

陈文灯教授主编 考研数学复习系列

4

数学题型集粹与同等水平测试

经济类

主编
副主编

黄先开
陈文灯

贺新瑜

2000 版

世界图书出版公司

陈文灯教授主编考研 **数学** 复

(2000 版)

数学题型集粹与同等水平测试

经 济 类

主 编 陈文灯

副主编 黄先开 贺新瑜

世界图书出版公司

北京 · 广州 · 上海 · 西安

1999

图书在版编目(CIP)数据

数学题型集粹与同等水平测试(经济类)/陈文灯等主编. — 北京:世界图书出版公司北京公司, 1999.5

[陈文灯教授主编考研数学复习系列 4(2000 版)]

ISBN 7-5062-3721-0

I. 数… II. ①陈… ②黄… III. 高等数学-研究生-入学考试-试题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 06638 号

- 书 名: 数学题型集粹与同等水平测试(经济类)
[陈文灯教授主编考研数学复习系列 4(2000 版)]
- 主 编: 陈文灯
- 副 主 编: 黄先开 贺新瑜
- 出 版: 世界图书出版公司北京公司
- 印 刷: 北京光华印刷厂
- 发 行: 世界图书出版公司北京公司(北京朝阳门内大街 137 号, 100010)
- 销 售: 各地新华书店
- 开 本: 787×1092 1/16 印张: 21 字数: 490 千字
- 版 次: 1999 年 5 月第 1 版 1999 年 5 月第 1 次印刷
- 印 数: 0001—10000
- 书 号: ISBN 7-5062-3721-0/G·89
- 定 价: 26.00 元

前言

本书是我主编的《考研数学复习系列 数学复习指南(2000 版)》一书的续篇。读者在全面、系统地复习《指南》的基础上再看本书,将会进一步拓宽思路,掌握各类题型的解题方法和技巧,大大提高做题的准确性和速度。

本书有以下特点:

(1)重点突出。本书针对“考纲”要求重点掌握的概念、公式、定理,通过题型的形式予以强化,同时,指出解题的方法和技巧,尤其是读者感到比较难理解和掌握的问题,按本书所指的思路、方法去分析将会迎刃而解。

(2)针对性强,覆盖面大。本书不是一般性的题解书,不搞题海战术,而是以题型为纲,通过分析综合性较强、难度较大、覆盖面较宽的例题,总结出易被读者理解和掌握的解题方法和规律。

(3)超前性与独创性。本书所总结的规律和方法是作者教学经验的结晶。书中很多综合题集作者多年的教学心得,并经几个不眠之夜思索而得的。读者通过做这些例题不仅可以各知识点串在一起,而且可以拓展思路,遇到“从未见到”的题时,可以从容应对。

另外,本书还编写了同等水平测试题数学三(四套),数学四(五套)。这是演练题而不是考前的压题。读者复习完本书后,严格掌握在 3 小时内做完试卷,然后测算自己的得分,以此了解自己的水平。

书后附录还给出 1999 年全国攻读硕士学位研究生入学考试的数学三、数学四试题及参考答案。

成书仓促,定有不当及错误之处,恳请广大读者、数学同仁批评指正。

陈文灯



1999.5

目 录

第一篇 微积分

第一章 函数·极限·连续	1
§ 1 函数	1
§ 2 极限	6
§ 3 函数的连续性	19
第二章 导数与微分	25
第三章 不定积分	37
第四章 定积分	51
第五章 中值定理	76
第六章 一元微积分的应用	83
§ 1 导数的应用	83
§ 2 定积分的应用	93
第七章 多元函数微分学	99
第八章 重积分	108
第九章* 无穷级数	117
第十章* 常微分方程	129

第二篇 线性代数

第一章 行列式	139
第二章 矩阵	149
第三章 向量	157
第四章 线性方程组	173
第五章 特征值与特征向量	186
第六章* 二次型	202

第三篇 概率论与数理统计初步

第一章 事件的概率	207
第二章* 随机变量及其分布	214
第三章 随机变量的数字特征	225
第四章 大数定律和中心极限定理	236

第五章* 数理统计初步	242
数学三 水平测试题(I)	258
数学三 水平测试题(II)	266
数学三 水平测试题(III)	272
数学三 水平测试题(IV)	278
数学四 水平测试题(I)	286
数学四 水平测试题(II)	293
数学四 水平测试题(III)	300
数学四 水平测试题(IV)	307
数学四 水平测试题(V)	313
附录 1999 年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题(数学三、数学四)及参考答案	319

第一篇 微积分

第一章 函数·极限·连续

§ 1 函 数

一. 有关函数概念的题型

题型 I 判别函数的等价性

【解题提示】 当且仅当两函数的定义域和对应关系完全相同时,才表示同一函数,否则为不同函数.

【例 1.1】 设 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在,且 $f(x) = x^2 + 2x \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, 则与 $f(x)$ 等价的函数是().

(A) $y = \int_0^x (x^2 - 2x) dx$

(B) $y = \int_0^1 (x^2 - 2x) dt$

(C) $y = \int f'(x) dx$

(D) $y = e^{\ln(x^2 - 2x)}$

【解】 设 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = l$, 则 $f(x) = x^2 + 2xl$

两边取 $x \rightarrow 1$ 时的极限,得 $l = 1 + 2l \Rightarrow l = -1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x$

(A) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ 与 $f(x)$ 的对应关系不同.

(B) $y = \int_0^1 (x^2 - 2x) dt = x^2 - 2x$

(C) $y = f(x) + C = x^2 - 2x + C$ 与 $f(x)$ 对应关系不同.

(D) $y = e^{\ln(x^2 - 2x)}$, 定义域 $x < 0$ 或 $x > 2$, 与 $f(x)$ 定义域不同,故(B)入选,实际做题时不必像以上那样处理,求出 $f(x)$ 的表达式后一眼即可看出(B)入选.

题型 II 利用函数表示法与用什么字母表示无关的特性求解 $f(x)$ 的表达式

【解题提示】 一种是所谓“凑法”——将给出的表达式凑成对应符号 $f(\quad)$ 内的中间变量的表达形式,然后用“无关特性”即可得出 $f(x)$ 的表达式.另一种方法是先作变量替换再用“无关特性”,然后通过联立方程得出 $f(x)$ 的表达式.多元函数也可以用这两方法处理.

【例 1.2】 求解以下各小题中的 $f(x)$ 表达式:

(1) $f(x + \frac{1}{x}) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1} + \sin(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 2, \quad |x| > 1$

(2) $f(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x, \quad 0 < x < 1$

【解】 (1) $f(x + \frac{1}{x}) = \sqrt{(x + \frac{1}{x})^2 - 1} + \sin[(x + \frac{1}{x})^2 - 2] + 2$

故 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sin(x^2 - 2) + 2$

(2) $f(\sin^2 x) = 1 - 2\sin^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = 1 - 2\sin^2 x + \frac{1}{1 - \sin^2 x} - 1$

故 $f(x) = -2x + \frac{1}{1 - x}, 0 < x < 1$

【例 1.3】 设 $f(x)$ 满足方程: $af(x) + bf(-\frac{1}{x}) = \sin x$, 其中 $|a| \neq |b|$, 求 $f(x)$.

【解】 令 $t = -\frac{1}{x}$, 则 $x = -\frac{1}{t}$, 于是原方程变为 $bf(t) + af(-\frac{1}{t}) = -\sin \frac{1}{t}$

由“无关特性”得 $bf(x) + af(-\frac{1}{x}) = -\sin \frac{1}{x}$

解联立方程组
$$\begin{cases} af(x) + bf(-\frac{1}{x}) = \sin x \\ bf(x) + af(-\frac{1}{x}) = -\sin \frac{1}{x} \end{cases}$$

得 $f(x) = \frac{1}{a^2 - b^2}(a \sin x + b \sin \frac{1}{x})$

【例 1.4】 设 $f(x + y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2 + \cos(xy)$, 求 $f(x, y)$.

【解】 令 $u = x + y, v = \frac{y}{x} \Rightarrow x = \frac{u}{1+v}, y = \frac{uv}{1+v}$, 则

$$f(u, v) = (\frac{u}{1+v})^2 - (\frac{uv}{1+v})^2 + \cos \frac{u^2 v}{(1+v)^2} = \frac{u^2(1-v)}{1+v} + \cos \frac{u^2 v}{(1+v)^2}$$

故 $f(x, y) = \frac{x^2(1-y)}{1+y} + \cos \frac{x^2 y}{(1+y)^2}, (y \neq -1)$

二. 函数的性质

题型 III 函数奇偶性的判别

【解题提示】 判别函数奇偶性的方法: (1) 主要依据奇偶性的定义. 有时也用其运算性质 (奇函数的代数和仍为奇函数; 偶函数的代数和仍为偶函数; 偶函数之积为偶函数; 偶数个奇函数之积为偶函数; 一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数). (2) $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法. (3) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的, 若函数的定义域关于原点不对称, 则函数就无奇偶性可言.

【例 1.5】 判别下列函数的奇偶性:

(1) $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 其中 $f(x)$ 为连续的偶函数.

(2) $F(x) = f(x) + \int_0^x [\int_0^u f(t)dt]du$, 其中 $f(x)$ 是连续函数.

(3) $F(x) = (\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2})f(x)$, 其中 $a > 0, a \neq 1, f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 且对任何 x, y 恒有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

【解】 (1) $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt \xrightarrow{\text{令 } t = -u} \int_0^x f(-u)(-du) \xrightarrow{\substack{f(x) \text{ 为} \\ \text{偶函数}}} -\int_0^x f(u)du$

$$\therefore F(x) + F(-x) = \int_0^x f(t)dt - \int_0^x f(t)dt = 0$$

$\therefore F(x)$ 为奇函数.

$$(2) F(x) = f(x) + \int_0^x \left[\int_0^u f(t)dt \right] du \quad ①$$

$$F(-x) = f(-x) + \int_0^{-x} \left[\int_0^u f(t)dt \right] du \quad ②$$

$$\therefore f(x) \text{ 为奇函数 } \therefore f(x) + f(-x) = 0 \quad ③$$

$$\text{又 } \therefore \int_0^{-x} \left[\int_0^u f(t)dt \right] du \xrightarrow{\text{令 } u = -v} \int_0^x \left[\int_0^{-v} f(t)dt \right] (-dv) = - \int_0^x \left[\int_0^{-u} f(t)dt \right] du \quad ④$$

由 ①, ②, ③, ④ 得

$$F(x) + F(-x) = \int_0^x \left[\int_0^u f(t)dt - \int_0^{-u} f(t)dt \right] du = \int_0^x \left[\int_{-u}^u f(t)dt \right] du = 0$$

故 $F(x)$ 为奇函数.

$$(3) \text{ 令 } g(x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore g(x) + g(-x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{a^{-x} - 1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} - \frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2} = 0$$

$\therefore g(x)$ 为奇函数.

$$\text{又 } \therefore f(x+y) = f(x) + f(y), \text{ 令 } y=0, \text{ 得 } f(x) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$\text{又 显然有 } 0 = f(0) = f[x + (-x)] = f(x) + f(-x)$$

$\therefore f(x)$ 为奇函数.

故 $F(x) = g(x)f(x)$ 为偶函数.

题型 IV 求解给定函数的周期或周期性证明

【解题提示】 利用周期函数的定义及周期函数的运算性质求解或证明

【例 1.6】 设 $f(x)$ 是以 $T > 0$ 为周期的函数, 证明 $f(ax) (a > 0)$ 是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的函数.

【证】 令 $F(x) = f(ax)$, 由于

$$F(x + \frac{T}{a}) = f[a(x + \frac{T}{a})] = f(ax + T) \xrightarrow[\text{f(x) 的周期}]{\because T \text{ 是}} f(ax) = F(x)$$

故 $\frac{T}{a}$ 是 $f(ax)$ 的周期.

【例 1.7】 设函数 $y = f(x), x \in (-\infty, +\infty)$ 的图形与 $x = a, x = b$ 均对称 ($a \neq b$), 求证: $y = f(x)$ 是周期函数, 并求其周期.

【证】 由题设有 $f(a+x) = f(a-x), f(b+x) = f(b-x)$

$$\begin{aligned} \text{于是, } f(x) &= f[a + (x-a)] = f[a - (x-a)] = f(2a-x) = f[b + (2a-x-b)] \\ &= f[b - (2a-x-b)] = f[x + 2(b-a)] \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是周期函数, 其周期 $T = 2(b-a)$.

题型 V 函数 $f(x)$ 在某区间 I 上单调性的判别

【解题提示】 若没有言明函数 $f(x)$ 可导, 则用单调性定义判别; 若言明函数 $f(x)$ 可导, 则利用函数的一阶导数判别.

【例1.8】 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, 证明 $F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$ 在 (a, b) 内单调增加.

$$\begin{aligned} \text{【证】 } F'(x) &= -\frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x f(t) dt + \frac{f(x)}{x-a} = -\int_a^x \frac{f(t)}{(x-a)^2} dt + \int_a^x \frac{f(x)}{(x-a)^2} dt \\ &= \int_a^x \frac{f(x) - f(t)}{(x-a)^2} dt \end{aligned}$$

$\because (x-a)^2 > 0$ $f(x)$ 单调上升, 当 $x > t$ 时, $f(x) - f(t) \geq 0$

$\therefore F'(x) \geq 0$, 故 $F(x)$ 在 (a, b) 内单调增加.

题型 VI 函数有界性的判别

【解题提示】 证明或判别函数有界性的思路:

(1) 利用有界性定义.

(2) 闭区间上连续函数的有界性.

(3) 有极限数列必有界.

(4) $x \rightarrow x_0$ 时有极限的函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域中必有界.

【例1.9】 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (l 为有限数), 试证: $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

$$\text{【证】 } \because \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l, \therefore \text{对于取 } \epsilon = \frac{|l|}{2}, \exists X > 0$$

当 $x > X$ 时, 恒有 $|f(x) - l| < \frac{|l|}{2}$

又 $|f(x) - l| > |f(x)| - |l|$ 所以 $|f(x)| - |l| < \frac{|l|}{2}$

即 $|f(x)| < \frac{3}{2}|l|$

$\because f(x)$ 在 $[a, X]$ 上连续, 由闭区间上连续函数有界性, 可知 $\exists S$, 使 $|f(x)| < S, x \in [a, X]$.

取 $M = \max\left\{S, \frac{3}{2}|l|\right\}$, 则对 $\forall x \in [a, +\infty)$ 恒有 $|f(x)| \leq M$

即函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

【例1.10】 试证 $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x t e^{t^2} dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

$$\text{【证】 令 } g(x) = \int_0^x t e^{t^2} dt$$

$$\because g(-x) = \int_0^{-x} t e^{t^2} dt \xrightarrow{\text{令 } u = -t} \int_0^x -u e^{(-u)^2} (-du) = \int_0^x u e^{u^2} du$$

$\therefore g(x)$ 为偶函数. 因此 $f(x) = e^{-x^2} g(x)$ 也为偶函数, 所以只需证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界即可.

$$\because \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t e^{t^2} dt}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{x^2}}{2x e^{x^2}} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ 对于取 $\epsilon = \frac{1}{2}, \exists X > 0$, 当 $x \in [X, +\infty)$ 时, 有

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}, \quad \text{即} \quad 0 < f(x) < 1$$

又 $f(x)$ 在 $[0, X]$ 上连续, 于是, $\exists l > 0$, 使对 $\forall x \in [0, X]$, 恒有 $0 \leq f(x) \leq l$, 取 $M = \max\{1, l\}$, 则 $\forall x \in [0, +\infty)$, 有 $0 \leq f(x) \leq M$. 同理可证 $(-\infty, 0]$ 的情形, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

三. 复合函数

【解题提示】 将两个或两个以上函数进行复合, 通常有三种方法: 代入法(适用于初等函数的复合), 分析法(适用于初等函数与分段函数的复合, 或两分段函数的复合), 图示法(适用于两分段函数的复合).

【例 1.11】 设 $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, 求 $f[f(x)]$, $f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$.

$$\text{【解】} \quad f[f(x)] = \frac{1}{1-f^2(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{(1-x^2)^2}} = \frac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)}$$

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right] = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2} = \frac{f^2(x)}{f^2(x)-1} = \frac{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2-1} = \frac{1}{x^2(2-x^2)}$$

【例 1.12】 设 $f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x))\cdots)}_{n \text{ 次}}$, 若 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin[f_n(x)]$.

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad f_2(x) &= f[f(x)] = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} \\ f_3(x) &= f[f_2(x)] = \frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}} \end{aligned}$$

比较以上两式可知 $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ (由数学归纳法可证.)

$$\text{于是} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin[f_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} = \frac{x}{|x|}$$

【例 1.13】 设 $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$, $\varphi(x) = \begin{cases} x+2 & x < 0 \\ x^2-1 & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.

【解】 用分析法求解. 所谓分析法就是抓住最外层函数定义域的各区间段, 结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析, 从而得出复合函数的方法.

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{\varphi(x)} & \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x) & \varphi(x) \geq 1 \end{cases}$$

1) 当 $\varphi(x) < 1$ 时

$$\text{或 } x < 0, \varphi(x) = x+2 < 1, \text{ 即 } \begin{cases} x < 0 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x < -1$$

$$\text{或 } x \geq 0, \varphi(x) = x^2-1 < 1, \text{ 即 } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < 2 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x < \sqrt{2}$$

2) 当 $\varphi(x) \geq 1$ 时

$$\text{或 } x < 0, \varphi(x) = x+2 \geq 1, \text{ 即 } \begin{cases} x < 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x < 0$$

或 $x \geq 0, \varphi(x) = x^2 - 1 \geq 1$, 即 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq \sqrt{2}$

综上所述, 有 $f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2} & x < -1 \\ x+2 & 0 < x \leq -1 \\ e^{x^2} - 1 & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ x^2 - 1 & x \geq \sqrt{2} \end{cases}$

【例 1.14】 设 $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$, $\varphi(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.

【解】 图示法的解题程序: 1° 画出中间变量 $u = \varphi(x)$ 的图象; 2° 将 $y = f(u)$ 的分界点在 $x_0 u$ 坐标面上画出 (这是若干条平行于 x 轴的直线); 3° 写出 u 在不同区间上 x 所对应的变化区间; 4° 将 3° 所得结果代入 $y = f(u)$ 中便得复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应 x 的变化区间.

$$f[\varphi(x)] = \frac{1}{2}[\varphi(x) + |\varphi(x)|] \quad ①$$

作出 $u = \varphi(x)$ 的图像, 图 1.1 所示, 以及 $f(u) = \frac{1}{2}(u + |u|)$ 的分界点 $u = 0$ ($x - u$ 平面上的 x 轴)

当 $x < 0$ 时 $u = x, (u < 0)$

当 $x \geq 0$ 时 $u = x^2, (u \geq 0)$

将以上所得结果代入 ① 式, 得 $f[\varphi(x)] = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$

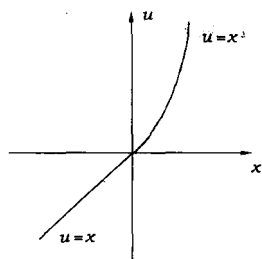


图 1.1

§ 2 极 限

一. 数列的极限

题型 I 已知数列的前几项数值及通项的表达式, 求数列的极限

【解题提示】 或者利用单调有界数列必有极限定理求解 (求解程序: ① 判断极限的存在性 单调性, 方法可用数学归纳法或不等式的放缩法; ② 先令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 然后通过解关于 l 的方程, 求得 l 的值, 从而得极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$). 或者利用数列极限的定义求解 (先令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 然后在通项的两边取极限得出 l 的数值, 再证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的存在性. 此步通常是利用 $|x_n - l|$ 的逐步放大而得出其小于一个无穷小量).

【例 1.15】 设 $x_1 = 2, x_2 = 2 + \frac{1}{x_1}, \dots, x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【解】 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 在 $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$ 的两边取 $n \rightarrow \infty$ 时的极限

$$\Rightarrow l = 2 + \frac{1}{l} \Rightarrow l^2 - 2l - 1 = 0 \Rightarrow l = 1 \pm \sqrt{2}$$

$\therefore$ 由题设可知 $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n} > 2 \therefore l = 1 + \sqrt{2}$

以下证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在:

$$|x_n - l| = \left| \left(2 + \frac{1}{x_{n-1}}\right) - \left(2 + \frac{1}{l}\right) \right| = \left| \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{l} \right| = \frac{|x_{n-1} - l|}{lx_{n-1}} \quad (\because x_{n-1} = 2 + \frac{1}{x_{n-2}} > 2, \\ l = 2 + \frac{1}{l} > 2) < \frac{|x_{n-1} - l|}{4} < \frac{|x_{n-2} - l|}{4} / 4 = \frac{|x_{n-2} - l|}{4^2} < \frac{|x_{n-3} - l|}{4^3} < \dots < \frac{|x_1 - l|}{4^{n-1}} \\ = \frac{|2 - (1 + \sqrt{2})|}{4^{n-1}} = \frac{|1 - \sqrt{2}|}{4^{n-1}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{4^{n-1}}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} - 1}{4^{n-1}} = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - l) = 0$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2} + 1$

【例 1.16】 设 $x_1 = 1, x_2 = 1 + \frac{x_1}{1 + x_1}, \dots, x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【解】 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 在 $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$ 的两边取 $n \rightarrow \infty$ 时的极限,

$$\Rightarrow l = 1 + \frac{l}{1 + l} \Rightarrow l^2 - l - 1 = 0 \Rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \text{ 由题设可知 } l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

以下证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在:

$$|x_n - l| = \left| \left(1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}\right) - \left(1 + \frac{l}{1 + l}\right) \right| \\ = \frac{|x_{n-1} - l|}{|(1 + x_{n-1})(1 + l)|} < \frac{|x_{n-1} - l|}{2(1 + l)} < \dots < \frac{|x_1 - l|}{2^{n-1}(1 + l)} = \frac{\frac{l}{1 + l}}{2^{n-1}(1 + l)} = \frac{l}{2^{n-1}(1 + l)^2} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l}{2^{n-1}(1 + l)^2} = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - l) = 0$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

【另解】 由题设可知 $x_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$)

$$x_2 - x_1 = \left(1 + \frac{x_1}{1 + x_1}\right) - 1 = \frac{x_1}{1 + x_1} > 0. \text{ 于是, } x_2 > x_1$$

设 $x_n > x_{n-1}$

$$\text{则 } x_{n+1} - x_n = \left(1 + \frac{x_n}{x_n + 1}\right) - \left(1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}\right) = \frac{x_n}{1 + x_n} - \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} \\ = \frac{x_n - x_{n-1}}{(1 + x_n)(1 + x_{n-1})} > 0$$

故 $\{x_n\}$ 单调增加.

$$\because x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} (\because x_{n-1} > 0) < 2 \quad \therefore \{x_n\} \text{ 有界.}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 设其为 l , 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}\right), \text{ 即 } l = 1 + \frac{l}{1 + l} \Rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ 由题设可知 } l \text{ 非负.}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

【例 1.17】 设 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$, 其中 $a > 0, x_0 > 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【证】 $\because x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}, \therefore \{x_n\}$ 有界

又 $\because \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{a}{x_n^2}) \leq \frac{1}{2}(1 + \frac{a}{(\sqrt{a})^2}) = 1, \therefore \{x_n\}$ 单减

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 则由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}), \text{ 可得 } l = \frac{1}{2}(l + \frac{a}{l}) \Rightarrow l = \sqrt{a}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$

注: 单调数列的极限既可用极限定义法, 又可用单调有界数列必有极限的定理去求解. 若数列不单调则只能用极限的定义法.

题型 II 求解 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项和的极限

【解题提示】 方法有: (1) 特殊级数求和法. (2) 利用幂级数求和法. (3) 利用定积分定义求极限. (4) 利用夹逼定理.

若数列的每一项可提出一个因子 $\frac{1}{n}$, 剩余的可用一个通式表示, 则用定积分定义求解数列的极限; 若数列的各项虽可提出一个因子 $\frac{1}{n}$, 而剩余的不能用一个通式表示, 但其各项是按递增或递减排列的, 则用夹逼定理求极限.

【例 1.18】 求下列各极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{1/n}}{n+1} + \frac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}} \right)$$

【解】 (1) 因为每一项中提出 $\frac{1}{n}$ 后, 剩余各项不能用一个通项表示出来. 因此不能用定积分定义求解.

$$1 < \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + (\frac{i}{n})^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$(3) \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i \leq \frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i$$

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{\ln 2}$$

【例 1.19】 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}}$

【解】 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2+1}{n^2}} \cdot \frac{1}{n}$

$$\therefore \frac{i^2}{n^2} \leq \frac{i^2+1}{n^2} \leq \frac{(i+1)^2}{n^2}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2+1}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\text{又} \therefore \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{(i-1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{1 + \frac{(n+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + (n+1)^2} = \arctan x \Big|_0^1 + 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}, \quad \text{故} \quad \text{原极限} = \frac{\pi}{4}$$

题型 III 求 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项乘积的极限

【解题提示】 解法有: (1) 分子、分母同乘以一个因子, 使之出现连锁反应; (2) 拆通项、分解因式使之成为两因子乘积形式, 在整个相乘过程中项相消, 从而化简为易求极限形式; (3) 利用夹逼定理; (4) 利用对数恒等式化为 n 项和的形式.

【例 1.20】 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdots \frac{n^3-1}{n^3+1} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1^2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{3^2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right) \right]^{\frac{1}{n}}$$

【解】 (1) $\therefore \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$

$$\text{又} \quad \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1} = \frac{2}{n(n+1)}, \quad \prod_{k=2}^n \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \frac{n^2+n+1}{3}$$

$$\therefore \text{原极限} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n^2+n+1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$(2) \therefore \left. \begin{array}{l} 1 \cdot 3 < 2^2 \\ 3 \cdot 5 < 4^2 \\ \cdots \cdots \cdots \\ (2n-1)(2n+1) < (2n)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n)^2 < 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n)^2 \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \sqrt{2n+1} < 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n \\ \cdots \cdots \cdots \\ 0 < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \end{array} \right\}$$

又 $\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$

故 由夹逼定理, 原极限 $= 0$

$$(3) \text{ 取对数得 } \frac{1}{n} \left[\ln\left(1 + \frac{1^2}{n^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right) \right] = \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{i^2}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

两边取 $n \rightarrow \infty$ 时的极限, 得

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{i^2}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \ln(1+x^2) dx = x \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^2} \\ &= \ln 2 - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \ln 2 + \frac{\pi-4}{2} \end{aligned}$$

$$\text{故原极限} = e^{\ln 2 + (\pi-4)/2} = e^{\ln 2} \cdot e^{(\pi-4)/2} = 2e^{(\pi-4)/2}$$

题型 IV 通项为积分形式的数列的极限

【解题提示】 注意: 一般地 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \neq \int_a^b [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx$, 求解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$ 的方法:

(1) 利用不等式放缩法对 $I_n = \int_a^b f_n(x) dx$ 进行估值, 再用夹逼定理求极限. (2) 利用积分中值定理求极限.

【例 1.21】 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt$$

【解】 (1) $\because$ 在 $[0, 1]$ 上, $x^n \geq 0$, 且 $\frac{1}{1+x}$ 连续

$$\therefore 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{1}{1+\xi} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$\text{其中 } 0 \leq \xi \leq 1, \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{1}{n+1} = 0$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \sin^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \quad \text{其中 } \epsilon > 0 \text{ 为任意正数}$$

$$\text{而 } 0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \sin^n x dx = \sin^n \xi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} dx = \left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right) \sin^n \xi \leq \frac{\pi}{2} \sin^n \xi$$

$$\text{其中 } 0 < \xi < \frac{\pi}{2} - \epsilon, \text{ 由于 } 0 < \sin \xi < 1, \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \sin^n \xi = 0$$

$$\text{又 } 0 < \int_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \leq \int_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right) = \epsilon, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0$$

$$(3) \because \cos 2t = 1 - \frac{1}{2!}(2t)^2 + o(t^2), \therefore 1 - 2t^2 \leq \cos 2t \leq 1, \text{ 于是}$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1-2t^2}{4t^2} dt \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{4t^2} dt$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{4} + \frac{n}{4} + \frac{1}{2n} \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt \leq -\frac{1}{4} + \frac{n}{4}, \text{ 两边同乘以 } \frac{1}{n}, \text{ 得}$$

$$-\frac{3}{4n} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{n} \int_1^n \frac{\cos 2t}{4t^2} dt \leq -\frac{1}{4n} + \frac{1}{4}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{4n} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{4}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{4n} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_1^n \frac{\cos 2t}{4t^2} dt = \frac{1}{4}$$

题型 V 利用子序列的极限与函数的极限等值定理, 求数列极限

【解题提示】 将序列中的自然数 n 换成连续变量 x , 求出形式相同的函数的极限, 即得数列的极限.

【例 1.22】 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} (\sqrt[n]{n} - 1) \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

【解】 (1) $\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}} - 1}{x^{-\frac{1}{2}}} \left(\frac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{2} \ln x} - 1}{x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{2} \ln x} \left(-\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{2} \ln x} (\ln x - 1)}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 1}{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{2} \ln x} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}} \cdot e^0 = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0$$

$$(2) \therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sin \frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \left(x \sin \frac{1}{x} - 1\right)\right]^{x^2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(x \sin \frac{1}{x} - 1\right) & \stackrel{\text{令 } u = \frac{1}{x}}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{u} \sin u - 1}{u^2} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sin u - u}{u^3} \\ & = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\cos u - 1}{3u^2} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{-\sin u}{6u} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sin \frac{1}{x}\right)^{x^2} = e^{-\frac{1}{6}}, \quad \text{故} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{-\frac{1}{6}}$$

二. 函数的极限

题型 I $\frac{0}{0}$ 型未定式的定值法

【解题提示】 求解 $\frac{0}{0}$ 型极限的方法:

- (1) 通过因式分解或根式有理化消去零因子, 然后用连续函数的性质求极限;
- (2) 利用等价无穷小和台劳公式求极限;
- (3) 利用洛毕达法则求极限(这是求 $\frac{0}{0}$ 型极限最有效的方法);