高等数学

解题指引与同步练习

⑥ 微分方程

曾令武　吴　满　编著

华南理工大学出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题指引与同步练习/曾令武,吴满编著.—广州：华南理工大学出版社，2008.1
ISBN 978-7-5623-2708-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①曾…②吴… Ⅲ.高等数学—高等学校—解题 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 200962 号

总 发 行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
营销部电话：020-87113487 87111048（传真）
E-mail：scutc13@scut.edu.cn **http://www.scutpress.com.cn**
责任编辑：欧建岸 乔 丽
印 刷 者：广州市穗彩彩印厂
开 本：787mm×960mm 1/16 **印张**：32 **字数**：645 千
版 次：2008 年 1 月第 1 版 2008 年 1 月第 1 次印刷
印 数：1～5000 册
定价（1～10 册）：48.50 元

前　　言

成人高等教育是我国高等教育事业的重要组成部分，它不同于普通高等教育，有着自身的特点.因此，编写、使用适合成人教育特点的教材及辅导用书，是提高教学质量的有力保证.作者从事各类不同层次数学学科的教学近50年，在长期的教学实践中，深知要使学生掌握数学的“三基”(基本概念、基本理论、基本方法)，必须要通过一定数量的习题练习才能实现.为了达到这个目标，作者作了一种新的尝试，把辅导与练习合编成一册，即对每章的“三基”内容给予小结，并举例作解题指引，接着安排一些基本练习题给读者反复练习，以便及时巩固“三基”.然后配置适量的拓展题给读者一个充分训练的平台.章末附有习题答案.

本书可作为成人高等教育院校各类专业的辅导用书.对专科学生，书中的拓展题部分及有“*”号标记的内容不作要求.

本书的编写和出版，自始至终得到了华南理工大学继续教育学院有关领导的大力支持，在此向他们表示感谢.

由于水平所限，书中不完善之处，恳请同仁和读者批评指正.

编　者

2007年10月于广州

出版说明

由吴满、曾令武编著的这套教学辅导与练习册，在华南理工大学继续教育学院使用已 10 年，一直得到任课教师和学生的好评，这次出版的是第三次修订本.

学好数学就一定要做习题.我国伟大的数学家华罗庚说过，“学数学不做习题，等于你进了一个宝藏后出来时却是两手空空的”.两位作者从事成人教育多年，十分了解成人教育的特点，即学员都是在做好本职工作的前提下，业余学习，甚至部分学生还需兼顾家庭.因此，如何利用更少的时间完成学习任务是学生面对的实际问题.作者根据多年的教学经验，把辅导与练习合编成一册，对每章的“三基”内容给予小结，并精选一些例题，指引学生掌握解题的要领.然后安排一些基本题型，分类编排，使学生由浅入深地掌握数学的基本知识.最后配置适量的拓展题给学生一个充分训练的平台，使部分学生的学习能力提高一个层次，为以后深造打下坚实的基础.

练习题目都留出空白给学生解题之用，免去再抄题目而省时，任课教师批改作业也很方便.因此，这是一套很实用的教辅工具.

华南理工大学继续教育学院

教学主管院长　金军

微 分 方 程

众所周知，寻求变量之间的函数关系是数学研究的一项重要内容，也是解决实际问题的关键.而实际问题往往受本身条件的限制，难以直接建立所需的函数，比较容易得到的是含有待求函数及其导数(或微分)的关系式，这样的关系式就是所谓的微分方程.通过微分方程得出所需函数，就是求解微分方程.本章的重点就是掌握几类简单微分方程的求解方法.

一、微分方程的基本概念

1. 微分方程

含有未知函数、未知函数的导数(或微分)与自变量之间的关系式的方程，叫做微分方程.

必须指出：在微分方程中可以不显现出未知函数或自变量，但方程中必须出现未知函数的导数(或微分)，否则就不成为微分方程.

2. 微分方程的阶

微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数，称为微分方程的阶.

3. 微分方程的解

如果把某个函数以及它的各阶导数代入一个微分方程，能使方程成为恒等式，则该函数就称为那个微分方程的解.

4. 微分方程的通解

如果微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数等于该方程的阶数，这样的解称为微分方程的通解.

必须注意，通解中的任意常数是相互独立的.例如

$$y = C_1\sin2x + C_2\sin x\cos x = C_1\sin2x + \frac{C_2}{2}\sin2x = \left(C_1 + \frac{C_2}{2}\right)\sin2x$$

其中，$C_1+\frac{C_2}{2}$可以合并写成一个任意常数 C，故此函数实质只含一个任意常数(而

不是两个任意常数).

5. 微分方程的特解

在微分方程的通解中,按一定的条件(习惯上叫做初始条件)确定出任意常数 C 取特定值,从而得到不含任意常数的解,这个解就称为微分方程的特解.

通常,一阶方程的初始条件是给出未知函数 $y=y(x)$ 在点 x_0 处的函数值

$$y|_{x=x_0}=y_0$$

二阶方程的初始条件是给出未知函数 $y=y(x)$ 在点 x_0 处的函数值及一阶导数值

$$y|_{x=x_0}=y_0 \qquad y'|_{x=x_0}=y_1$$

6. 线性微分方程

在一个微分方程中,若未知函数 y 及其各阶导数都是一次的,则称该方程为线性微分方程.

例 1 指出下列各微分方程的自变量、未知函数以及方程的阶数,并说明是否为线性方程.

(1) $y'+x(y'')^2+x^2y=0$; (2) $(\sin t)x'+x\cos t=2t\sin^2 t$;

(3) $(2x^2+6)\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$.

解 要确定微分方程的阶,关键是找出方程中所含未知函数的最高阶导数的阶数,它就是该微分方程的阶,而不必考虑它的幂次.

(1)自变量是 x,未知函数是 $y=y(x)$,出现的未知函数的最高阶导数是 y'',所以方程是二阶微分方程.由于 y''是二次幂,故所给方程不属线性微分方程.

(2)自变量是 t,未知函数是 $x=x(t)$,出现的未知函数的最高阶导数是 x',并且 x 及 x'都是一次的,于是该方程为一阶线性微分方程.

(3)方程中的 x 与 y 的地位是平等的,若将方程写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{2x^2+6} \qquad 或 \qquad y'-\frac{1}{2x^2+6}y=0$$

则自变量是 x,它是关于未知函数 $y=y(x)$的一阶线性微分方程.

如果把方程写成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{2x^2+6}{y} \quad 或 \quad x'-\frac{2}{y}x^2=\frac{6}{y}$$

则把 y 看作自变量,是关于未知函数 $x=x(y)$的一阶非线性微分方程.这就是说,指定哪个变量为自变量是人为的,即自变量与因变量是相对的.

例 2 验证下列所给函数是否为微分方程 $y''-y=0$ 的解,并指出哪个是通

解,哪个是特解.

(1) $y=e^{-x}$;　　(2) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$;　　(3) $y=Ce^x+e^{-x}$.

解 (1) 由 $y=e^{-x}$求得$y'=-e^{-x}$,$y''=e^{-x}$.将 y 及y''的表达式代入方程,有

$$y''-y=e^{-x}-e^{-x}=0$$

恒成立,所以 $y=e^{-x}$是所给微分方程的解.因它不含任意常数,故是特解.

(2) 由 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$求得$y'=C_1e^x-C_2e^{-x}$及$y''=C_1e^x+C_2e^{-x}$.将 y 及y''的表达式代入方程,有

$$y''-y=(C_1e^x+C_2e^{-x})-(C_1e^x+C_2e^{-x})=0$$

成立,所以 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$是所给微分方程的解.又因它含有两个独立任意常数 C_1 与 C_2,所以是所给二阶方程的通解.

(3) 由 $y=Ce^x+e^{-x}$求得$y'=Ce^x-e^{-x}$及$y''=Ce^x+e^{-x}$.将 y 及y''的表达式代入方程,有

$$y''-y=(Ce^x+e^{-x})-(Ce^x+e^{-x})=0$$

成立,所以 $y=Ce^x+e^{-x}$是所给方程的解.因为 y 的表达式中只含一个任意常数,而所给方程是二阶方程,故不是通解,也不是特解,只能说它是微分方程的解.

习题 6-1

基本练习题

1. 下列各方程中,不是微分方程的是　　(　　)

A. $y''-3y'+2y=0$　　B. $dy=(2x+6)dx$

C. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\sin x$　　D. $y^2-2y+3x=0$

2. 下列方程中,不是线性微分方程的是　　(　　)

A. $\dfrac{dy}{dx}+xy=e^x$　　B. $y''+2y'-y=\sin x$

C. $y'+xy^3=e^{-x}$　　D. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-e^x=0$

3. 指出下列各微分方程的阶数:

(1) 方程$(y')^2+2y=\sin x$ 是________阶的微分方程;

(2) 方程 $y''+3y'+2y^3=\cos x$ 是________阶的微分方程;

(3) 方程 $dy=0$ 是________阶的微分方程;

(4) 方程$\dfrac{d^3y}{dx^3}-(y'')^2-3x=0$ 是________阶的微分方程.

4. 微分方程 $xy'=2y$ 有一个解是 (   )

A. $y=2x$　B. $y=2x^2+1$　C. $y=5x^2$　D. $y=5x^3$

5. 微分方程 $y'=y$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解是 (   )

A. $y=2e^x$　B. $y=2e^x-1$　C. $y=e^x$　D. $y=2-e^x$

6. 验证下列所给函数是否为微分方程 $y''+y=0$ 的解，并指出哪个是通解，哪个是特解.

(1) $y=2\cos x$；　(2) $y=C_1\cos x+C_2\sin x$；　(3) $y=C\sin x-\cos x$.

解

二、变量可分离的一阶微分方程

求解一个微分方程，首先要判别方程的类型. 当确认是一阶微分方程时，一般先解出所给方程的 y' 的表达式，若能表示成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)\cdot g(y) \qquad ①$$

的形式，即它的右端是两个单变量函数 $f(x)$（变量为 x）与 $g(y)$（变量为 y）的乘积，就称方程为一阶变量可分离型的方程. 这里方程①可以写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x \quad (g(y)\neq 0) \qquad ②$$

其特征是变量 x 与变量 y 分离在方程的两边. 这样只要将方程②两边分别作积分，有

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x$$

积分后便可得到微分方程的通解.

例 3 求微分方程$\frac{dy}{dx}=2xy$的通解.

解法 1 这是一个变量可分离的方程.当 $y\neq 0$ 时,将方程分离变量得

$$\frac{dy}{y} = 2x dx$$

两边积分,得

$$\ln|y| = x^2 + C_1$$

故

$$|y| = e^{x^2+C_1} = e^{C_1}e^{x^2} \qquad 即 \qquad y = \pm e^{C_1}e^{x^2}$$

因$\pm e^{C_1}$仍为任意常数,把它记作 $C(C\neq 0)$便得到

$$y = Ce^{x^2}$$

此外,$y=0$ 显然也是微分方程的解.若在上面通解中补充 C 取零值,就得到这个解.因此,所给微分方程的通解可写为

$$y = Ce^{x^2} \quad (C 为任意常数)$$

解法 1 是严谨的,但在解题过程中,时常采用下述简化的表达方式,得出同样的正确结果.

解法 2 分离变量得

$$\frac{dy}{y} = 2x dx$$

两边积分,得

$$\ln y = x^2 + \ln C$$

即

$$\ln\frac{y}{C} = x^2 \qquad y = Ce^{x^2}$$

其中 C 为任意常数,这就是原方程的通解.

今后,我们采用这一简化解法,把 $\ln|y|$写成 $\ln y$,而不必采用解法 1 的严密书写格式,也不再一一加以说明.

例 4 求微分方程$(1-x^2)y-xy'=0$ 的通解.

解 这是一个一阶微分方程,通过代数运算解出 y'的表达式,有

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(1-x^2)y}{x}$$

将方程分离变量,得

$$\frac{dy}{y} = \frac{1-x^2}{x}dx$$

两边积分,有

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int\left(\frac{1}{x} - x\right)\mathrm{d}x$$

得 $$\ln y = \ln x - \frac{x^2}{2} + \ln C$$

化简为 $$\ln\frac{y}{Cx} = -\frac{x^2}{2} \qquad \frac{y}{Cx} = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \qquad y = Cx\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

这就是所给微分方程的通解.

例 5 求微分方程$(x - xy^2)\mathrm{d}x + (y + x^2y)\mathrm{d}y = 0$满足初始条件$y|_{x=0} = 2$的特解.

解 这是一个一阶微分方程,但不必解出 y' 的表达式,直接通过代数运算对方程分离变量.原方程可写成

$$x(1 - y^2)\mathrm{d}x + y(1 + x^2)\mathrm{d}y = 0 \qquad y(1 + x^2)\mathrm{d}y = x(y^2 - 1)\mathrm{d}x$$

分离变量,得

$$\frac{y\mathrm{d}y}{y^2 - 1} = \frac{x\mathrm{d}x}{1 + x^2}$$

两边积分,有

$$\int \frac{y}{y^2 - 1}\mathrm{d}y = \int \frac{x}{1 + x^2}\mathrm{d}x$$

用凑微分法,得

$$\int \frac{\mathrm{d}(y^2 - 1)}{y^2 - 1} = \int \frac{\mathrm{d}(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \qquad \ln(y^2 - 1) = \ln(x^2 + 1) + \ln C$$

化简得方程的通解为

$$y^2 - 1 = C(x^2 + 1)$$

用初始条件 $x = 0$ 时,$y = 2$ 代入通解,得 $C = 3$. 于是所求的特解为

$$y^2 = 3x^2 + 4$$

习题 6 - 2

基本练习题

7. 设一条平面曲线经过点(1,0),且曲线上任意一点处的切线斜率为 $3x^2$,求这曲线的方程.

解

8. 求下列微分方程的通解：

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0$；

解

(2) $y'-\frac{\cos^2 y}{x^2}=0$；

解

(3) $y-y'=1+xy'$；

解

(4) $\sqrt{1-x^2}\,y'-\sqrt{1-y^2}=0$；

解

(5) $(\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=0$.

解

9. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\sin x, y|_{x=0}=1$；

解

(2) $\dfrac{x dx}{1+y}-\dfrac{y dy}{1+x}=0, y(0)=1$；

解

(3) $y'-2x(1+9y^2)=0, y(0)=\dfrac{1}{3}$；

解

(4) $\sin x\cos y dx=\cos x\sin y dy, y|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$.

解

拓展题

10. 求微分方程 $y' + x^2 y' = x + x^2$ 的通解.

解

11. 求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{e}^{x+y^3}}{y^2}$满足初始条件 $y(0)=0$ 的特解.

解

12. 一质点做直线运动,已知速度 $v(t)=\mathrm{e}^t \cdot \sqrt[3]{1-\mathrm{e}^t}$,且 $t=0$ 时,$S=1$,求该质点的运动方程 $S=S(t)$.

解

13. 求一曲线，使它经过点$(-1,1)$，且曲线上任意一点处的切线截 Ox 轴所得的截距等于该切点的横坐标的平方.

解

三、一阶线性微分方程

求解一个一阶的微分方程，通过观察判定它不属变量可分离型时，又方程中出现的未知函数 y 及 y' 是一次的，这时应通过代数运算，若能够把方程写成形如

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad ①$$

则称方程①为一阶线性非齐次方程，它的通解公式是

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$$

（注意，积分过程化简时，经常用到恒等式 $e^{\ln u(x)} = u(x)$.）

如果 $Q(x)=0$，则方程①成为

$$y' + P(x)y = 0 \qquad ②$$

称为与方程①对应的一阶线性齐次方程，它可用分离变量解法.

例 6 求微分方程 $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ 的通解.

解 所给方程是一阶线性非齐次微分方程的标准形式，这里 $P(x)=2x$，$Q(x)=2xe^{-x^2}$. 直接代入通解公式，得

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right) = e^{-\int 2xdx}\left(\int 2xe^{-x^2}\cdot e^{\int 2xdx}dx + C\right)$$

$$= e^{-x^2}\left(\int 2xe^{-x^2}e^{x^2}dx + C\right) = e^{-x^2}(x^2 + C)$$

例 7 求微分方程 $\cos x\dfrac{dy}{dx} + y\sin x - 1 = 0$ 的通解.

解 这是一个一阶微分方程,不妨解出 y' 的表达式

$$y' = \frac{1 - y\sin x}{\cos x}$$

显然不可以分离变量.观察方程中的 y 和 y' 是一次的,所以按照方程①的样式,将所给方程除以 $\cos x$,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \tan x \cdot y = \sec x$$

这里 $P(x)=\tan x, Q(x)=\sec x$.套用通解公式得

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right) = \mathrm{e}^{-\int \tan x\mathrm{d}x}\left(\int \sec x\,\mathrm{e}^{\int \tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right) \\ &= \mathrm{e}^{\ln\cos x}\left(\int \sec x\,\mathrm{e}^{-\ln\cos x}\mathrm{d}x + C\right) = \cos x\left(\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x + C\right) \\ &= \cos x(\tan x + C) \end{aligned}$$

即通解为

$$y = \sin x + C\cos x$$

例 8 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x+y^3}$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的特解.

解 这是一个一阶微分方程,右端函数所含因子 $(x+y^3)$ 显然不可分离变量,关于未知函数 y 也不是线性的.但如果将 x 看作是 y 的函数,方程可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x+y^3}{y} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - \frac{1}{y}x = y^2$$

则方程是关于未知函数 x 及 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ 的一阶线性方程.这里 $P(y) = -\frac{1}{y}, Q(y) = y^2$.套用通解公式有

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{e}^{-\int P(y)\mathrm{d}y}\left(\int Q(y)\mathrm{e}^{\int P(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + C\right) = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left(\int y^2\mathrm{e}^{-\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + C\right) \\ &= \mathrm{e}^{\ln y}\left(\int y^2\mathrm{e}^{-\ln y}\mathrm{d}y + C\right) = y\left(\int y^2 \cdot \frac{1}{y}\mathrm{d}y + C\right) \\ &= y\left(\frac{y^2}{2} + C\right) \end{aligned}$$

用初始条件 $y=1$ 时,$x=1$ 代入通解,得 $1=\frac{1}{2}+C, C=\frac{1}{2}$.于是,所求特解为

$$x = \frac{y^3+y}{2}$$

习题 6 - 3

基本练习题

14. 求一曲线方程，它通过原点，且曲线上任意点 $M(x,y)$ 处的切线斜率等于 $2x+y$.

解

15. 求下列微分方程的通解.

(1) $\frac{dy}{dx}-y=e^{x}$;

解

(2) $xy'+y=x^{2}$;

解

(3) $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$;

解

(4) $xy' - y = x^2 \sin x$.

解

16. 求下列微分方程满足所给条件的特解:

(1) $\begin{cases} xy' + y - 3 = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$;

解

(2) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2xy = 4x \\ y(0) = 1 \end{cases}$;

解