每个奇数有两种可能性，因此，有 2^6 个好子集满足 $n(A)=0$.

情形二：$n=1$. 偶数的选取有 5 种可能. 对每个选取，必须有 2 个奇数在 A 中，余下的奇数可以按 2^4 种方式来确定. 因此我们有 $5\times2^4=80$ 个好集合 A 满足 $n(A)=1$.

情形三：$n=2$.

1. 在好子集中的偶数是相邻的. 对两个相邻的偶数有 4 种选取，每种选取决定了 3 个奇数，允许 2^3 个选择，因此有 4×2^3 个好子集 A.

2. A 中的两个偶数不相邻. 偶数有 $C_5^2-4=6$ 种选取方法，由于对每一选取方法，确定了 4 个奇数，有 2^2 个选择，因此这时的总数是 6×2^2 个.

综合 1、2，满足 $n(A)=2$ 的好子集 A 的个数是 56.

情形四：$n=3$.

1. A 中的偶数是相邻的. 这给出 3 种可能性，每个确定了 4 个奇数而允许有 2^2 种选择. 因此有 3×2^2 个这样的好子集.

2. A 中的任意两个偶数都不相邻. 这只对偶数 2，6，10 给出 1 种选择. 因此，$A=\{1,2,3,5,6,7,9,10,11\}$是唯一的选择.

3. A 的 3 个偶数中恰好两个是相邻的. 偶数有 $C_5^2-4=6$ 种选择方法，对每一个选择方法，有 5 个奇数是固定的，这允许 2 种选择，因此有 $6\times2=12$ 个好子集.

于是有 $3\times2^2+1+12=25$ 个好子集 A 能满足 $n(A)=3$.

情形五：$n=4$.

1. $2\notin A$ 或 $10\notin A$. 偶数给出了 2 种可能性，而且每个只对 1 个奇数允许一种选择，一共有 4 个好集合.

2. $2\in A$ 且 $10\in A$. 对不是 A 中的偶数有 3 种选择，对每一选择，奇数都在 A 中，这给出了 3 个好集合.

因此，有 $4+3=7$ 个好子集 A 能满足 $n(A)=4$.

情形六：$n=5$，$A=M$，只有 1 种可能性.

综合六种情形可得，好子集的总数是 $2^6+5\times2^4+56+25+7+1=233$.

小试牛刀

一、选择题

1. 全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{1,2,3,4\}$，集合 $N=\left\{x\,\middle|\,x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}$，则 $M\cap(\complement_U N)$ 等于 （　　）

A. $\{4\}$　　B. $\{3,4\}$

C. $\{2,3,4\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

2. 如图 1-1-2 所示，I 是全集，M,P,S 是 I 的 3 个子集，则阴影部分所表示的集合是 （　　）

A. $(M\cap P)\cap S$

B. $(M\cap P)\cup S$

C. $(M\cap P)\cap \complement_I S$

D. $(M\cap P)\cup \complement_I S$

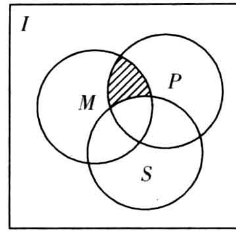

图 1-1-2

3. 已知非空集合 A 满足：①$A\subseteq\{1,2,3,4\}$；②若 $a\in A$，则 $5-a\in A$. 符合上述要求的集合 A 的个数是(　　)个.

A. 32　　B. 8　　C. 5　　D. 3

4. 若 $M=\{(x,y)\mid |\tan\pi y|+\sin^2\pi x=0\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$，则 $M\cap N$ 的元素个数是　　(　　)

A. 4　　B. 5　　C. 8　　D. 9

5. 集合 $M=\{u\mid u=12m+8n+4l$，其中 $m,n,l\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{u\mid u=20p+16q+12r$，其中 $p,q,r\in\mathbf{Z}\}$ 的关系为　　(　　)

A. $M=N$　　B. $M\not\subseteq N$，$N\not\subseteq M$

C. $M\not\subseteq N$　　D. $M\not\supseteq N$

6. 设 $S=\{(x,y)\mid x^2-y^2=$ 奇数，$x,y\in\mathbf{R}\}$，$T=\{(x,y)\mid \sin(2\pi x^2)-\sin(2\pi y^2)=\cos(2\pi x^2)-\cos(2\pi y^2)$，$x,y\in\mathbf{R}\}$. 则　　(　　)

A. $S\subsetneqq T$　　B. $T\not\subseteq S$

C. $S=T$　　D. $S\cap T=\varnothing$

二、填空题

7. 已知直线 $ax+by+c=0$ 中的 a,b,c 是取自集合 $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ 中的 3 个不同的元素，并且该直线的倾斜角为锐角，那么这样的直线的条数是________.

8. 设集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$ 共有 k 个子集，记子集 A_i 的元素之和为 S_i $(i=1,2,\cdots,k)$，则 $S_1+S_2+\cdots+S_k=$________.

三、解答题

9. 已知全集 $U=\{2,0,3-a^2\}$，子集 $P=\{2,a^2-a-2\}$，且 $\complement_U P=\{-1\}$，求实数 a 的值.

10. 已知集合 $A=\{2,4,a^2-2a+3\}$，集合 $B=\{a+1,a^2-4a+2,a^2-3a+4,a^2-5a+3\}$，若 $A\cap B=\{2,3\}$，求 $A\cup B$.

11. 已知元素 $(1,2)\in A\cap B$，这里集合 $A=\{(x,y)\mid ax-y^2+b=0\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2-ay-b=0\}$. 求 a,b 的值.